МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Кузнецов Дмитрий Юрьевич**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

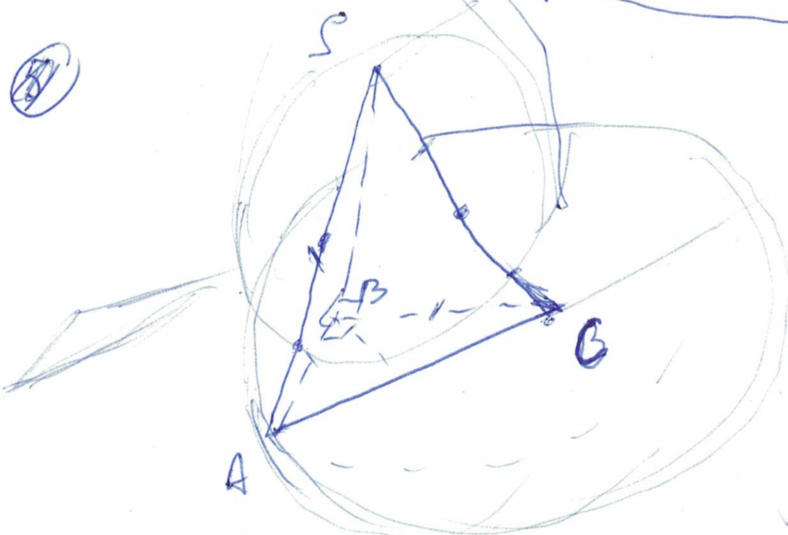
ФИО участника: Кузнецов Дмитрий Юрьевич

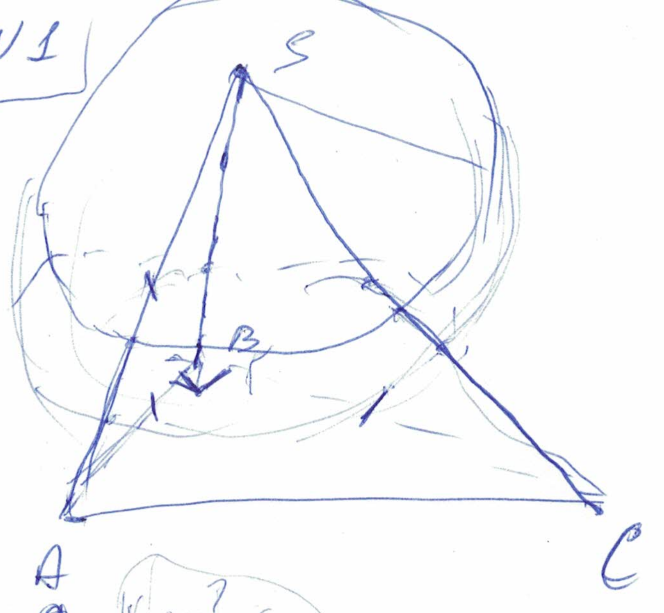
Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Черновик №1





$\frac{4043}{2022}$

2028

6, 7, 8, 9, 10

9	16	25	36	49	64	81	100
	121	144	169	196	225	
	256	289	324			

$(4x^2(2x+1)-9(2x+1)) = (4x^2-9)(2x+1)$

$(8x^3+4x^2-18x-9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a| < 4x^2+8x$

$4x(x+2)$

$-2 \quad 0$

$|x^3+2x^2+x+2|+|x^3-2x^2+x-2| < 4x^2+8x$

$-(x+2)(x^2+1)-(x^2+1)(x-2)$

$(x^2+1)(-x-2-x+2)$

$-2x(x^2+1) < 4x(x+2)$

$x^2+1 > 2x+4$

$|x^2(x+2)+x+2|+|x^2(x-2)+x-2| < 4x^2+8x$

$(x+2)(x^2+1)+(x^2+1)(2-x)$

$|(x+2)(x^2+1)|+|(x^2+1)(x-2)| < 4x^2+8x$

$(x^2+1) < 4x(x+2)$

$x > \frac{1}{2}$

$2x-1 > 0$

$x^2+2x > x^2+1$

$|(x+2)(x^2+1)|+|(x^2+1)(x-2)| < 4x(x+2)$

$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
	-2		2

$(x+2)(x^2+1)+(x^2+1)(x-2) < 4x(x+2)$

$(x^2+1)(x+2+x-2) < 4x(x+2)$

$(x^2+1)\,|2x| < 4x(x+2)$

$x^2+1 < 2x+4$

$x^2-2x-3 < 0$

$2x(x^2+1) < 4x(x+2)$

Черновик №2

№4 Ответ: да, найдется.

Решение:

1) Докажем что $a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$.

Воспользуемся док-вом по индукции.

База: $n = 1$, тогда $a_1 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right) = \frac{4043}{2022}$

Переход: $n = k+1$, тогда $a_{k+1} = (a_k^3 - 3 \cdot a_k^2 + 3 \cdot a_k) \overset{(*)}{=} (a_k - 1)^3 + 1 =$
$= (a_k - 1)^3 + 1 = \left(\left(1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{k-1}}\right) - 1\right)^3 + 1 =$
$= 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^k}$, так как по предп. инд. $a_k = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{k-1}}$

Переход выполнен.

2) Докажем что существует n такое, что $1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} \le \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021} \iff \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} \le \frac{1}{2021}$.

Черновик №3

Заметим, что ф-ция $f(n)=a^{3^n}$ убывает на промеж. $[1;+\infty)$ при ~~a~~ $0<a<1$ и стремится к 0.

Тогда при $a=\frac{2021}{2022}$ начиная с некоторого n для любого $k \geqslant n$ будет $f(k) \leq \frac{1}{2021}$

(2) $\frac{1}{4\cdot\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cdot\cos 50^\circ}=$

$=\frac{\frac{1}{2}}{2\cos 40^\circ}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sin 40^\circ}=\frac{\cos 60^\circ}{2\cos 40^\circ}+$

$+\frac{\sin 60^\circ}{2\sin 40^\circ}=\frac{\cos 60^\circ\cdot\sin 40^\circ+\cos 40^\circ\cdot\sin 60^\circ}{2\cdot\cos 40^\circ\cdot\sin 40^\circ}$

$=\frac{\sin(40^\circ+60^\circ)}{\sin(40^\circ\cdot 2)}=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}=1$

$8x^3+4x^2-18x-9=4x^2(2x+1)-9(2x+1)=$
$=(4x^2-9)(2x+1)=(2x-3)(2x+3)(2x+1)$

Итак, нужно решить нер-во

$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\cdot\arccos(x-1)\leq$

$\leq\arccos 1=0$

Черновик №4

ОДЗ: $x \in [0; 2]$.

Если $x = 2$, нерав-во верно, т.к. $0 \le 0$.

Если $x \neq 2$, нер-во $\Leftrightarrow$ равносильн. сист:

$$\begin{cases} x \in [0; 2) \\ (2x-3)(2x+3)(2x+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2) \\ x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left\{ x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \right.$.

Ответ: $\left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$.

1) Начинаем с 6. Минимальн. квадрат больший 6 это $3^2 = 9$
Минимальный куб больший > 6 это $2^3 = 8$.
Отложим 2022 числа без пропусков получим посл. 6 .... 2027.
Сколько лишнего добавили:
$45^2 = 2025$
$12^3 = 1728$
Лишних кубов $(12 - 2 + 1) = 11$ штук

~~Черновик №~~ ~~Черновик~~

меньших квадратов $(45-3+1)=43$ шт.

$\left.\begin{matrix}11\\43\end{matrix}\right\}$ 54 шт.

$M\cdot M$

$46\cdot 46$

Заметим, что k^6 и квадрат и куб. Таких было 2: 64 и 729.

Всего меньшего $54-2=52$ штуки.

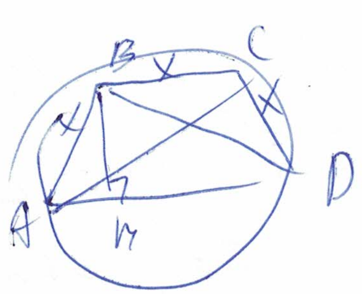
Заметим, что $13^3=2197$,

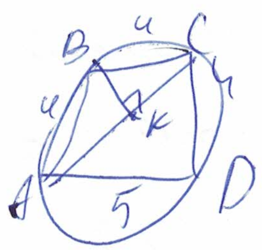
$46^2=2116$, значит

в 2028 ... 2079 нет квадратов и кубов.

Значит это как раз следующ. 52 числа нашей последовательности.

Ответ: 2079.





$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x+a|$

Чистовик № 1 Вариант 11-1.

4) Ответ: да, найдется.

Решение:

1) Докажем, что $a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$.

Воспользуемся док-вом по индукции.

База: $n = 1$, тогда $a_1 = 1 + \frac{2021}{2022} = \frac{4043}{2022}$

Переход: $n = k+1$, тогда $a_{k+1} = (a_k^3 - 3 \cdot a_k^2 + 3 \cdot a_k)$
$= (a_k^3 - 3 \cdot a_k^2 + 3 \cdot a_k) + 1 = (a_k - 1)^3 + 1 =$
$= \left(\left(1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{k-1}}\right) - 1\right)^3 + 1 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3k}$,

так как по предположению индукции
$a_k = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{k-1}}$

Переход выполнен.

2) Докажем, что существует n такое, что
$1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} \leq \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021} \iff$

$\iff \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} \leq \frac{1}{2021}$

Заметим, что ф-ция $f(n) = a^{3^n}$ убывает на промеж. $[1; +\infty)$ при $0 < a < 1$ и стремится к 0.

Тогда при $a = \frac{2021}{2022}$ получаем, что начиная с некоторого n для любого $k \geq n$ будет $f(k) \leq \frac{1}{2021}$.

$\boxed{\text{Чистовик } №2}$

(2) $$\frac{1}{4\cdot\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cdot\cos 50^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{2\cos 40^\circ}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sin 40^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ}{2\cos 40^\circ}+\frac{\sin 60^\circ}{2\sin 40^\circ}=\frac{\cos 60^\circ\cdot\sin 40^\circ+\cos 40^\circ\cdot\sin 60^\circ}{2\cdot\cos 40^\circ\cdot\sin 40^\circ}=$$

$$=\frac{\sin(40^\circ+60^\circ)}{\sin(40^\circ\cdot 2)}=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}=1$$

$$8x^2+4x^2-18x-9=4x^2(2x+1)-9(2x+1)=$$
$$=(4x^2-9)(2x+1)=(2x-3)(2x+3)(2x+1)$$

Итак нужно решить нер-во:

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\cdot\arccos(x-1)\le\underbrace{\arccos 1}_{=0}$$

ОДЗ: $x\in[0;2]$

Если $x=2$, нер-во верно, т.к. $0\le 0$

Если $x\ne 2$, нер-во равносильно системе

$$\begin{cases} x\in[0;2) \\ (2x-3)(2x+3)(2x+1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;2) \\ x\in(-\infty;-\frac{3}{2}]\cup[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x\in[0;\frac{3}{2}]$.

Ответ: $[0;\frac{3}{2}]\cup\{2\}$.

(Черновик №3)

③ Т.к. хорды AB, BC, CD равные, то углы на них тоже равные $\Rightarrow$
$\angle BDA = \angle BCA = \angle CBD = \angle CAD$,
значит BC параллелен AD $\Rightarrow$ $ABCD$ – трапеция с основаниями BC и AD.
Пусть $AD = k$, $BC = x$, ~~высота~~ высота BH трапеции будет равна $\sqrt{x^2-\left(\frac{k-x}{2}\right)^2} =$
$= \sqrt{\frac{3x^2+2\cdot x\cdot k-k^2}{4}}$.

Расстояние между B и D равно расстоянию между A и C и равно $\sqrt{\frac{(k+x)^2}{4}+\frac{3x^2+2xk-k^2}{4}} =$
$= \sqrt{x^2+xk} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2+xk$ – полный квадрат,
по неравенствам треугольника $AB+BD > AD \Rightarrow$
$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+xk} > k$, это нужно проверять, чтобы трапеция существовала.
Пройдемся по x и найдем такие k.
$\sqrt{x^2+xk} < 2x$.

Из $\triangle BCD$ следует $AD < AB+2BC \Rightarrow$
$\Rightarrow k < 3x$, т.е. найдем такие $k \in [1;3x)$, что удовлетворит.
при $x=1$: нет решений.
$x=2$: нет решений
$x=3$: $\sqrt{(3+3)\cdot y}$ $x\in[1;9)$, таких y тоже нет.

Чистовик №4

$x = 4$; $y \neq 1$; $y \neq 2$, $y \neq 3$, $y \neq 4$, то $y = 5$ удовлетворяет и при этом $P = 17$.
Докажем что это минимум.
Если $x = 5$ то $y = 1$; $y = 2$. не удовл.,
а если $x \geq 6$, то $3x > 17$ =>
минимальный $P = 17$

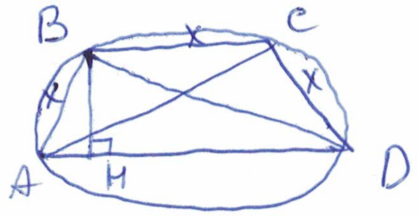
В $\triangle ABC$: $AC = 6$; BK – высота.

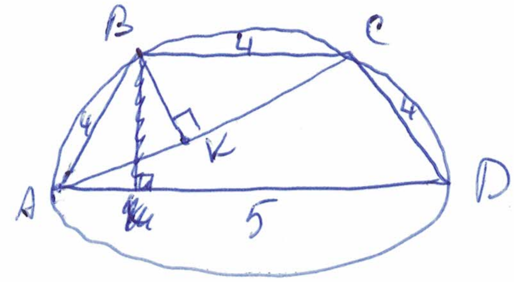
$BK = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$\sin \angle BAK = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R = \frac{16}{\sqrt{7}}$ =>

=> $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$.





Чистовик № 5

① Начинаем с 6. Минимальный квадрат, больший 6 это $3^2=9$.
Минимальный куб больший 6 это $2^3=8$.

Отложим 2022 числа без пропусков: получим последовательность 6 .... 2027.
Сколько лишнего добавили:
$45^2=2025$
$12^3=1728$

Лишних кубов $(12-2+1)=11$ штук.
Лишних квадратов $(45-3+1)=43$ шт. $\Big\}$ 54 шт

Заметим, что k^6 и квадрат и куб.
таких было 2: 64 и 729.
Всего лишнего $54-2=52$ штуки.
Заметим, что $13^3=2197$,
$46^2=2116$.
Значит в 2028 ... 2079 нет квадратов и кубов.

Значит это как раз следующие 52 числа нашей последовательности

Ответ: 2079

Чистовик № 6

(6) $|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x+a|<4x^2+8x$

$4x^2+8x>|k|+|l|\geqslant|k+l|=$

$=|2x^3+2x|$

Если $x<0$, то $|2x^3+2x|=-2x\cdot$

$\cdot(x^2+1)$

$2x+4<-2\cdot(x^2+1)$, $x^2+x+1<0$, что

неверно. $x>0$.

Если (x^3+2x^2+x+a) и (x^3-2x^2+x+a)

имеет одинаковый знак, то $|x^3+2x^2+x+a|$

$+|x^3-2x^2+x+a|=|2x^3+2x|=2x^3+2x$

$4x^2+8x>2x^3+2x$, $x^3-2x^2-3x<0$,

$x(x-3)\cdot(x+1)<0$, значит $x<3$.