



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: «Покори Воробьёвы горы!»

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кузнецов Дмитрий Юрьевич**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

2021/2022 учебный год

Заключительный этап

ФИО участника: Кузнецов Дмитрий Юрьевич

Класс: 10-11

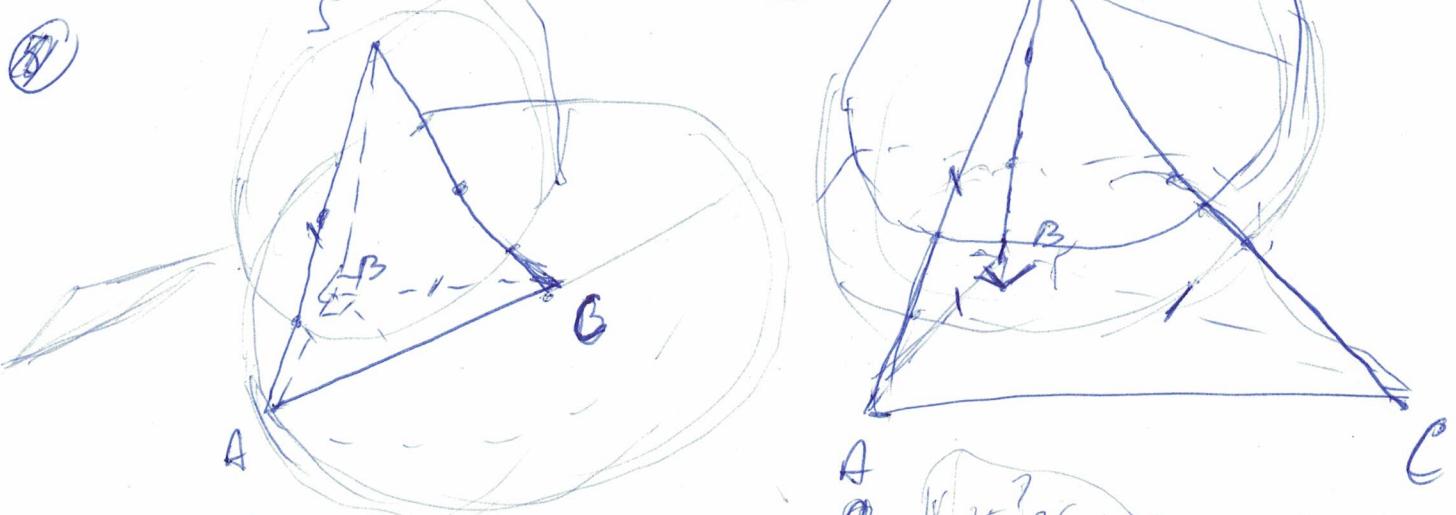
Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Черновик №1



~~111~~
126
136
146
156
166
176
186
193
202
212
222
232
242
252
262
272
282
292
302

~~111~~
125
136
146
156
166
176
186
196
202
212
222
232
242
252
262
272
282
292
302

$$(4x^2(2x+1) - 8(2x+1)) \cdot (4x^2 - 9)(2x+1) \leq$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos\left(\frac{4}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) \leq$$

$$4x(x+2)$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| \leq 4x^2 + 8x$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + 2| + |x^3 - 2x^2 + x - 2| \leq 4x^2 + 8x$$

$$|x^2(x+2) + x + 2| + |x^2(x-2) + x - 2| \leq 4x^2 + 8x$$

$$|(x+2)(x^2 + 1)| + |(x^2 + 1)(x-2)| \leq 4x^2 + 8x$$

$$|(x+2)(x^2 + 1)| + |(x^2 + 1)(x-2)| \leq 4x(x+2)$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ - x-2 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$x^2 + 1 \quad \begin{array}{r} x+2 \\ - x-2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 \quad \begin{array}{r} x+2 \\ - x-2 \\ \hline 2 \end{array} \leq 4x(x+2) \leq 4x(x+2)$$

Жұлдыздау №2

№4 Орбели гәс, нән берд.

Пәннен:

$$1) \text{Докажем что } a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{n-1}}.$$

Доказательство
Берілген жыныс жөнінде нәне анықтау.

Бағыт: $n=1$, төрткә $a_1 = 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^3 =$

$$= \frac{4043}{2022}$$

Переход: $n=k+1$, төрткә $a_{k+1} = (a_k^3 - 3)$
 $a_k^2 + 3 \cdot a_k \stackrel{(*)}{=} (a_k^3 - 3a_k) \stackrel{(*)}{=} (a_k - 1)^3 + 1 =$
 $= (a_k - 1)^3 + 1 = \left(\left(1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{k-1}} \right) - 1 \right) + 1 =$
 $= 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^k}$, Так как нәне анықтау.
 $a_k = 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{k-1}}$

Переход барынан.

$$2) \text{Докажем что } 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^n} \leq \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^n} \leq \frac{1}{2021}.$$

Черновик №3

Задачи, 200 гп-зел $f(n) = a^{3^n}$ удаляются

на промеж. $[1, +\infty)$ при $a > 1$

и симметрия к 0.

Тогда при $a = \frac{2021}{2022}$ наимен. с некоторыми $k \geq n$ для $f(k) \leq \frac{1}{2021}$ находим, что

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{2} \quad \frac{1}{4 \cdot \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \cos 50^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 & = \frac{\frac{1}{2}}{\cancel{2 \cos 40^\circ}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \sin 40^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{2 \cos 40^\circ} + \\
 & + \frac{\sin 60^\circ}{2 \sin 40^\circ} = \frac{\cos 60^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 60^\circ}{2 \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ} \\
 & = \frac{\sin(40^\circ + 60^\circ)}{\sin(40^\circ \cdot 2)} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 4x^2 - 18x - 9 &= 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = \\
 &= (4x^2 - 9)(2x+1) = (2x-3)(2x+3)(2x+1)
 \end{aligned}$$

Учак, можно решить не - 60

$$\begin{aligned}
 & (2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \\
 & \leq \arccos 1 = 0
 \end{aligned}$$

The problem with

$$OD3: x \in [0; 2].$$

Если $x=2$, то $\log_2 -60$ бессмыс., т.к.

$$0 \leq 0.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Есть } x \neq 2, \text{ нет } -6 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x \in [0; 2] \\ (2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0 \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0; 2] \\ x \in [-8; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0; \frac{3}{2}] \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0; \frac{3}{2}] \end{array} \right. \quad \text{побоку - все!}
 \end{aligned}$$

Orbem: $\{0; \frac{3}{2}\} \cup \{2\}$.

① Начинаем с 6 . менема на 6.
квадрат боковин 6 это $3^2 = 9$
менема вонной куба ^{боковин} > 6 это $2^3 = 8$.
Отложим 2022 числа без пропусков
из которых идет 6 ... 2027.
Сколько чисел в годубине:
 $45^2 = 2025$
 $12^3 = 1728$
иных кубов $(12 - 2 + 1) = 11$ штук

~~Черновик № 1~~ ~~Черновик № 2~~ ~~Черновик № 3~~ ~~Черновик № 4~~ ~~Черновик № 5~~ ~~Черновик № 6~~ ~~Черновик № 7~~ ~~Черновик № 8~~ ~~Черновик № 9~~ ~~Черновик № 10~~ ~~Черновик № 11~~ ~~Черновик № 12~~ ~~Черновик № 13~~ ~~Черновик № 14~~ ~~Черновик № 15~~ ~~Черновик № 16~~ ~~Черновик № 17~~ ~~Черновик № 18~~ ~~Черновик № 19~~ ~~Черновик № 20~~ ~~Черновик № 21~~ ~~Черновик № 22~~ ~~Черновик № 23~~ ~~Черновик № 24~~ ~~Черновик № 25~~ ~~Черновик № 26~~ ~~Черновик № 27~~ ~~Черновик № 28~~ ~~Черновик № 29~~ ~~Черновик № 30~~ ~~Черновик № 31~~ ~~Черновик № 32~~ ~~Черновик № 33~~ ~~Черновик № 34~~ ~~Черновик № 35~~ ~~Черновик № 36~~ ~~Черновик № 37~~ ~~Черновик № 38~~ ~~Черновик № 39~~ ~~Черновик № 40~~ ~~Черновик № 41~~ ~~Черновик № 42~~ ~~Черновик № 43~~ ~~Черновик № 44~~ ~~Черновик № 45~~ ~~Черновик № 46~~ ~~Черновик № 47~~ ~~Черновик № 48~~ ~~Черновик № 49~~ ~~Черновик № 50~~ ~~Черновик № 51~~ ~~Черновик № 52~~ ~~Черновик № 53~~ ~~Черновик № 54~~ ~~Черновик № 55~~ ~~Черновик № 56~~ ~~Черновик № 57~~ ~~Черновик № 58~~ ~~Черновик № 59~~ ~~Черновик № 60~~ ~~Черновик № 61~~ ~~Черновик № 62~~ ~~Черновик № 63~~ ~~Черновик № 64~~ ~~Черновик № 65~~ ~~Черновик № 66~~ ~~Черновик № 67~~ ~~Черновик № 68~~ ~~Черновик № 69~~ ~~Черновик № 70~~ ~~Черновик № 71~~ ~~Черновик № 72~~ ~~Черновик № 73~~ ~~Черновик № 74~~ ~~Черновик № 75~~ ~~Черновик № 76~~ ~~Черновик № 77~~ ~~Черновик № 78~~ ~~Черновик № 79~~ ~~Черновик № 80~~ ~~Черновик № 81~~ ~~Черновик № 82~~ ~~Черновик № 83~~ ~~Черновик № 84~~ ~~Черновик № 85~~ ~~Черновик № 86~~ ~~Черновик № 87~~ ~~Черновик № 88~~ ~~Черновик № 89~~ ~~Черновик № 90~~ ~~Черновик № 91~~ ~~Черновик № 92~~ ~~Черновик № 93~~ ~~Черновик № 94~~ ~~Черновик № 95~~ ~~Черновик № 96~~ ~~Черновик № 97~~ ~~Черновик № 98~~ ~~Черновик № 99~~ ~~Черновик № 100~~

11 } 54 м.

43

Ры. 11

46·46

Заметим, что k^6 и квадрат куба.

Таких было 2: 64 и 729.

Всего чисел 54 - 2 = 52 штук.

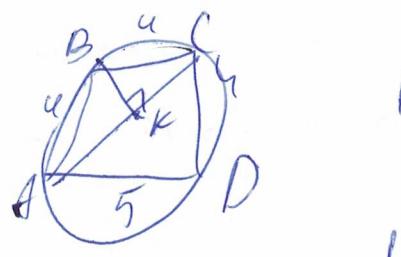
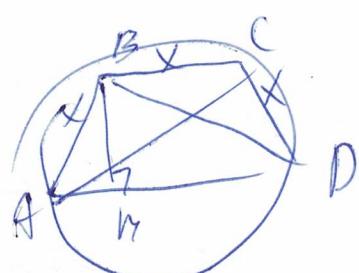
Заметим, что $13^3 = 2197$, ~~кубов~~

$46^2 = 2116$, ~~занес~~

6 2028 ... ~~2079~~ не + квадратов и
кубов.

Значит 300 как раз соответствует 52
числа имеют такое свойство.

Объем: 2079.



$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 7x^2 + x + a|$$

Четверт N1

Бағыттау 11-1.

4)

Орбемінің а, мәнін көзіндең.

Решение:

$$1) \text{Докажем, что } a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{n-1}}.$$

Болшою заменой ғол-бом нө иғүйкүен.

$$\text{База: } n=1, \text{ тогда } a_1 = 1 + \frac{2021}{2022} = \frac{4043}{2022}$$

$$\begin{aligned} \text{Рекурс: } n=k+1, \text{ тогда } a_{k+1} &= (a_k^3 - 3 \cdot a_k^2 + 3 \cdot a_k) \\ &= (a_k^3 - 3 \cdot a_k^2 + 3 \cdot a_k) + 1 = (a_k - 1)^3 + 1 = \\ &= \left(\left(1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{k-1}} \right) - 1 \right)^3 + 1 = 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^k}, \end{aligned}$$

так как нө иғепнөхкемеси иғүйкүен

$$a_k = 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{k-1}}$$

Рекурс қарастырылған.

2) Докажем, нө сүйе оғызын h тақое, нө

$$1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^n} \leq \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^n} \leq \frac{1}{2021}$$

Земердем, нө 0-ында $f(n) = a^{3^n}$ үйнелесет
на иномек. $(1; +\infty)$ нөре оралса $a > 1$ н
стремится к 0.

Тогда при $a = \frac{2021}{2022}$ нөнгәзең, нө
на үшінде е некоротко нө гана. Модело күнкү
сығын $f(k) \leq \frac{1}{2021}$.

Ueberebung N2

$$\begin{aligned}
 ② & \frac{1}{4 \cdot \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \cos 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cos 40^\circ} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \sin 40^\circ} = \\
 & = \frac{\cos 60^\circ}{2 \cos 40^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{2 \sin 40^\circ} = \frac{\cos 60^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 60^\circ}{2 \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \\
 & = \frac{\sin(40^\circ + 60^\circ)}{\sin(40^\circ \cdot 2)} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 4x^2 - 18x - 9 &= 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = \\
 &= (4x^2 - 9)(2x+1) = (2x-3)(2x+3)(2x+1)
 \end{aligned}$$

Узак нуко поеете кеф-бо:

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos 1 \quad \text{---}$$

$$\text{ОДЗ: } x \in [0; 2]$$

Если $x = 2$, кеф-бо бене, т.к. $0 \leq 0$

Если $x \neq 2$, кеф-бо забио симо дикриме

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [0; 2] \\ (2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0; 2] \\ x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; \frac{3}{2}]$$

$$\text{Одбен: } [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

(Числобек №3)

③ Т.к. $\angle ABD = \angle ABC = \angle BCD = \angle CAD$,
то $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ \Rightarrow

$\angle BDA = \angle BCA = \angle CBD = \angle CAD$,
значит $BC \parallel AD$ \Rightarrow $ABCD$ —
трапеция с основаниями BC и AD .

Пусть $AD = k$, $BC = x$, ~~одинаковые боковы~~
БИ Трапеции Δ сумма боков $\sqrt{x^2 - (\frac{k-x}{2})^2} =$
 $= \sqrt{\frac{3x^2 + 2 \cdot x \cdot k - k^2}{4}}$.

Поскольку между B и D пять боков последовательно
между A и C и боков $\sqrt{\frac{(k+x)^2}{4} + \frac{3x^2 + 2 \cdot x \cdot k - k^2}{4}} =$
 $= \sqrt{x^2 + xk}$ $\in \mathbb{Z}$ \Rightarrow $x^2 + xk$ — нормальные квадраты,
но не боков и $x + \sqrt{x^2 + xk}$ треугольника $AB + BD > AD$;
тогда и $x + \sqrt{x^2 + xk} > k$, это можно проверить,
приведя и x и k к единому закону.
 $\sqrt{x^2 + xk} < 2x$.

Уз ΔBCD нельзя $AD < AB + 2BC \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow k < 3x$, т.е. найдется такое k , $k \in [1; 3x]$,
тогда удовлетворят.

если $x = 1$: нет решений.

$x = 2$: нет решений

$x = 3$: $\sqrt{(3+3) \cdot y}$ $y \in [f; g]$, таких y нет.

Учебник № 4

$x = 4$; $y \neq 1$; $y \neq 2$, $y \neq 3$, $y \neq 4$, но
 $y = 5$ является боком и уже есть $P = 17$,
 Докажем что это единственный.

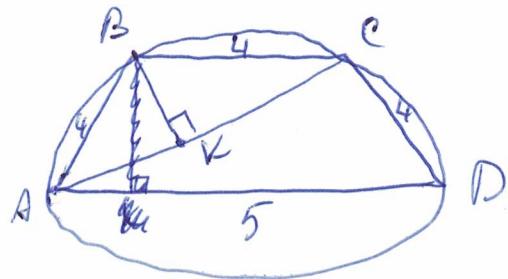
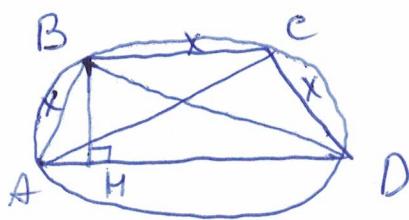
Если $x = 5$ то $y = 1$; $y = 2$: не возможно,
 а если $x \geq 6$, то $3x > 17 \Rightarrow$
 максимальное $P = 17$

В $\triangle ABC$: $AC = 6$; BK - биссектриса.
 $BK = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$$\sin \angle BAK = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R = \frac{16}{\sqrt{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}.$$



Числовик №5

① Начиная с 6. Минимум 16 кубов квадрат, большее $6 + 0 \cdot 3^2 = 9$. Минимум большее куб большее $6 + 0 \cdot 2^3 = 8$.

Отложим 2022 числа без пропусков: получим последовательность 6...207.

Сколько чисел с добавлением:

$$45^2 = 2025$$

$$12^3 = 1728$$

минимум кубов $(12 - 2 + 1) = 11$ иск. куб.
минимум квадратов $(45 - 3 + 1) = 43$ иск. кв.

Заметим, что k^6 и квадрат и куб.
Таких всего 2: 64 и 729.

Всего без учета 54 - 2 = 52 иск. куба.
Заметим, что $13^3 = 2197$,
 $46^2 = 2116$.

Значит в 2028...2079 нет квадратов и кубов.

Значит что как раз следующие 52 числа начиная с 2028 не содержат квадратов и кубов.

Объем: 2079.

Числовик № 6

⑥ $|x^3 + 2x^2 + x + \alpha| + |x^3 - 2x^2 + x + \alpha| < 4x^2 + 8$
 $4x^2 + 8x > |k| + |R| \geq |k+R| =$
 $= |2x^3 + 2x|$
Если $x < 0$, то $|2x^3 + 2x| = -2x \cdot (x^2 + 1)$.

$2x + 4 < -2 \cdot (x^2 + 1)$, $x^2 + x + 1 < 0$, что
неверно. $x > 0$.
Если $(x^3 + 2x^2 + x + \alpha) + (x^3 - 2x^2 + x + \alpha)$
имеет одинаковый знак, то $|x^3 + 2x^2 + x + \alpha| + |x^3 - 2x^2 + x + \alpha| = |8x^2 + 2x| = 2x^3 + 2x$
 $4x^2 + 8x > 2x^3 + 2x$, $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$,
 $x(x-3)(x+1) < 0$, значит $x < 3$.