



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мигранов Булат Рустамович**

Класс: **7-8**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мигранов Булат Рустамович

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

N1

Числовик

Возьмём одного жителя острова. Если он рыцарь, то тогда найдётся
ещё 4 жителя острова, с которыми можно познакомиться (из-за друзей N2).
Расставим всех людей по количеству собранных бананов. Заметим,
что первые 6 будут рыцарями, т.к. сказанная ими фраза N1
будет правдой, а остальные будут лжецами, т.к. сказанная
ими фраза N1 будет ложью. Тогда, т.к. у нас уже есть 6
в рыцарей, то будет ровно 6 рыцарей. Теперь расставим
всех жителей по количеству собранных бананов. Тогда первые
4 будут лжецами, т.к. сказанная ими фраза N2 будет ложью;
а остальные рыцарями, т.к. фраза N2 будет правдой =>
т.к. у нас есть 6 рыцарей, то будет ровно 4 лжецов.
Итого у нас 6 рыцарей и 4 лжецов. Если же мы
жителя которого мы взяли бы лжецом, то тогда найдётся
ещё 6 жителей с которыми можно познакомиться (из-за друзей N1).
Аналогично рассуждаями утверждениями можно получить,
что будет ровно 6 рыцарей и 4 лжецов.
Ответ: можно собрать всего 13 жителей: 6 рыцарей и
4 лжеца

Лист 1 из 7

N2

Числовик

Пусть было взято x работников, и надо было выкопать y грядок.
 $(x, y \in \mathbb{N}, x > 7, y > 10)$. Тогда ~~производительность~~ 1 рабочий за
 1 день выкопает $\frac{10}{x}$ грядок, тогда 7 рабочих за $\frac{1}{2}$ дня выкопают:

$$\frac{70}{2x} = \frac{35}{x} \text{ грядок} \Rightarrow 10 \cdot \frac{35}{x} = y \Rightarrow 35 = (y-10)x, y > 10, y \in \mathbb{N} \Rightarrow y-10 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y-10 > 1, x > 7, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \text{ делитель } 35 \text{ и } x > 7 \Rightarrow x = 35 \Rightarrow y-10 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 11.$$

Ответ: 11 грядок

N3

$\overline{abc} - \overline{acb} = 72x \ (x \in \mathbb{N}_{>0}) \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 72x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9b - 9c = 72x \Leftrightarrow b - c = 8x, a, b, c \text{ — цифры} \Rightarrow \overline{b-c} = 8x \Rightarrow$
 $\Rightarrow b \leq 9, c \geq 0 \Rightarrow b - c \leq 9 \Rightarrow x \in [0, 1], \text{ если } x = 0, \text{ то } b - c = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b = c \Rightarrow \text{выбрать пару } b, c - 10 \text{ вариантов, а выбрать } a - 9 \text{ вариантов}$
 $(a \text{ цифра и } a \neq 0) \Rightarrow \text{выбрать } a, b, c - 90 \text{ вариантов. Если } x = 1, \text{ то}$
 $b - c = 8 \Rightarrow b \geq 8, \text{ и } b \leq 9 \Rightarrow \text{есть 2 варианта } b = 8, c = 0; b = 9, c = 1; \text{ тогда}$
 $\text{выбрать } a, b, c - 18 \text{ вариантов} \Rightarrow \text{Итого выбрать } a, b, c - 108 \text{ вариантов} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{существует 108 таких 3-х цифровых чисел.}$

Лист 2 из 7

14

Шмидович

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100. \text{ Заменяем } t=x+y \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(t+1)+2y=100 \Leftrightarrow t^2+t+2y=100. x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in \mathbb{N}, t > y$$

$$\text{если } t \leq 8 \Rightarrow t^2+t \leq 72 \Rightarrow 2y \geq 100-t^2-t \geq 28 \Rightarrow y \geq 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \leq 8 < 14 \leq y \Rightarrow t < y, \text{ противоречие} \Rightarrow t > 8 \Rightarrow t \geq 9$$

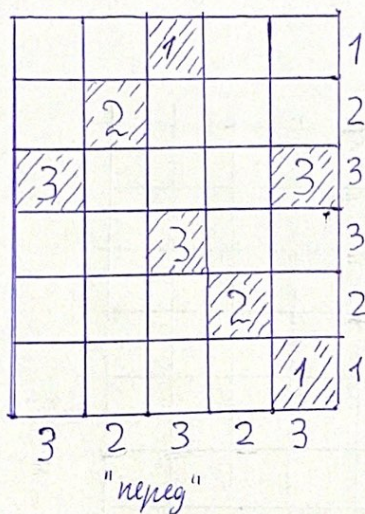
$$\text{если } t \geq 10 \Rightarrow t^2+t \geq 110 \Rightarrow 2y \leq 100-t^2-t \leq -10 \Rightarrow y \notin \mathbb{N}; \text{ противоречие}$$

$$\Rightarrow t < 10 \Rightarrow t \leq 9. \text{ Значит } 9 \leq t \leq 9 \Rightarrow t = 9 \Rightarrow 2y = 100-t^2-t = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = t - y = 4$$

Ответ: (4; 5)

15



Этот замок находится на "пике" 5 на 6.
Посмотрим на рисунок вида сверху. И со
стороны примыкаем ^{числа} ~~защиты~~ - по-во кубиков
высший в данной линии (в высоту). Мы должны
расставить в клетках цифры так,
чтобы максимальное в какой-либо линии
было равно подписанным числам, ведь
в таком случае мы получим "виды".
Высоту" такое количество кубиков.

Заменим, что спереди видно 3 столба высотой 3 а собою
видно 2 столба высотой 3, во столбы длины 3 видны спереди
должны "закрыться" 2 столбами высотой 3 собою, т.к. 3-максималь-
ная высота. По принципу Дирихле в какой-то
"горизонтальной линии" на поле окажется 2 столба, а т.к. горизонталь-
ный — 6 $\Rightarrow$ всего столбов хотя бы 7. а Тимур на 7 приведен воле.

Ответ: 7

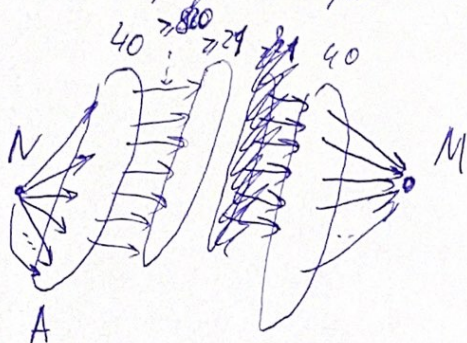
Мин 3 из 7

УВ.

Читовин

Два Казовей Таланю-37-матрица N, Пандоры-матрица M.

Начертим граф (ориентированный) такой что: вершины - матрицы, а рёбра - перемещения. Тогда из матрицы N исходит



40 рёбер к другим матрицам.
Из этих 40 "вдоль других" может идти максимум $\frac{40 \cdot 39}{2}$ рёбер (780)
а всего из них идёт $40 \cdot 40$ рёбер (1600) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ в другие вершины идёт не больше
800 рёбер, то есть не больше чем $\lceil \frac{800}{40} \rceil =$
 $= 21$ ~~таких~~ ^(без повторений) вершин. Аналогично.

Посчитаем для M, то в обратную сторону. Тогда всего 103
матрицы $\Rightarrow$ можно-то количество перемещений $\Rightarrow$ можно
добраться из N в M за не больше чем 3 ~~таких~~ ^{таких} прыжка. $\Rightarrow$
Можно добраться за 1, 2 или 3 прыжка.

Вывод: 1, 2 или 3

Лист 4 из 7

1 2 3 4 5 6
 ↓ ↓ ↓
 108 (4,5) 7

1 →

Упробуем

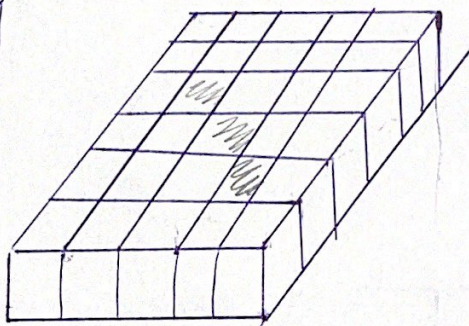
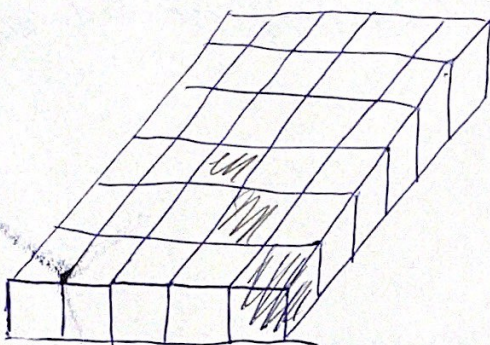
$$abc - acb$$

$$bc - cb = 72 \neq$$

$$bc - cb = 0 \Rightarrow b = c \text{ 10 багцнаад } \Rightarrow$$

$$bc - cb = 72 \quad x = [0; 1] \Rightarrow abc \rightarrow 90$$

$$\left. \begin{array}{l} 86 - 08 \\ 91 - 19 \end{array} \right\} 18 \text{ багцнаад } 108$$



					1
					2
					3
					3
					2
					1

3 2 3 2 3

1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	2	3	2	3	3
3	2	3	2	3	3
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

3 2 3 2 3

11

$$x > 4$$

$$y > 10$$

$$\frac{10}{x} (x^4) = y$$

$$10x - 10 = xg$$

$$40 = (y - 10)x$$

$$10 + \frac{10 \cdot 2}{2} = y$$

$$10 + \frac{40}{2x} = y$$

$$10 + \frac{35}{x} = y$$

$$10x + 35 = yx$$

$$35 = (y - 10)x$$

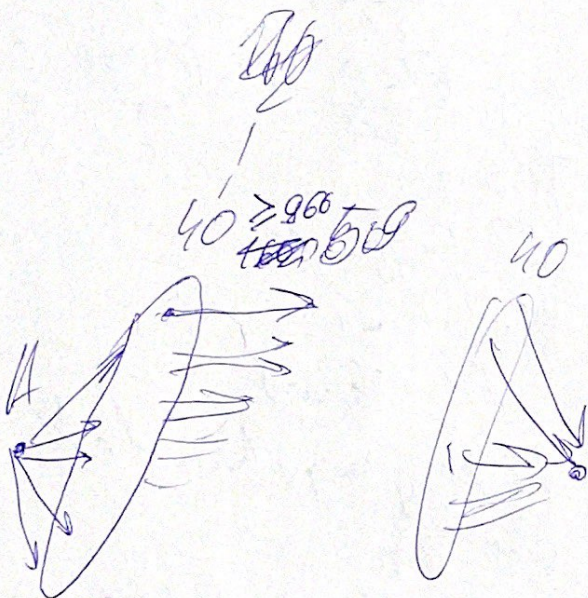
Амьд 5-ий 7

7 5 7

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_n$
 (under $a_1 \dots a_5$ is written "мужья", under $a_6 \dots a_n$ is written "мужья")

Черновики

есть мужья $\Rightarrow$ есть еще жена для 7 мам $\Rightarrow$
 есть еще 5 мужей. выберем среди них одного.
 наибольшая вероятность по сев. для А,
 найдется жена для мамы мам-вои
 и женов больше чем у А



$$1600 - 780$$

$$780 - 820$$

$$800 / 40 = 20$$

$$20 \cdot 39 = 20 \cdot 40 - 20 = 800 - 20 = 780$$

Лист 6 из 7

$$(x+y)(x+y+1) + 2y = 100. \quad \underline{\text{Упрощен}}$$

$$x^2 + 2xy + x + y^2 + 3y = 100$$

$$x^2 + (2y+1)x + y^2 + 3y - 100 = 0$$

$$D = (2y+1)^2 - 4(y^2 + 3y - 100) = 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 12y + 400 = 101 - 8y$$

$$x_{1,2} = \frac{-2y-1 \pm \sqrt{101-8y}}{2} \quad -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2x^2 + 4xy + 2x + 2y^2 + 6y = 200$$

$$(x+y)^2$$

$$x_1 + x_2 = -2y-1$$

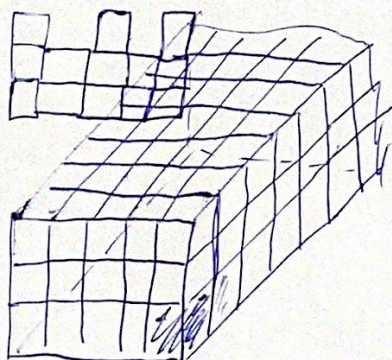
$$x_1 x_2 = y^2 + 3y - 100$$

$$-x_1(x_1 + 2y + 1) = y^2 + 3y - 100.$$

$$x_1^2 + (2y+1)x_1 + y^2 + 3y - 100 = 0.$$

$$x_3 + x_4 = -2y-1$$

$$x_3 \cdot x_4 =$$



$$x_1 x_2 =$$

$$-\frac{b + \sqrt{D}}{2a} \cdot -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$] t = x+y$$

$$t^2 + t + 2y = 100.$$

$$t_1 + t_2 = -1$$

$$t_1, t_2 = 2(y+50)$$

$$t \in \mathbb{N}, y, x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in \mathbb{N}.$$

$$t \in \mathbb{N}$$

$$t \leq 5 \Rightarrow t^2 \leq 25 \Rightarrow t^2 + t \leq 30 \Rightarrow$$

$$2y \geq 40 \Rightarrow y \geq 35$$

$$\text{even } t \leq 8 \Rightarrow t^2 + t \leq 77 \Rightarrow 2y \geq 28 \Rightarrow$$

$$y \geq 14 \Rightarrow t \leq 8 < 14 \leq y \Rightarrow t = y, \text{ no}$$

$$y, x \in \mathbb{N} \quad t = x + y \Rightarrow t > 4 \Rightarrow \text{приведем} \Rightarrow$$

$$t \geq 8 \Rightarrow t \geq 9$$

$$\text{even } t \geq 10 \Rightarrow t^2 + t \geq 110 \Rightarrow 2y \leq -10 \Rightarrow$$

$$y \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{приведем} \Rightarrow t < 10 \Rightarrow t \leq 9$$

$$9 \leq t \leq 9 \Rightarrow t = 9 \Rightarrow 81 + 9 + 2y = 100 \Rightarrow$$

$$y = 5 \Rightarrow x = t - y = 4.$$

$$\text{Sum } \underline{7} \text{ us } \underline{7}$$