



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Илляхунов Ансар Адылович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Илляхунов Ансар Адылович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	10 баллов	90 баллов

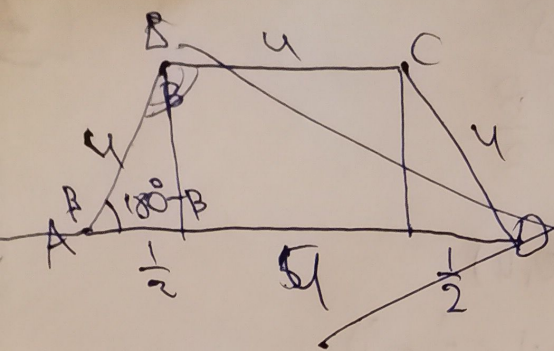
*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

ВАР 11-1

1



$$\angle BAN = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta = \angle ABC$$

$\angle BAD$

но $\angle BAN = \angle ABC$ как соответственные
при ~~AD~~ параллельных AD и BC
и секущей AB)

$AD \parallel BC$

1

$$x^2 \neq y^3$$

$$x^2 = A = y^3$$

p -простое, $p|A \Rightarrow p$ входит в четной степени в A
 $\Rightarrow p$ входит в степени ≥ 3 в A

значит, $A = B^6$

n	кол-во цифр в n^2
4 - 8, ..., 9	2
22 - 10, 31	3
3	

$$32^2 = 1024$$

$$32^2 = (32-1)^2 = 1024 - 64 + 1 < 1000$$

$$45^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$$

$$44^2 < 2024$$

$$13^3 > 2100$$

при удалении квадратов $\rightarrow$
~~и~~ кубов $\rightarrow$

$$6 < 2^3, \dots, 12^3 = 1728 < 2024 \quad 13^3 = 2197$$

производит сдвиг

всего на $43 + 11 - 2$
(или ≥ 2024)

$$6 < 2^6, 3^6 \geq 729 \quad 4^6 = 2^{12} = 4096$$

$\uparrow$
2024

сдвиг
некого не удалим

удалим квадрат и куб между 2024 и $2024 + 52$
(или их уже убрали)

все остальные квадраты и кубы

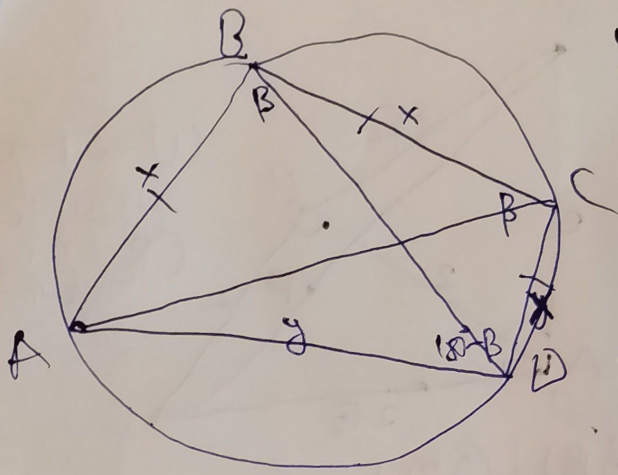
$$2029 < 46^2 = 2116$$

получается 2029 встанет на 2022 место

в новой помете т.к. между 6 и 2029

всего 52 зачеркнутых чисел ($2^3, \dots, 12^3; 3^2, \dots, 45^2; 2^6$ и 3^6 не удалим)

Ответ: 2029



$$y = AE \in \mathbb{N}$$

$$x = AB \in \mathbb{N}$$

по Th. cos:

$$\triangle ABC: AC^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos B$$

$$AC^2 = y^2 + x^2 - 2xy \cos(180^\circ - B)$$

$$y^2 + x^2 + 2xy \cos B$$

$$ABCD \text{ вписан } \Leftrightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

$\angle BDC = \angle BAC$ (вписанные)
 $\angle DCB = \angle BCA$ (вписанные)
 на одной дуге

$\angle ABC = \angle BCD$ (по сумме углов $\triangle$)
 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$
 (по двум углам и общей стороне)
 $BC = AB \quad CD = BC$

$$2x^2(1 - \cos B) = (y+x)^2 + 2xy(\cos B - 1)$$

$$1 - \cos B = \frac{(y+x)^2}{2x(x+y)} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2}$$

$$\cos B = \frac{1}{2} - \frac{y}{2x}$$

$$AC^2 = x^2 + xy$$

$$AC = t \in \mathbb{N}$$

$$y = \frac{t^2}{x} - x > 0$$

$$P = 3x + y = 2x + \frac{t^2}{x}$$

при $x=1: P_1 = 2 + t^2 \geq 2 + 9 = 11$
 (так как $y = t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 1 \Rightarrow t \geq 1$, но $t=1 \Rightarrow y=0$)
 $y = t^2 - 1 \Rightarrow t \geq 2$, но $t=2 \Rightarrow y=3$

при $x > 1: P \geq 2x + 2 \geq 6$
 н.к. $\frac{t^2}{x} \geq x + y \geq 3$

по неравенству $P \rightarrow \min$ при $x=1, t=3$

при $x=2: P = 4 + \frac{t^2}{2} \geq 12$
 $2t^2 \geq 16 \Rightarrow t \geq 4$
 $t \geq 2 \Rightarrow$

при $x=3: P = 6 + \frac{t^2}{3} \geq 18$
 $(t \geq 3 \text{ и } t^2 \geq 9) \Rightarrow t \geq 6$

при $x > 4: P = 3x \geq 12$

$t \geq 3 \Leftrightarrow$ группа делителей
 $ABCD = 3k = AB$

~~min P достигается при $x=1, y=8$~~
~~|| $\cos \beta = \frac{1}{2} = \frac{8}{2}$~~

3

$AC = t \in \mathbb{N}$ м.к. $\beta \in (0, \pi)$

$y = \frac{t^2}{x} - x$ $|\cos \beta| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{2} - \frac{y}{2x}$

$x | t^2 \Downarrow x < t < 2x$ (гипотенуза) $y < 3x$
 $ABCD = 3x > AD$ $\frac{t^2}{x} - x \Downarrow t < 2x$

$y > 0$

$P = 3x + y = 2x + \frac{t^2}{x}$

~~$x \geq 4$~~

(м.к. $x=1 \Rightarrow 1 < t < 2$

$x=2 \Rightarrow 2 < t < 4 \Rightarrow t \in (2, 4)$

$x=3 \Rightarrow 3 < t < 6 \Rightarrow t \in (4, 5] \Rightarrow t^2 \geq 3$)

$x=4: P = 8 + \frac{t^2}{4} \geq 8 + \frac{36}{4} = 17$

min $t: t^2 \geq 16 \Rightarrow t = 4$

$x > 4: P < 17 \Leftrightarrow t^2 < (17 - 2x)x$

$x^2 \Downarrow x < \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \leq 5$

$x=5: P = 10 + \frac{t^2}{5}$

min $t: 5 < t < 10 \Rightarrow t^2 \geq 25$

min P достигается при $x=4, y=5$
 17

очевидно, такой четырехугольник существует.

$AC = 6$

$\cos \beta = -\frac{1}{8} \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$

(м.к. неравенства для него выполнено)

$2R = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{6}{\frac{\sqrt{63}}{8}} \rightarrow R = \frac{24}{\sqrt{63}}$

то Th. sin gives ΔABC

Ответ: $17; \frac{24}{\sqrt{63}}$

6

$$\overbrace{|x^3+2x^2+x+a|}^P + \overbrace{|x^3-2x^2+x-a|}^S < \underbrace{4x^2+8x}_T$$

$$\sqrt{|x^3+2x^2+x+a+x^3-2x^2+x-a|}$$

$$2|x^3+x|$$

значим, $|x^3+x| < 2x^2+4x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3+x < 2x^2+4x : : x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0$

$x=0$
не значим
(0 < 0)
 $\emptyset$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -x^3-x < 2x^2+4x : : (x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+2x+5 < 0$
 $(x+1)^2+4 < 0$
 $\emptyset$

$F = x(x+1)^2+a$
 $S = x(x-1)^2-a$

I $a \geq 0$. ($F \geq 0$)

$\begin{cases} S \geq 0 \\ F+S < T \Leftrightarrow x(x+1)(x-3) < 0 \checkmark \end{cases}$

$\begin{cases} S < 0 \\ F-S < T \Leftrightarrow 2a+4x^2 < 4x^2+8x \Leftrightarrow a < 4x \end{cases}$

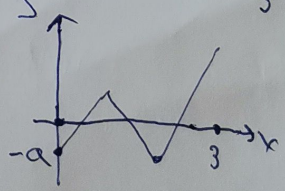
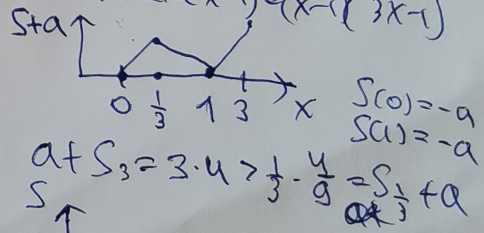
m.e. $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases}$ (необ. усл.)
 $3 \leq x < 0$ - none need. условия

$\Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 0 \\ S < 0 \\ a < 4x \end{cases}$

~~max S < 0~~

$S(x) = x(x-1)^2-a$

$S'(x) = (x-1)^2 + 2x(x-1) = (x-1)(3x-1)$



$3 < x$
 $12 < a < 4x$
 $a > 12$

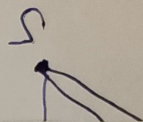
$12-a$

$S \geq 0$
нет решений
m.e. $\max S < 0$

$(S_3) = \max S \geq S \geq 0$
и в первом промежутке $S \geq 0$
и второе представление
собираем промежуток,
интервал $[2, 3]$
(или $(2, 3)$)

м.к. в первом
промежутке $S \geq 0$
и второе представление
собираем промежуток,
интервал $[2, 3]$
(или $(2, 3)$)

$$(SAB) \perp (ABC) \quad S$$



В утаре: ~~0 2 0~~ ~~2 3 2~~ ~~2 2~~

5

$$x \in [2, 3] \Leftrightarrow S \geq 0 \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} S < 0 \\ a < 4x \end{array} \right. \text{ не имеет решений} \quad (2)$$

$$S(2) = 2 > S_{\frac{1}{3} + a} \quad \text{не имеет решений}$$

$S_{\text{возр на } [2, 3]}$
 $S(2) = \max_{x \in [0, 2]} S$

$\Rightarrow$ по формуле (1) $\Leftrightarrow S(2) \geq 0$
 $a = 2$

$$\text{Всегда верно } S < 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$$

для (2)

$$\text{Выводим: } \begin{cases} S < 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2] \\ 2 < 4x < 2 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет решение ($x=1$)

значит, $a=2$.

и вообще $a \geq 0$
 не подходит!

II $a < 0$ ($S \geq 0$)

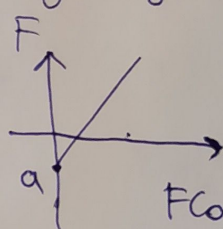
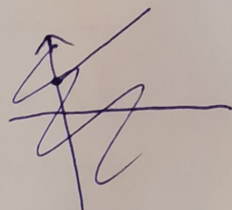
6

$$\begin{cases} F \geq 0 \\ F+S < T \Leftrightarrow x(x+1)(x-3) < 0 \quad \checkmark \\ F < 0 \\ -F+S < T \Leftrightarrow -4x^2-2a < 4x^2+8x \Leftrightarrow x^2+x+\frac{a}{4} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{Graph of } x^2+x+\frac{a}{4} > 0 \text{ with root at } -\frac{1}{2} \\ & (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{a-1}{4} > 0 \\ & \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 > \frac{1-a}{4} \\ & \Leftrightarrow x+\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{1-a}}{2} \end{aligned}$$

$$F(x) = x(x+1)^2 + a$$

$$F'(x) = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1) > 0 \Rightarrow F \text{ возрастает}$$



$F(x_0) = 0$
 x_0 — левый корень F

$$F(0) = a < 0 \\ \max F = F(3) = 48 + a$$

1. $F \geq 0$ имеет решение $\Leftrightarrow 48 + a = \max F \geq 0$
 на $(0, 3)$

тогда левый корень: $[x_0, 3) \cup \{x \in [0, x_0) \mid F < 0 \Leftrightarrow -F+S < T\}$

1.1 либо $x_0 = 2$ и $-F+S \geq T$, или $x \in [0, x_0)$

1.2 либо $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a}}{2} = 2$ и $2 < x_0$ (левый корень)
 $[2, 3)$

1.1 $x_0 = 2 \Leftrightarrow 18 + a \geq 0$

$a \geq -18$ — не подходит!

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a}}{2} < x_0 = 2$$

проверим: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2} \sqrt{2}$

$$\sqrt{19} < 25 \sqrt{2}$$

1.2. $\sqrt{1-a} = 5 \Leftrightarrow a = -24$

$$x_0 > 2 \Leftrightarrow F(2) < 0 \Leftrightarrow 18 + a < 0$$

$a = -24$ — не подходит

проверим $18 + a = 18 - 24 = -6 < 0$
 $\checkmark$

Ответ: $-18; -24$

2. $F \geq 0$ не имеет решений $\Leftrightarrow 48 + a \leq 0$

тогда множество решений = $\emptyset$

$$x \in (0, 3) \cap \left(x > -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a}}{2} \right) = \emptyset$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{1-a} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a}}{2} \\ \parallel \\ 3 \end{array}$$

Омеем: $-18; -24$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1$$

$$a_{n+1} \vee a_n \Leftrightarrow (a_n - 1)^3 \vee (a_n - 1)$$

$$a_n > 1 \Rightarrow ((a_n - 1)^3 \vee (a_n - 1) \Leftrightarrow (a_n - 1)^2 \vee 1) \Leftrightarrow a_n \vee 2$$

$$1 < a_n < 2 \Rightarrow (a_n - 1)^3 + 1 \vee 2 \Leftrightarrow a_n - 1 \vee 1 \Leftrightarrow a_n < 2$$

m.e. $a_{n+1} < 2$

normaly m.k. $a_1 > 1 \Rightarrow a_n \in (1, 2)$
 no sam usgykysu
 nyurim $\{a_n\}$ ydibaem

$$a_{n+1} > t \Leftrightarrow a_n - 1 > \sqrt[3]{t-1} \Leftrightarrow a_n - 1 > \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{t-1} - 1}$$

u m.g. $a_1 - 1 > \sqrt[3]{t-1}$

no marga $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \geq \frac{2022}{2021}) \Leftrightarrow (a_1 \geq 1 + \sqrt[3]{t-1} \quad \forall n \in \mathbb{N})$

$t = 1 + \frac{1}{2021}$

$a_1 \geq 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2021}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$2 - \frac{1}{2021} = a_1 \geq 2$, m.k. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$
 neberho!

Answer: Da

2) $\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 60^\circ \cos 50^\circ + \sin 60^\circ \sin(90^\circ - 40^\circ)}{\cos 50^\circ \cos 40^\circ} \right)$ 9

$$\frac{\cos(60^\circ - 50^\circ)}{\frac{2}{2} (\cos(50^\circ + 40^\circ) + \cos(50^\circ - 40^\circ))} = \frac{\cos 10^\circ}{0 + \cos 10^\circ} = 1$$

n.7. $= \arccos(\quad) = \arccos(1) = 0$

$$\begin{array}{r|l} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 & 2x - 3 \\ \hline 8x^3 - 12x^2 & \\ \hline 16x^2 - 18x & \\ 16x^2 - 24x & \\ \hline 6x - 9 & \\ 6x - 9 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x^2 + 8x + 3 \\ (2x+3)(2x+1) \end{array}$$

$$4x^2 + 8x + 3 = (2x+3)(2x+1)$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = (2x-3)(2x+3)(2x+1)$$

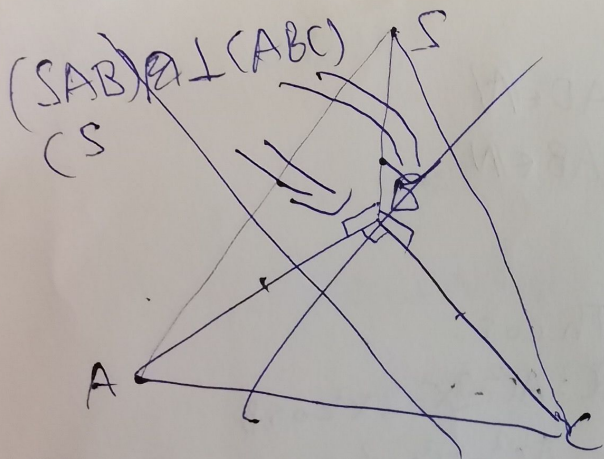
$$\arccos(x-1) = \Rightarrow |x-1| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x-1 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\arccos y \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos y \geq 0$$

B) where: $\arccos(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \arccos(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ (2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Omben: } [0, \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

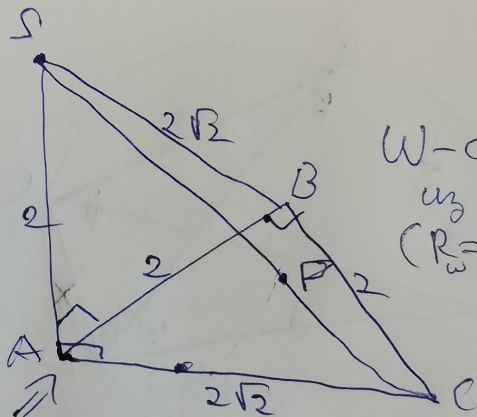


$$R = AC = 2\sqrt{2} \text{ (Th. Thalesa)} \\ \downarrow \text{que } \triangle ABC$$

$$SB = 2\sqrt{2} \text{ (que } \triangle SAB)$$

$$R \Rightarrow W \Rightarrow B$$

$$(SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \perp (SAC)$$



W-сфера
из yalobue
(R = AC
центры S)

110

14

√2)

→ an

m

n

$$-1 > \sqrt[3]{1}$$

$$\geq 1 + \frac{3}{2}$$

$$t = 1 +$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$2 \text{ m}$$

9, $x^2 \text{ БЗР}$

6: 4, ..., 9 → 2

22: 10, ..., 31 → 3

32, ...

$x^2 + xy = k^2$

$y = \frac{k^2 - x^2}{x}$

$(32 \cdot 1)^2 = 1024 - 64 + 1 = 1000$
 $32^2 = 1024$

$\frac{1}{x} - x$

$2 - \frac{1}{2022}$

$x^3 = y^2$ — не угадали да
 цифрано!
 ба пара

$3xy = 2x + \frac{t^2}{\sqrt{x}}$

$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) = 0$

~~x^2~~

$8x^3 + 4x^2 - 1$

$\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ}{\cos 50^\circ \cos 40^\circ} \right)$

$2\sqrt{2t^2}$

$2\sqrt{x} + 2t^2$

$2x^2 = t^2$

$x^2 = 2p^2$

$(x-1)(x^2-2x+1)$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$11^3 =$

$12^3 = 1728$

14 132 144
 3 12 12
 196 169 288
 14 13 12
 784 687 423
 1960 1680 128
 1 22 $x \leq 6$

$2 - \frac{t^2}{x^2}$

$x = \frac{t}{\sqrt{2}}$

$(a_n - 1)^3 = (1 - x)^3$

$\frac{\cos(60^\circ - 50^\circ)}{\cos(80^\circ + 40^\circ) + \cos(80^\circ - 40^\circ)}$
 $\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ + 0} = 1$

a_{n-1}

$a_n > 1 \Rightarrow a_{n+1} > 1$

$(1 - \frac{1}{2022})^3 + 1$

$2 - \frac{3}{2022}$

$(1 - \frac{3}{2022})^3 + 125$

$2 - \frac{9}{2022}$

$169 x^2 \leq t^2 \leq (17 - 2x)x$

$(x-1)^3 + 1$

$x < \frac{15}{24}, 2 - 3x + 3x^2 - x^3$

$1690x = 4 \rightarrow 17$

$2197x = 5 \rightarrow 10$

$\frac{1}{2} - \frac{5}{8}$

$8 + \frac{t^2}{4}$

13^3

$27 \frac{4}{8}$

$5 + x$

$180 \frac{1}{2}$

$4 \quad 8 \quad t$

$17 \quad 3^6$

$1 - 6$

$540 \frac{1}{2}$

$27 \quad 6$

$36 - 9 - 1$

$\frac{1}{2} - \frac{4}{2022}$

$\frac{4}{2022} \leq \frac{3}{2}$

$2 - 7$

729

$27 \quad 6$

$\frac{1}{4} t^2$

$24x^2$

$y < 3x$

$5 + 2022$

2

$2025 + 90 + 1$

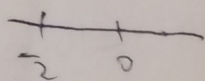
$t^2 < 4x^2$

$t < 2x$

W

$$x^2 + 2x > 0$$

$$x(x+2) > 0$$



$$|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a| < 4(x+1)^2 - 4$$

$$12x^3 + 2x$$

$$1. + + : 2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x$$

$$2r^2(1 - \cos \beta)$$

$$y^3 + x^2(y+x)^2 + 2xy(\cos B - 1)$$

$$(1 - \cos \beta) (2x^2 + 2xy)$$

$$(y+ix)^{2 \times (x+iy)}$$

$$(-\cos \beta = \frac{y \cdot x}{2x} \quad \begin{matrix} x > 0 \Rightarrow x < 3 \\ x < -2 \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\sqrt{x} < 3 \quad \frac{y}{2x} + \frac{1}{3} = 1 - \cos \theta$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} - \frac{y}{2x}$$

2. + -

$$2a + 4x^2 < 4x^2 + 8x$$

$a < u_x$

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{y}{2x}$$

① $\angle 1 - \frac{1}{2}$

27/9

3. - +

$$-2a - 4x^2 < 4x^3 + 8x$$

$$-\frac{9}{4} < x^2 + x$$

$$|x^3 + x| < 2x^2 + 4x$$

1. $x > 0: x^2 + 1 < 2x + 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4$
 $x < 3 \leftarrow$

2. $\angle LO$

$$-x^3 - x(2x^2 + 4x) \mid : (-x) \Rightarrow 0$$

$$x^2 + 1 < -2x - 4$$

$$(x+1)^2 + 4 < 0 \quad \emptyset$$

ЧЕРНОВИК

12

$$X^2 + 2X - 1 + 1 + 2 + \text{circled 10} + \text{circled 10}$$

$$2n \geq \sqrt[3]{t-1}$$

$$= (x-1)^2 + 2x(x-1)$$

$(x-1)(3x-1)$

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - i}}$$

$$(A(-x)) (A(+x))$$

$$AC^2 = dt$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+\Delta)^2 = x^2 + 2\Delta x + \Delta^2$$

$$2\Delta X + \Delta^3 = xy$$

$$\cancel{x(2\Delta - 0)} \quad \Delta^2 = \overset{D}{x(4 - 2\Delta)}$$