51-95-86-82
(119.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математика
профиль олимпиады

Андриановой Анастасии Михайловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
51-95-86-82	119	21	21	21	21	21	14	X	X

Оценка 95 баллов

95 (зовнішню частина)

51-95-86-82

Черновик 1.

рем. зад.
1 +
2
3
4

126 пакетов

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

p. x непарних =101, y парних

$p^q + 3 = 2^{p-1} + q^p$

$x + y = 5x + 1$

$y = 4x+1$ $y=101$ $x=25$.

если $p \neq 2$ и $q \neq 2$, то

либо $p=2$ либо $q=2$

$p=2 \Rightarrow$

$1/3 + - 1/3 + 3 = 0$

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$1/3 - 1/3 = 1$

1 4 9

$2^q + 1 = q^2$ $\vdots 3$

$1 : 9$

$a_n = a_{n-3} + 3a_{n-1} - 3a_{n-2}$

$q=2 \Rightarrow$

$q=3$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 + 3 = 2^p + 2^{p-1}$

$2^{p-1} \vdots 3$

$p^2 \vdots 3$

$p=3$

(2; 3)

(3; 2)

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$

1 1 25 25 25 25 101

101 пакет пустой.

$n=4$ $b_n \cdot 1 = 2 \cdot 2^3$ $b_4 = 2^4$

5.

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_1 = 2$ $b_2 = 1$ $b_3 = 2$ $b_4 = 2^4$ $b_5 = 2^8$.

Черновик 2

~~Покорми Воробьёвы корм~~

11 – 10 3 – Б – 1

О – 5 +0-4 А – первого

П – ~~0~~ Боря – второй.

К – 1

Р – 3 +0-2 11 групп букв. 0 2 Б – 1 А

И – 1 2 3

В – 2 +0-1 4 повтор. буквы. 3 2 – 1 Б

Б – 1 2 2 2

Ь – 1 А – чтобы было нечетно 2 – За нем. 2

Е – 1 Боря – чтобы четно. 2.

Ы – 2 +0-1 ~~т.е все группы~~ Б 3 Б 2 2.

Г – 1 4 повт. буквы. 7+

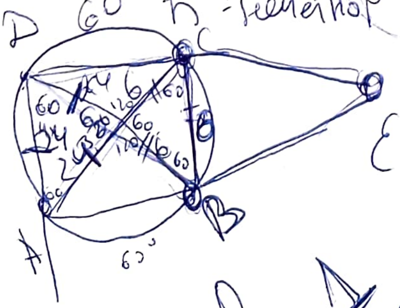
А 5 – 4 = 1

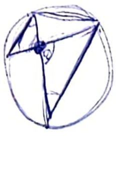
12 групп

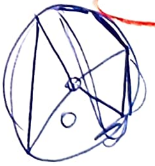
А → четно

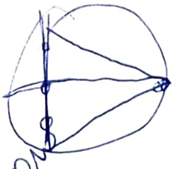
Б – нечетно

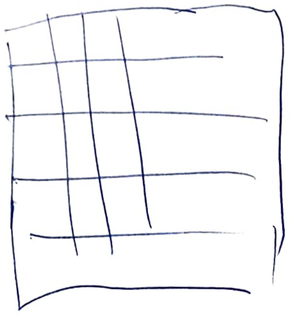
О, Р, В, Ы











0 19 всего

19 → 11 A

51-95-86-82 (119.1)

Чистовик 1:

Задача 1:

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

Если $p \neq 2$ и $q \neq 2$, то p и q - нечетные.

$2^{p-1} \geq 2^{3-1} = 4$

$p^q - q^p + 3 \,\vdots\, 4$

$p^q - q^p \underset{4}{\equiv} 1$

Т.к. p и q - нечетные, то

$\left[\begin{array}{l} p \underset{4}{\equiv} 1 \\ p \underset{4}{\equiv} -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} q \underset{4}{\equiv} 1 \\ q \underset{4}{\equiv} -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} p^q \underset{4}{\equiv} 1 \\ p^q \underset{4}{\equiv} -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} q^p \underset{4}{\equiv} 1 \\ q^p \underset{4}{\equiv} -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} p^q - q^p \underset{4}{\equiv} 1-1 \underset{4}{\equiv} 0 \\ p^q - q^p \underset{4}{\equiv} -1-1 \underset{4}{\equiv} 2 \\ p^q - q^p \underset{4}{\equiv} 1-(-1) \underset{4}{\equiv} 2 \\ p^q - q^p \underset{4}{\equiv} -1-(-1) \underset{4}{\equiv} 0 \end{array}\right.$

~~Но по ус~~ Но $p^q - q^p \underset{4}{\equiv} 1$

Значит, либо $p = 2$, либо $q = 2$, либо $p = q = 2$.

1) $p = q = 2$ $\quad 2^2 - 2^2 + 3 = 2^1$ - неверно

2) $p = 2$ $\quad 2^q - q^2 + 3 = 2^1$ $\quad q^2 = 2^q + 1$

$q^2 \underset{3}{\equiv} 0$ или $q^2 \underset{3}{\equiv} 1$ Значит $\left[\begin{array}{l} 2^q + 1 \underset{3}{\equiv} 1 \\ 2^q + 1 \underset{3}{\equiv} 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^q \,\vdots\, 3 \text{ - ложное} \\ 2^q \underset{3}{\equiv} 2 \text{ -} \end{array}\right.$

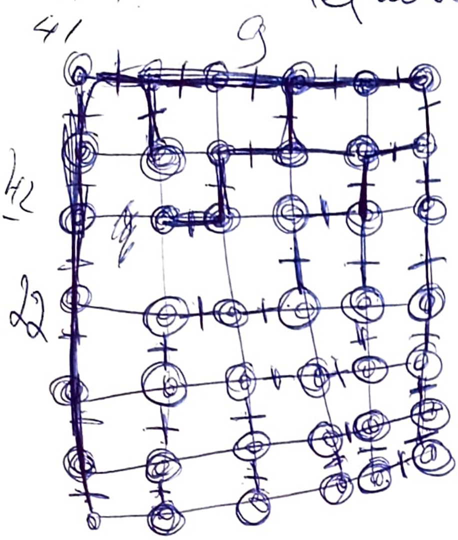
Значит, $q^2 \underset{3}{\equiv} 0$, т.к. q - простое, то $\underline{q = 3}$

3) $q = 2$ $\quad p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$ $\quad p^2 + 3 = 2^{p-1} \cdot 3$

$p^2 \,\vdots\, 3$, т.к. p - простое, то $\underline{p = 3}$

Ответ: 1) $p = 2, q = 3$; 2) $p = 3, q = 2$.

6x7 Черновик 3.



дерево должно быть вершин.

$23 \cdot 10 - 230$

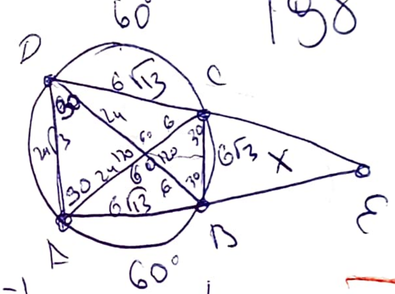
значит $n-1$ ребро есть. 229.

$220 + 9 \cdot 23 \cdot 207$

$427 - 229 =$

198

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$



$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 1$

$a_n + 3a_{n-2} = a_{n-3} + 3a_{n-1}$

$A^2 = 24^2 + 6^2 - 2 \cdot 24 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

$6^2 \cdot 4^2 + 6^2 - 6^2 \cdot 4$

$-6^2 \cdot 13$

$a_4 = 4$

$a_5 = 9 \quad a_6 = 16 \quad a_7$

$a_n = 3\cancel{x}^2 - 3(x-1)^2 + (x-2)^2$

$a_n = 3x^2 - 3x^2 + 6x - 3 + x^2 - 4x + 4 = (x+1)^2$

$a_n = (n-2)^2 \quad b_{2023} = 2^{a_{2023}} = 2^{(2023-2)^2}$

$= 2^{2021^2}$

$a_7 = 3 \cdot 16 - 3 \cdot 9 + 4 = 48 - 27 + 4 = 25$

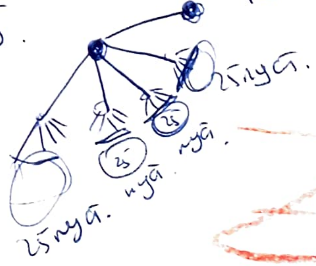
x пустых y непустых

$x + y = 5y + 1$

$\overset{=101}{x} = 4y + 1 \quad y = 25$

126

101



51-95-86-82 (119.1)

Чистовик 2

Задача 4:

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

Т.к. b_1, b_2 и b_3 – степени двойки, то очевидно, что остальные члены последовательности также будут степенями двойки.

Тогда возьмём такую последовательность (a_n), что $b_n = 2^{a_n}$

$a_1 = 1$ $a_2 = 0$ $a_3 = 1$.

И из этой формулы $b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

получим $a_n + 3a_{n-2} = a_{n-3} + 3a_{n-1}$

$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

Найдём $a_4 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 1 = 4$

$a_5 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 + 0 = 9$

$a_6 = 3 \cdot 9 - 3 \cdot 4 + 1 = 16$

Заметим, что у нас получаются квадраты.

~~Проверим~~, всегда ~~ли~~ так будет по индукции
докажем, что

Предположим для всех $k<n$ $a_k = (k-2)^2$, докажем, что

$a_{\cancel{k+1}\,n} = (\cancel{k+1}\,n-2)^2$

~~$a_{k+1} = 3a_k - 3a_{k-1} + a_{k-2}$, $a_{k+1} = 3 \cdot k^2 - 3k^2 + 6k - 3 + k^2 - 4k + 4 =$~~

~~$= k^2 + 2k + 1$~~

$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$; $a_n = 3 \cdot (n-3)^2 - 3(n-4)^2 + (n-5)^2 =$

Чистовик 3

Задача 4 (Продолжение):

$a_n = \cancel{3n^2} - 18n + 27 - \cancel{3n^2} + 24n - 48 + n^2 - 10n + 25 =$

$= n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$

Значит, для всех $n \in N$ $a_n = (n-2)^2$

Тогда $b_n = 2^{a_n} = 2^{(n-2)^2}$

$b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{2021^2}$

Ответ: $b_{2023} = 2^{2021^2}$

Задача 2:

Представим наш город в виде графа, где перекрестки - вершины, а отрезки улиц или проспектов между соседними перекрестками - ребра.

В графе у нас $10 \cdot 23 = 230$ вершины.

И нам необходимо понять, какое наибольшее число рёбер можно выкинуть, чтобы граф остался связным.

Для этого воспользуемся известным утверждением, что наименьшее количество рёбер в связном графе на n вершин-

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик к Задаче 2 (Продолжение):

- $n-1$, то есть в нашем графе должно остаться хотя бы 229 рёбер (такое возможно, когда граф является деревом.

Теперь построим пример.

Все участки, кроме 229 проведенных на рисунке можно закрыть.

Остальные $23 \cdot 9 + 10 \cdot 22 - 229 = 198$ участок можно закрыть на ремонт

Ответ: можно закрыть максимум 198 участков.

Чистовик 5:

Задача 3:

Пусть есть x пустых пакетов и y непустых, тогда $x=101$

Общее количество пакетов равно $x+y$.

Но также каждый пакет, который у нас есть (кроме самого большого) лежит в одном из непустых пакетов, и в каждом непустом ровно 5 пакетов, т.е. всего пакетов $5y+1$ (по 5 пакетов в каждом непустом и еще 1 самый большой)

$x+y=5y+1$

$x=\cancel{5}^{4}y+1$

$4y=101-1$

$y=25$ $x+y=101+25=126$ пакетов

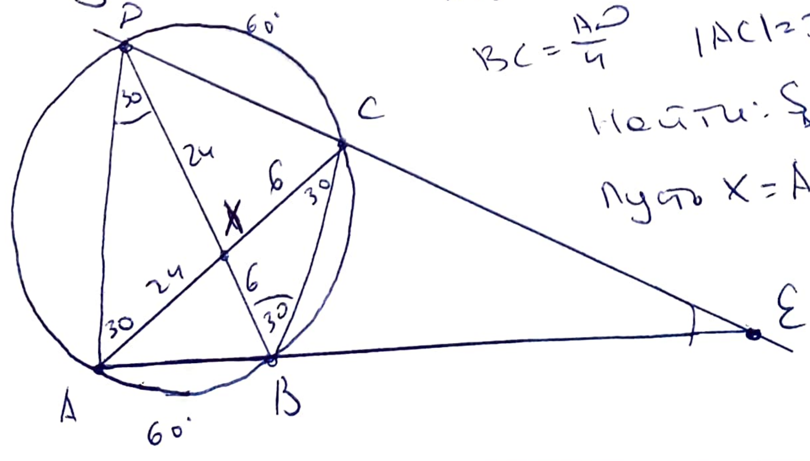
Ответ: 126 пакетов.

Задача 6: $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ $BC \parallel AD$

$BC=\frac{AD}{4}$ $|AC|=30$

Найти: S_{ADE}

Пусть $X=AC \cap BD$



Чистовик 6

Задача 6 (Продолжение):

Т.к. $AD \parallel BC$, то $\angle ADB = \angle DBC$ – как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD

$\angle ADB = \frac{1}{2} \breve{AB} = 30°$

Тогда $\angle DBC = 30°$ и $\breve{CD} = 60°$

$\angle DAC = \frac{1}{2} \breve{CD} = 30°$ и $\angle ACB = \frac{1}{2} \breve{AB} = 30°$

$\triangle AXD \sim \triangle BXC$ по 2 углам

~~Т.к.~~ ~~AD~~ Поэтому $\frac{AD}{BC} = \frac{AX}{BX} = \frac{XD}{XC}$

Т.к. $\frac{AD}{BC} = 4$, то $\frac{AX}{BX} = \frac{XD}{XC} = 4$

Также заметим, что $\triangle AXD$ и $\triangle BXC$ – равнобедренные (есть два угла по 30°), поэтому

$AX = DX$ и $CX = BX$

$\frac{AX}{BX} = \frac{AX}{CX} = 4$

$AX = 4CX$

$AX + CX = AC = 30$

$5CX = 30$ ~~BX~~ $CX = 6$, $AX \overset{=DX}{=} 24$

$\angle AXD = \angle BXC = 180° - 30° - 30° = 120°$ – вертикальные углы

$\angle DXC = \angle AXB = \frac{1}{2}(\breve{CD} + \breve{AB}) = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$

$S_{ABCD} = S_{\triangle AXD} + S_{\triangle DXC} + S_{\triangle CXB} + S_{\triangle AXB}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 \cdot \sin 120° + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 6 \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120° +$

$+ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 24 \cdot \sin 60°$

Чистовик 7

Задача 6 (Продолжение):

$\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ (24^2 + 2 \cdot 24 \cdot 6 + 6^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} (24+6)^2 =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 30 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

$\triangle BEC \sim \triangle AED$ ($\angle E$-общий; $\angle ECB = \angle EDA$, т.к $AD \parallel BC$)

~~П.к.~~ Тогда $\frac{BE}{AE} = \frac{EC}{ED} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{4}$; $\frac{AE}{BE} = 4$ $\frac{ED}{EC} = 4$ $\frac{AE \cdot ED}{BE \cdot EC} = 16$

$S_{\triangle AED} = AE \cdot ED \cdot \sin\angle E$ $S_{\triangle BEC} = BE \cdot EC \cdot \sin\angle E$

$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{AE \cdot ED \cdot \cancel{\sin\angle E}}{BE \cdot EC \cdot \cancel{\sin\angle E}} = 16$

$S_{\triangle AED} = 16 S_{\triangle BEC}$

$S_{\triangle AED} - S_{\triangle BEC} = S_{ABCD}$

$15 S_{\triangle BEC} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

$S_{\triangle BEC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Тогда $S_{\triangle AED} = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Ответ: $S_{\triangle AED} = 8\sqrt{3}$.

Чистовик 8

Задача 5:

Посчитаем, сколько каких букв содержится в этой надписи

О - 5
Р - 3
В - 2
И - 2

п, к, и, б, ь, е, г - 1 раз

Алисе, чтобы выиграть, надо, чтобы суммарно было сделано нечётное число ходов, а Боре - наоборот - чётное.

Т.к. зачеркивая буквы п, к, и, б, ь, е, г все ровно будет сделано 7 ходов, то тогда Алисе нужно, чтобы все буквы О, Р, В, И зачеркнули за чётное число ходов, а Боре, чтобы за нечётное.

Пусть Алиса изначально зачеркнёт букву (или любую др. букву, которая повторяется 1 раз) а затем она будет зеркалить действия Бори, а именно:

1) Если Боря зачеркивает букву, встречающуюся 1 раз, Алиса зачеркивает др. такую букву.

Чистовик 11

Задача 2 (Дополнение):

В доказательстве я использовала тот факт, что наименьшее количество ребёр в связном графе на n вершин – n-1.

Докажем это, пусть есть граф на n вершин с кол-вом ребёр меньше n-1. Тогда в нём наверняка есть вершина степени 1 (т.к. иначе бы в нем было бы хотя бы n ребёр)

Удалим эту вершину. У нас остается граф на n-1 вершину с n-3 ребрами т.к. из удаленной вершины шло только 1 ребро, то полученный граф должен быть связным. И в нем также наверняка есть вершина степени 1. Удалим ее и будем продолжать так и далее. В конце у нас останется граф на 2 вершины и 0 ребер, который должен быть связным, но он не связный. Значит, в связном графе на n вершин хотя бы n-1 ребро.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

51-95-86-82 (119.1)

Чистовик 9

Задача 5 (Продолжение):

~~1) Если Боря~~
Назовём буквы О и Р - большими, а В и Ы маленькими

2) Если Боря зачеркнул 1 или 2 одинаковые маленькие буквы, то Алиса зачеркивает столько же, но ~~другую~~ вторую маленькую букву

3) Если Боря зачеркнул все повторения какой-то большой буквы (т.е. все 5 'О' или все 3 'Р'), то Алиса зачеркивает все повторения второй большой буквы

4) Если Боря зачеркивает НЕ все повторения какой-то большой букв., то Алиса делает так, чтобы повторений двух больших букв было поровну.

Таким образом, т.к. букв, встречающихся по 1 разу после 1-ого хода Алисы

Чистовик 10

Задача 5 (Продолжение):

осталось четное число, т.е. 6. и больших и маленьких букв также четное число, значит ~~то~~ если Боря сможет сделать ход, то и Алиса его сможет сделать.

Таким образом, у Алисы есть выигрышная стратегия.

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!“ Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему

ученицы 9 класса МБОУ „Лицей №33“ г. Иваново

Анастасии Михайловны Андриановой

В повышении оценки отказать

апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (95) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что 6 задача, которая оценена у меня в неполный балл, решена мною полностью правильно и в результате получен правильный ответ, поэтому она должна быть оценена большим баллом