0 706715 090007

70-67-15-09
(123.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Абдуллоева Элина Алиевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
70-67-15-09	100	20	20	20	20	10	10		

70-67-15-09
(123,4)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 100 (сто)

N 1 Чистовик

$$1-\sqrt{2}\cos(x)\left(\sin(x)+2\cos(x)\right)+\sqrt{2}\sin(x)\left(2\sin(x)-\cos(x)\right)=2\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$$

$$\cancel{1}-\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)-2\sqrt{2}(\cos(x))^2+2\sqrt{2}(\sin(x))^2-\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)=\cancel{1}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-2\sqrt{2}\left((\cos(x))^2-(\sin(x))^2\right)-\sqrt{2}\cdot 2\sin(x)\cos(x)=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-2\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\sqrt{2}\cos(2x)+\sqrt{2}\sin(2x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

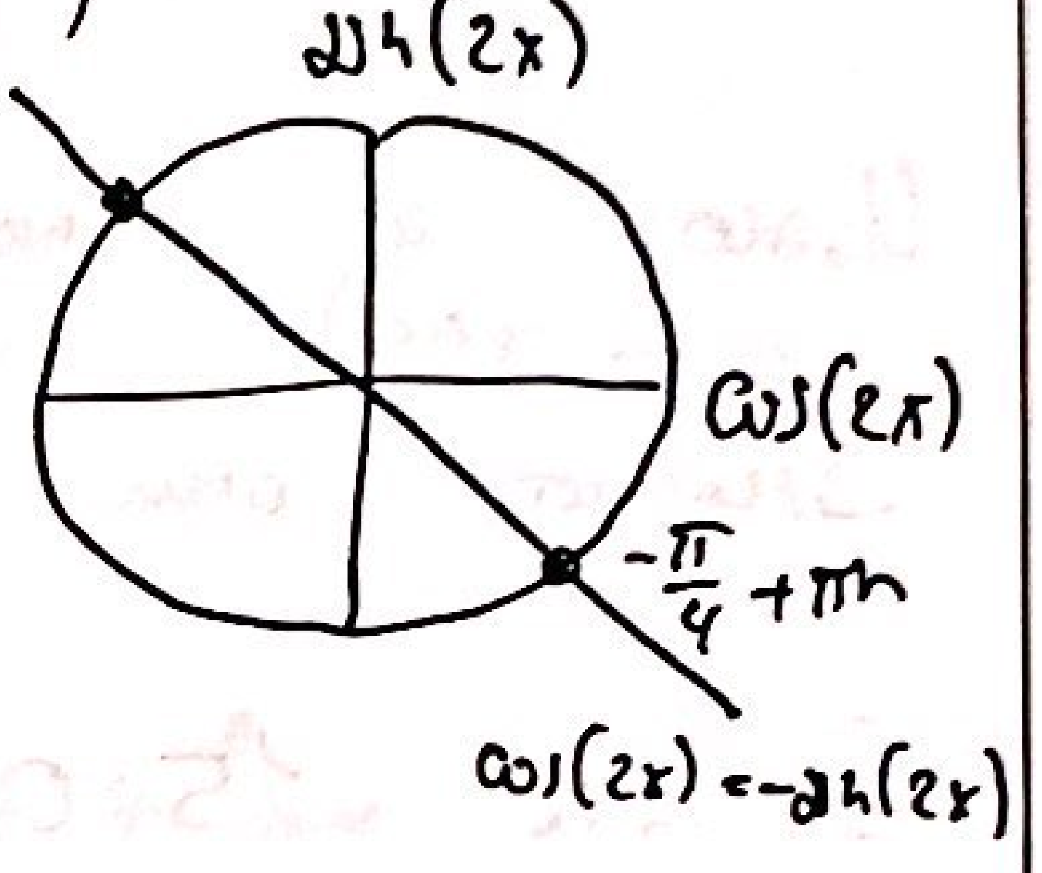
$$2\sqrt{2}\cos(2x)+\sqrt{2}\sin(2x)=\cos(2x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(2x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\sqrt{2}\cos(2x)+\sqrt{8}\sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)$$

$$2\cos(2x)-\frac{1}{2}\cos(2x)=-\sin(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\frac{3}{2}\cos(2x)=-\frac{3}{2}\sin(2x) \Leftrightarrow \cos(2x)=-\sin(2x)$$

$$\cos(2x)+\sin(2x)=0$$



Заметим, что $\cos(2x)=0$ не подходит, разделим на $\cos(2x)$

$$1+\operatorname{tg}(2x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x)=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$.

N 2 Пусть t – время (причём 12:00 считаем нулевым моментом времени) в часах.

v – скорость велосипедиста, $2v$ – скорость мотоциклиста.

Не умаляя общности, примем расстояние между пунктами A и B за 1 км. Рассмотрим 4 случая:

1) Пусть велосипедист выехал в 12:00 и не останавливался.

Тогда $\frac{1}{2v}+1+2=\frac{1}{v}=t$ (общее время движения с 12:00).

$\frac{1}{v}\left(1-\frac{1}{2}\right)=3 \Rightarrow 3v=\frac{1}{2} \Rightarrow v=\frac{1}{6}$. Тогда $t=\frac{1}{v}=6$ ч.

2) Пусть велосипед выехал в 12:00 и сделал остановку на 2 ч. Тогда велосипед суммарно ехал на час меньше ~~велосипеда~~ мотоцикла. Это невозможно, потому что мотоцикл едет в 2 раза быстрее.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

3) Пусть велосипедист выехал в 13:00 и сделал остановку. Тогда его время движения (без остановок) будет на 3 часа меньше, чем у мотоцикла. Это невозможно.

4) Велосипед выехал в 12:00, а мотоциклист сделал остановку. Тогда: $1+\frac{1}{v} = 2+\frac{1}{2v} = t$

$$\frac{1}{v}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1+\frac{1}{2} = 3 \text{ ч.}$$

Итого: из пунктов 1-4 получим, что $\left[\begin{array}{l} t=6 (ч) \\ t=3 (ч) \end{array}\right.$

Значит, они прибыли в B в 15:00 или 18:00

Ответ: 15:00 или 18:00.

№3 Пусть $x^3+a_0x^2+b_0x+c_0=0$ — исходное уравнение

Запишем теорему Виета: $\begin{cases} -a_0 = x_1+x_2+x_3 \\ b_0 = x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \\ -c_0 = x_1x_2x_3. \end{cases}$

7

Пусть $x^3+ax^2+bx+c=0$ — искомое уравнение.

Аналогично по теореме Виета:

$-a = (x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_2+x_3) = 2(x_1+x_2+x_3)$

$b = (x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_3)(x_2+x_3) =$

$= x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+$

$+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$

$-c = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

Пусть $x^3+a_0x^2+b_0x+c_0 = f(x)$. Подставляя уравнения из теоремы Виета до $f(x)$, получим:

$-a = 2(x_1+x_2+x_3) = -2a_0 \Rightarrow a = 2a_0$

70-67-15-09
(123.4)

Чистовик

$b = (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a_0^2 + b_0 \Rightarrow b = a_0^2 + b_0$

$-c = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) = ((x_1+x_2+x_3) - x_3)((x_1+x_2+x_3) - x_2)((x_1+x_2+x_3) - x_1) =$

$= ((-a_0) - x_1)((-a_0) - x_2)((-a_0) - x_3) = f(-a_0) = \cancel{-a_0^3 + a_0 a_0^2} - a_0b_0 + c_0$

$c = a_0b_0 - c_0.$

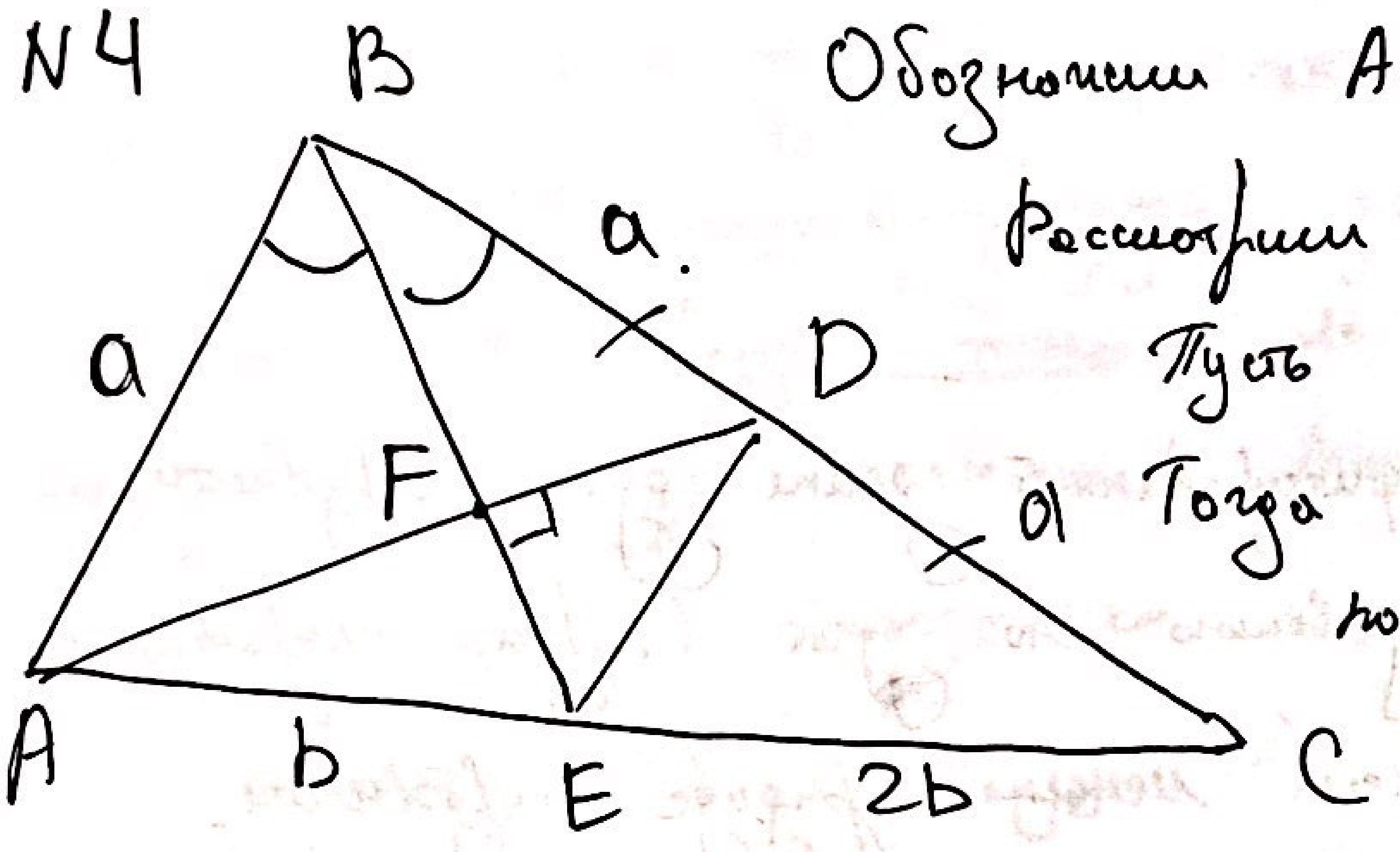
Итого: $\begin{cases} a = 2a_0 \\ b = a_0^2 + b_0 \\ c = a_0b_0 - c_0. \end{cases}$

$x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$ – исходное уравнение,
тогда $a_0 = 6,\ b_0 = 7,\ c_0 = 1$

Тогда $a = 2a_0 = 12,\ b = a_0^2 + b_0 = 43,\ c = a_0b_0 - c_0 = 41$

Ответ: $a = 12,\ b = 43,\ c = 41.$

N4



Обозначим $AB = a,\ AE = b,\ AD = m.$

Рассмотрим $\triangle ABD$:
Пусть F – точка пересечения BE, AD.
Тогда $\angle ABF = \angle FBD$, $BF \perp AD$ по условию. BF – биссектриса и высота, тогда $\triangle ABD$ равнобедренный,

$AB = BD = a.$ AD – медиана, $BD = DC = a$

В $\triangle ABC$ BE – биссектриса. По свойству биссектрисы

$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$. Поскольку $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, то $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ -

Поскольку $AE = b$, то $EC = 2b$

Длина биссектрисы $BE = \sqrt{AB \cdot BC - AE \cdot EC} = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$

Длина медианы $AD = \sqrt{\frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{(3b)^2}{2} - \frac{(2a)^2}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{9}{2}b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{9}{2}b^2 - \frac{a^2}{2}}$. Поскольку по условию $AD = BE$,

то $2a^2 - 2b^2 = \frac{9}{2}b^2 - \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{8}a^2 = \frac{13}{8}b^2 \Rightarrow b = a\sqrt{\frac{5}{13}}$

Тогда $AD = BE = m = \sqrt{2a^2 - 2b^2} = \sqrt{2a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{5}{13}} = a\frac{4}{\sqrt{13}}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

Обозначим за S площадь. Тогда

$$\frac{S_{\Delta EDC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{CE}{CA}\cdot\frac{CD}{CB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}S_{ABDE},$$

поскольку $S_{\Delta ABC} = S_{ABDE} + S_{\Delta EDC}$

$$S_{ABDE} = \frac{AD\cdot BE\cdot \sin(\angle BFD)}{2} = \frac{m^2}{2},$$ так как $\angle BFD = 90^\circ$.

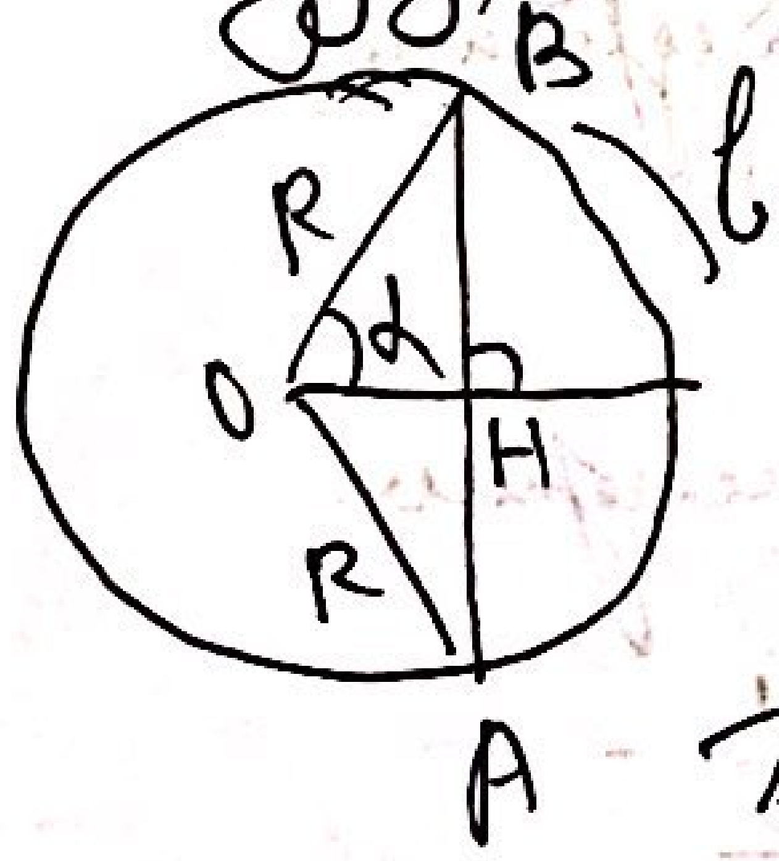
$$S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}S_{ABDE} = \frac{3}{4}m^2 = \frac{3}{4}\cdot\left(a\frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{13}a^2 = \frac{12}{13}a^2$$

~~Д~~По условию $AB = a = \sqrt{26} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{12}{13}a^2 = \frac{12}{\cancel{13}}\cdot\overset{2}{\cancel{26}} = 24$

Ответ: 24.

N5

1) Докажем, что при фиксированной длине дуги окружности ~~отрезок~~ длина отрезка, образованного этой дугой (хорды, опирающейся на дугу) тем меньше, чем меньше радиус окружности.



Доказательство:

Пусть AB - рассматриваемая дуга, обозначим её длину за $2l$. O - центр окружности радиусом R.

Пусть $OH \perp AB$, $\alpha = \angle BOH$.

Половина дуги AB $l = R\alpha. \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R}$

Длина хорды $AB = 2\cdot BH = 2R\sin(\alpha) = 2R\sin(l/R)$

Минимизация AB эквивалентна минимизации $BH = R\sin(l/R)$

Тогда минимизируем $\frac{BH}{l} = \frac{R}{l}\sin\left(\frac{l}{R}\right)$. Пусть $x = R/l$

$\frac{BH}{l} = f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

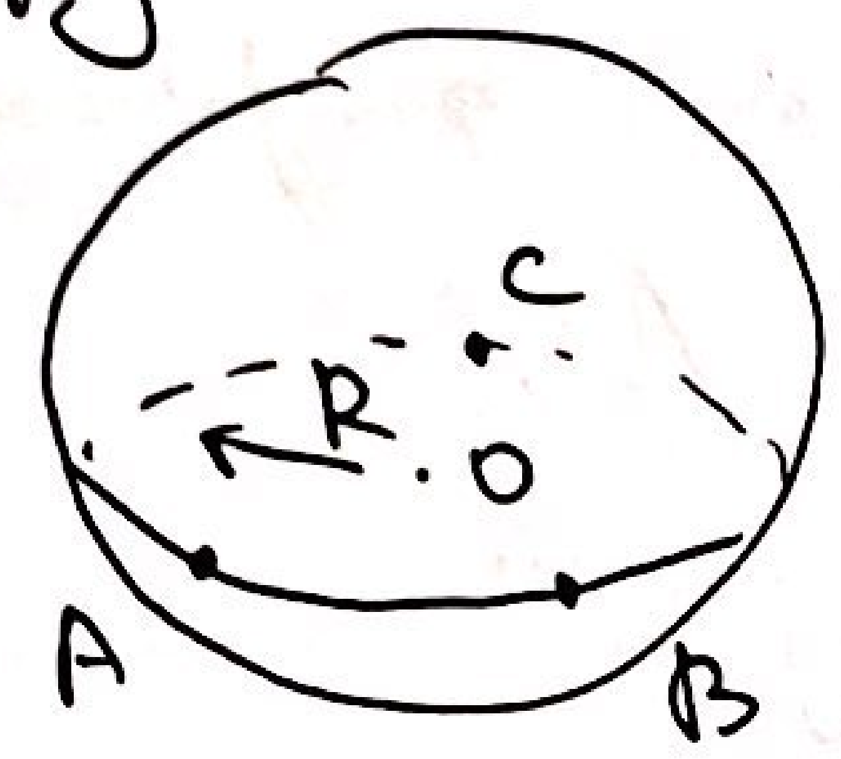
Заметим, что $l \leq \frac{\pi R}{2}$ (это половина дуги AB).

Тогда $x \geq \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2}$. Поскольку R, l положительны, то $\frac{1}{x} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, $\cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

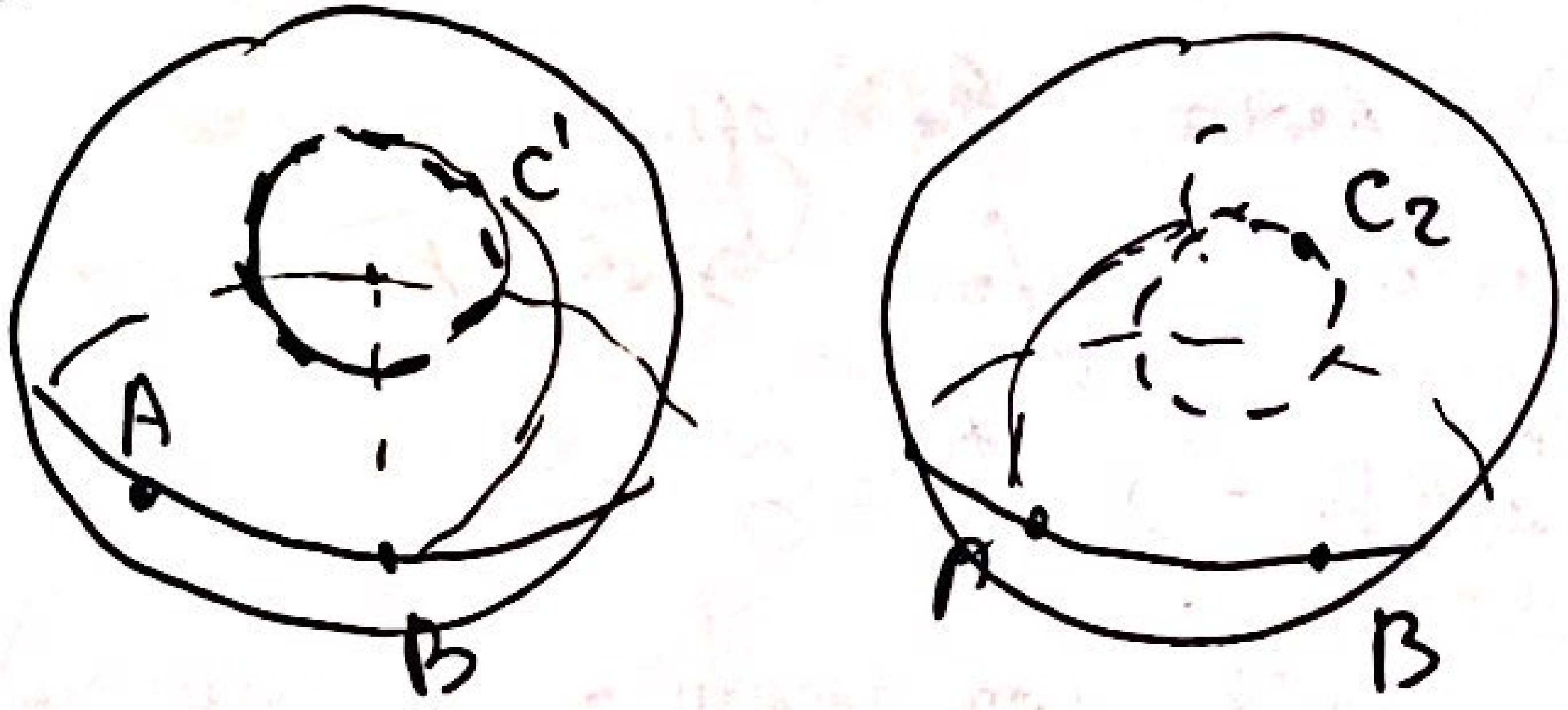
Чистовик

Тогда $f'(x) > 0$, то есть с увеличением x $\frac{BH}{b}$ растёт
$x = R/b$, то есть BH увеличивается с ростом R.
Это значит, что чем меньше радиус окружности, тем меньше длина хорды AB. Что и требовалось доказать.

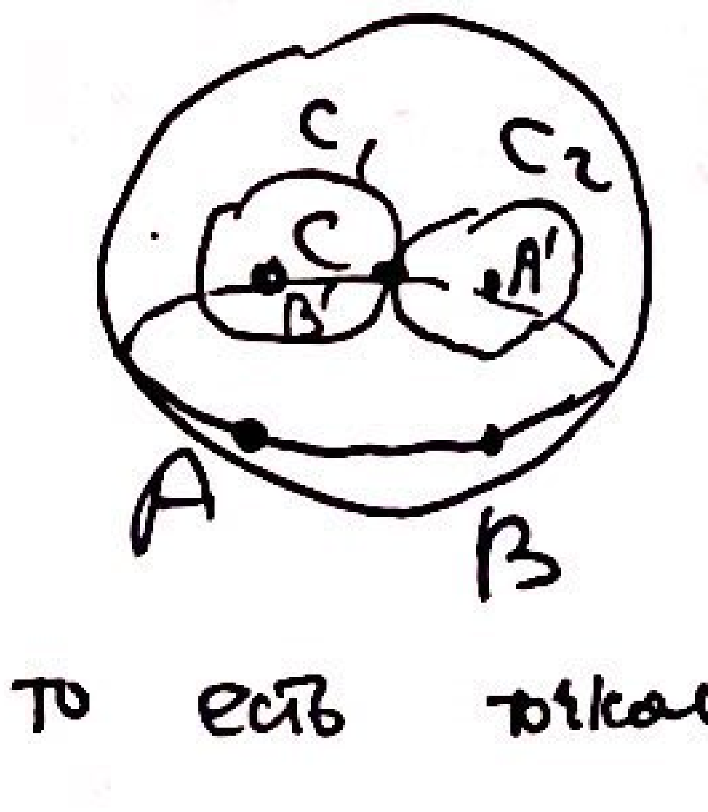
г) Докажем, что три точки A, B, C на сфере образуют хорды минимальной длины (AB, AC и BC) в том и только в том случае, когда если длины их дуг зафиксированы A, B, C находятся на окружности, проходящей через центр сферы. Доказательство:



Рассмотрим случай, когда A, B, C лежат на одной окружности с центром в O.
Предположим, что найдётся ~~за~~ сфера меньшего радиуса, для которой длины дуг AB, AC и BC будут такими же, а $AB+BC+BC$ (периметр ΔABC) будет меньше. Мысленно зафиксируем ~~точки~~ расстояние между A, B. ~~Геометр~~ Геометрическое место точек C_1 на сфере, для которых BC (длина дуги BC) константна – окружность.



Чем меньше R (начиная с R, когда A, B, C и O лежат в одной плоскости), тем меньше радиус окружности, являющегося геометрическим местом точек C_1, потому что уменьшается расстояние BB', где B' – точка на сфере, противоположная B. ~~Пусть~~ ~~K_{C_2}~~ – геометрическое место точек C_2 на сфере, когда AC (длина дуги) константна, – тоже окружность. В случае, когда A, B, C, O лежат в 1-й плоскости окружности (геометрическое место C_1 и C_2) касаются в точке C. При уменьшении R радиус этих двух окружностей будут уменьшаться, но расстояние между их „сферическими" центрами, то есть точками A' и B' равно $AB = A'B'$.



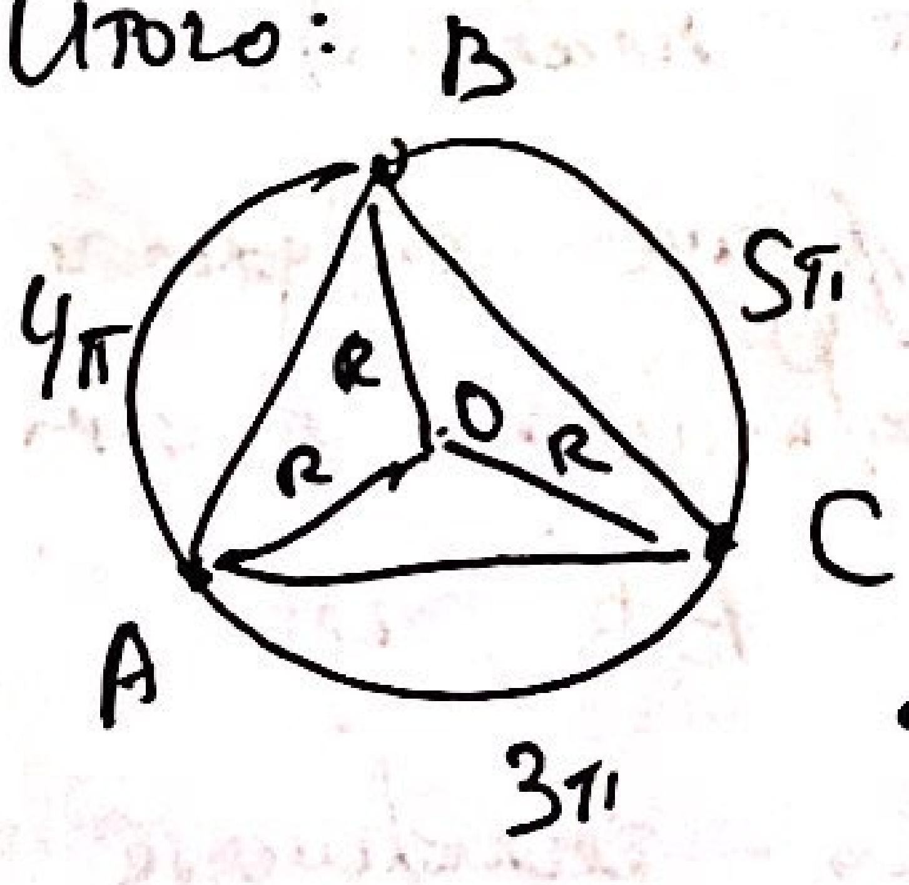
Чистовик

Поскольку длина дуги AB зафиксирована, то и A'B' (дуга) тоже зафиксирована. Следовательно, при уменьшении радиуса R эти две окружности перестанут касаться, не будут иметь общих точек. Это значит, что точка C не может существовать, то есть длина дуг AC и BC не могут быть зафиксированы одновременно. Следовательно, случай минимально возможного радиуса, при котором AC, AB и BC (длина дуг) фиксированы достигается только при таком случае, когда A, O, B, C лежат в одной плоскости. Что и требовалось доказать.

3) Из 1-го пункта получаем, что AB, BC и AC минимальны, если R минимально, тогда периметр $\triangle ABC$ минимален только при минимальном R.

Во 2-м пункте доказано, что минимальное R — случай, когда A, B, C, O лежат в одной плоскости.

Итого:



Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью.

$$4\pi + 5\pi + 3\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 6$$

(Здесь длина дуг в плоскости сечения являются сферическими расстояниями).

Поскольку длины дуг пропорциональны центральному углу, то $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 150^\circ$.

$AC = R\sqrt{2}$, $BA = R\sqrt{3}$, $BC = 2R\sin(75^\circ)$ (если опустить перпендикуляр из O на BC)

$\sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \Rightarrow AB + BC + AC = 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$, что достигается при $R = 6$.

Ответ: $9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$.

Чистовик.

N6 Рассмотрим несколько случаев:

1) $\sigma(N) = 1697$. $d_1 d_{1697} = N = d_2 d_{1696} \Rightarrow d_3 d_4 d_{1696} d_{1697} > N^2$.

Пусть $N = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{b_n}$, a_i – простые числа, $b_i \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$

Тогда $\sigma(N) = (b_1+1)(b_2+1)(b_3+1) \cdot \ldots \cdot (b_n+1)$.

Поскольку 1697 не имеет простых делителей до $\sqrt{1697}$, оно является простым (проверил в черновике).

Тогда единственным разложением $\sigma(N)$ является $b_1 = 1696$.

Тогда $\sigma(N^3) = 1696 \cdot 3 + 1 = 5089$

2

2) $\sigma(N) = 1699$. Поскольку 1697 не имеет простых делителей, меньше $43 > \sqrt{1699}$, это число является простым.

Тогда (аналогично 1-му пункту) число $N = a_1^{1698} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = 1698 \cdot 3 + 1 = 5095$, это подходит, поскольку

$d_1 d_{1699} = N = d_2 d_{1699} = d_3 d_{1697} = d_4 d_{1696} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_3 d_4 d_{1696} \cdot d_{1697} = N^2$.

2

3) Если $\sigma(N) > 1699$, то $d_3 d_{1697} < N$, $d_4 d_{1696} < N$,

поскольку $d_1 d_{1699} < N$, $d_2 d_{1698} < N$. Тогда

$d_3 d_4 d_{1696} d_{1697} \cancel{\geq} N^2$, не подходит.

4) Если $\sigma(N) < 1697$, то нет d_{1697}, не подходит.

5) Если $\sigma(N) = 1698$, то $d_1 d_{1698} = d_3 d_{1696} = d_4 d_{1695} = N$,

Тогда $d_3 d_4 d_{1696} d_{1697} \geq N^2$ выполняется, подходит.

$1698 = 2 \cdot 3 \cdot 283$. Поскольку 283 не имеет простых делителей до $19 = 361 > 283$, то 283 – простое.

Тогда N имеет вид: $a_1^1 a_2^2 a_3^{282}$, $a_1^5 a_2^{282}$, $a_1^2 a_2^{565}$, $a_1^1 a_2^{848}$.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$1696 \times 3 = 5088$

$1699 \,|\, 7$: -14, 29, -28, 19; 24

$1699 \,|\, 11$: -11, 59, -55, 49; 15

$1699 \,|\, 13$: -13, 39; 1

$1699 \,|\, 17$: -153, 169

$17 \times 9 = 153$

$1699 \,|\, 19$: -158, 119; 8

$1699 \,|\, 23$: -161, 89; 7

$1699 \,|\, 29$: -145, 249

$1699 \,|\, 31$: -155, 149

$1699 \,|\, 37$: -138, 319, -317

$1699 \,|\, 41$: -127, 469, -407

$1699 \,|\, 43$: -129, 409

$1698 \times 3 = 5094$

$565 \times 3 = 1695$

~~$1688 \,|\, 6$: -12, 48, -48, 18; 273~~

~~$273 \times 6 = 1638$~~

$1698 \,|\, 6$: -12, 49, -48, 18; 283

$283 \times 6 = 1698$

$282 \times 3 = 846$

$283 \,|\, 7$: -28

$283 \,|\, 4$

$283 \,|\, 13$: -26, 23; 2

$283 \,|\, 17$: -17, 113; 1

$17 \times 5 = 85$

$283 \,|\, 19$: -19, 93; 1

283

2·3·283

$283 \times 2 = 566$

$283 \times 3 = 849$

$848 \times 3 = 2444$

$282 \times 3 = 846$

2·3·283 6·283 3·566 2·849

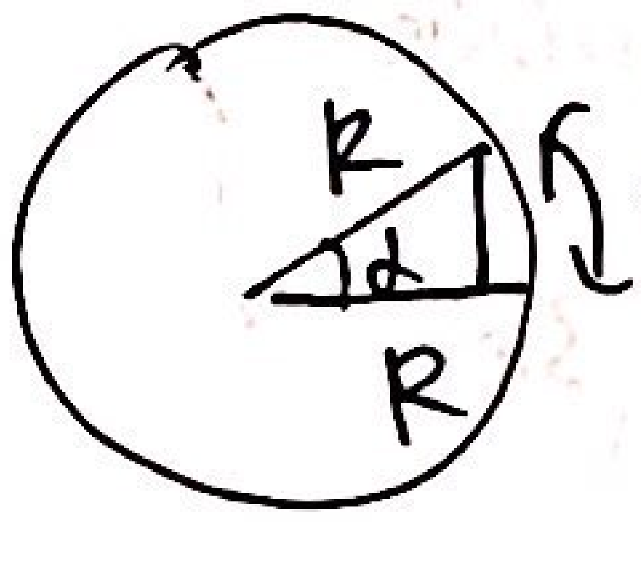
N $a_1^1 a_2^2 a_3^{282}$ $a_1^5 a_2^{282}$ $a_1^2 a_2^{565}$ $a_1^1 a_2^{848}$

N^3 $a_1^3 a_2^6 a_3^{846}$ $a_1^{15} a_2^{846}$ $a_1^6 a_2^{1695}$ $a_1^3 a_2^{2444}$

б 4·7·847 16·847 7·1696 4·2444

$847 \times 28 = 6776$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!



$l = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R}$

Цфловых

$\frac{d}{l} = \frac{R\sin(\alpha)}{l} = \frac{R\sin\left(\frac{l}{R}\right)}{l}$ $\frac{\cancel{A}}{R}$

Z

$\frac{d}{l} = \frac{R}{l}\sin\left(\frac{l}{R}\right)$. $x = \frac{R}{l}$.

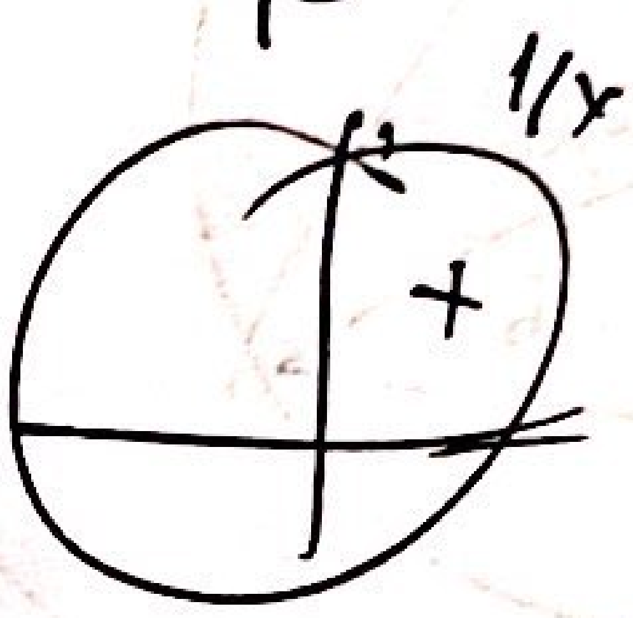
$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)\frac{1}{x^2} =$

$= \sin(1/x) + \frac{1}{x}\cos(1/x)$

$l \le \frac{\pi R}{2}$. $\Rightarrow \frac{\pi R}{l} \geqslant 2 \Rightarrow \frac{R}{l} \geqslant \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{l}{R} \le \frac{\pi}{2}$

2

$x = \frac{R}{l} \geqslant \frac{2}{\pi}$, $\underbrace{0 \le \frac{1}{x} \le \frac{\pi}{2}.}$



$f(x) = \sin(1/x) + 1/x\cos(1/x) > 0.$

~~$\min \frac{1}{x} \to \max x$~~ — $\min x \Rightarrow \min R$.

N6

$p_3 p_4 p_{1696} p_{1697} \geqslant N^2$

$G(N) = 1697$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 7 \\ \hline 119 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1697 & 13 \\ -13 & 1 \\ \hline 39 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1697 & 17 \\ -153 & 9 \\ \hline 167 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1697 & 7 \\ -14 & 24 \\ \hline 29 & \\ -28 & \\ \hline 17 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1697 & 11 \\ -11 & 15 \\ \hline 59 & \\ -55 & \\ \hline 47 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 9 \\ \hline 153 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1697 & 19 \\ -158 & 8 \\ \hline 117 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ 8 \\ \hline 152 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ 6 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1697 & 23 \\ -161 & 7 \\ \hline 87 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 7 \\ \hline 161 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1697 & 29 \\ -145 & \\ \hline 247 & \\ -243 & \\ \hline & \end{array}$$

~~26~~

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 5 \\ \hline 145 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 9 \\ \hline 243 \end{array} \quad \times 27 \quad \cancel{\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 7 \\ \hline 189 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1697 & 31 \\ -155 & \\ \hline 147 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ \times\ 5 \\ \hline 155 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1697 & 37 \\ -138 & \\ \hline 317 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \times\ 5 \\ \hline 185 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \times\ 4 \\ \hline 138 \end{array}$$

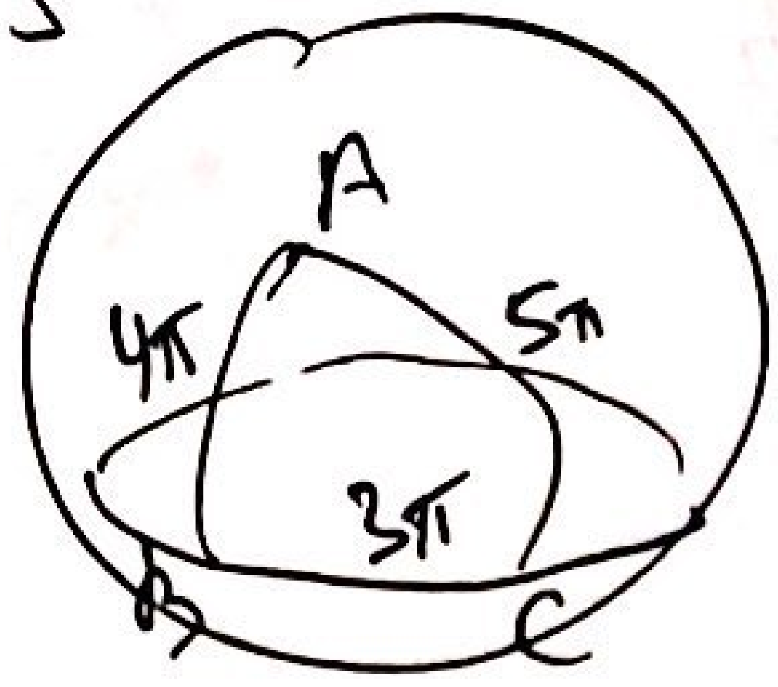
$\times 37$

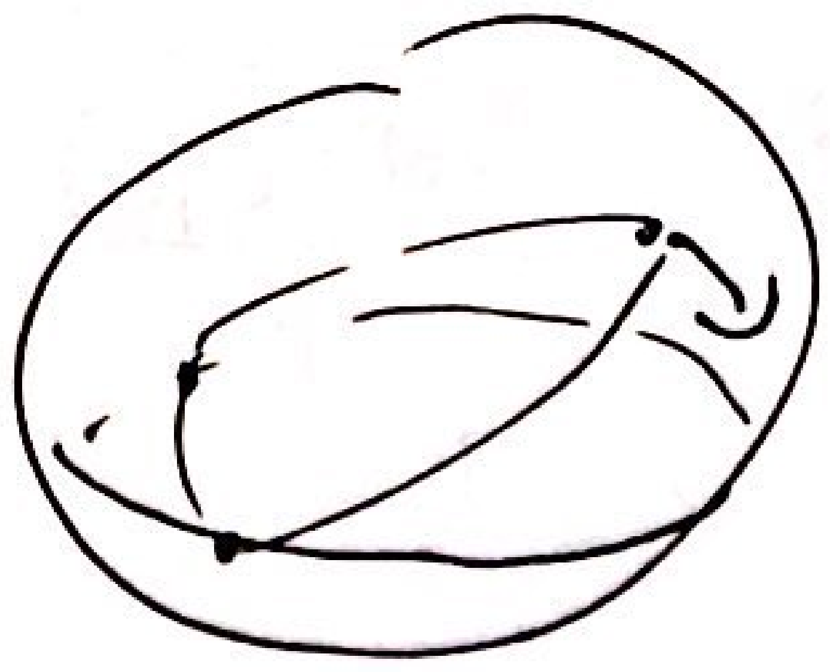
$$\begin{array}{r|l} 1697 & 41 \\ -123 & \\ \hline 467 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 41 \\ \times\ 4 \\ \hline 174 \end{array} \quad \begin{array}{r} 41 \\ \times\ 3 \\ \hline 123 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 467 & 41 \\ -41 & 1 \\ \hline 57 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 43 \\ \times\ 3 \\ \hline 129 \end{array}$$

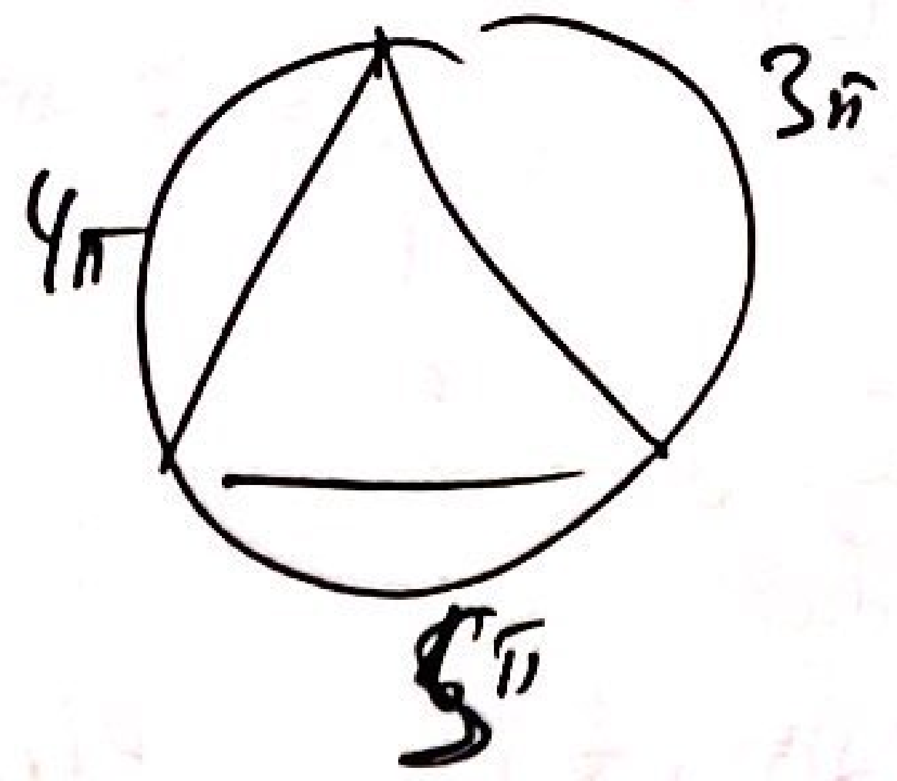
$$\begin{array}{r|l} 1697 & 43 \\ -129 & \\ \hline 407 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 43 \\ \times\ 43 \\ \hline 129 \\ 172 \\ \hline 1849 \end{array} \quad \cancel{\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 43 \\ \hline 129 \\ 172 \\ \hline 1849 \end{array}}$$

Черновик

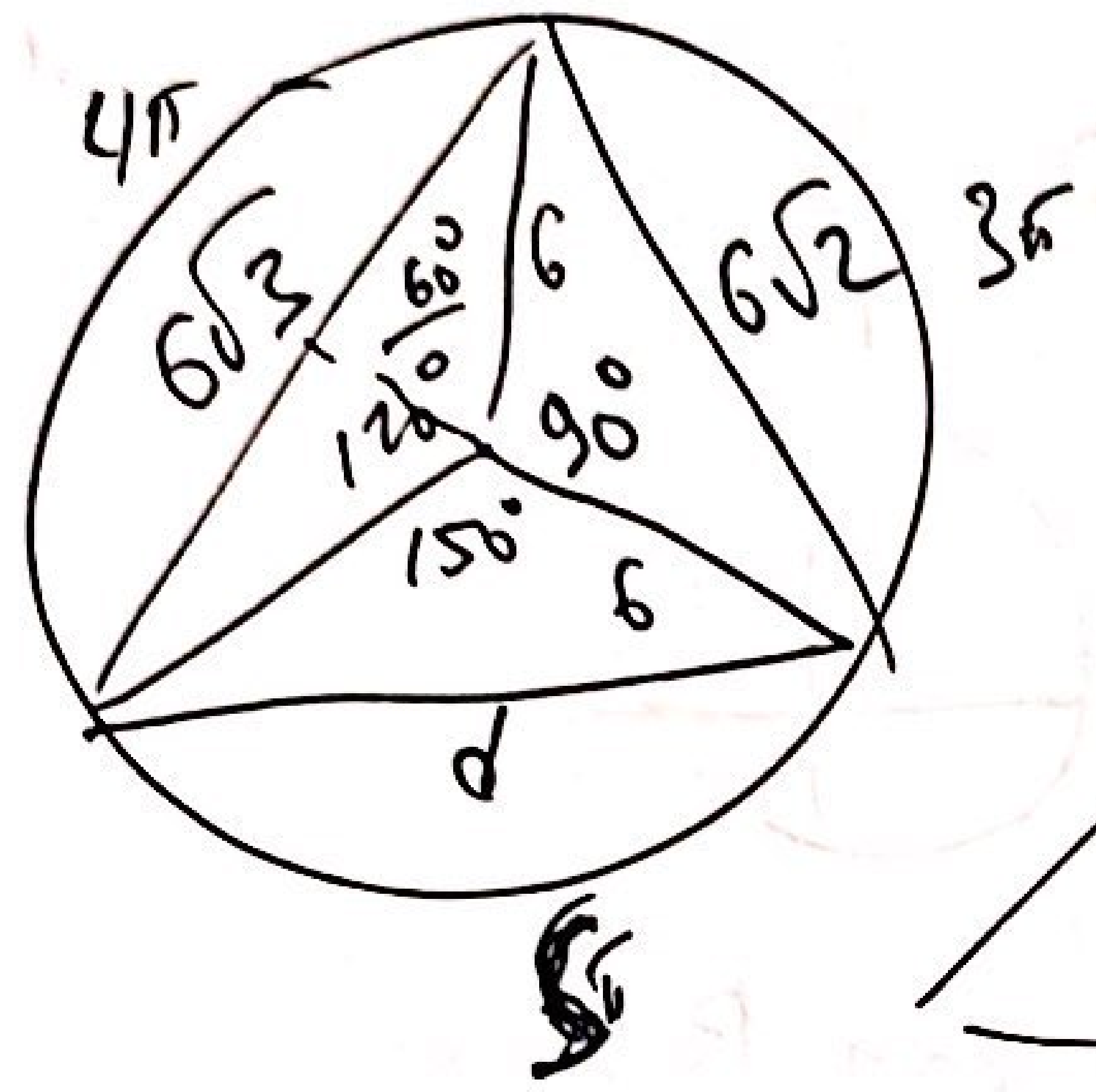
N5







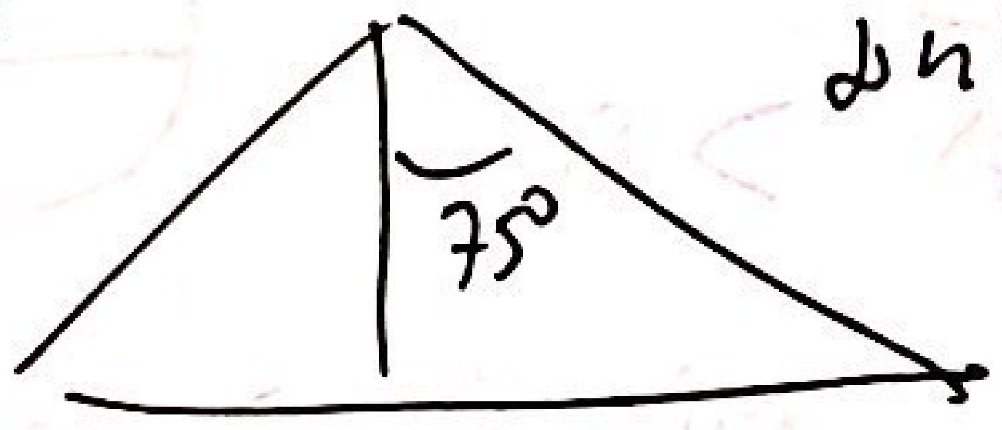
$2\pi R = (4+3+5)\pi = 12\pi \Rightarrow \pi R = 6\pi \Rightarrow R = 6$



$\frac{3}{12} \cdot 360^\circ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

$\frac{4}{12} \cdot 360^\circ = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$\begin{array}{r} \overset{1}{1}20 \\ +\ 90 \\ +150^\circ \\ \hline 360 \end{array}$



$\sin(75^\circ) =$ ~~$\sin(45^\circ) + \cos(30^\circ)$~~ $=$

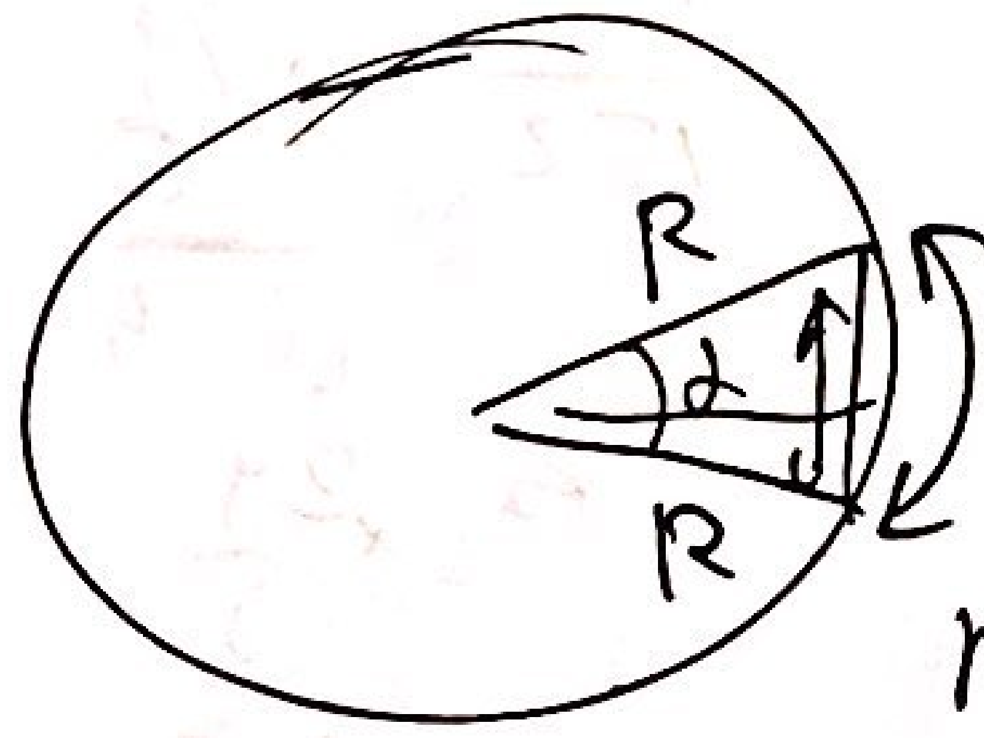
$=$ ~~$\frac{\sqrt{2}}{2}$~~

$= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin(30^\circ)\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ)\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. $\quad d = \cancel{2} \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{6\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{}$

~~$6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$~~

~~$3\sqrt{6}$~~ $\quad 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$



$$\left.\begin{array}{l} d = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \ell = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\ell}{R}. \end{array}\right\} \Rightarrow d = 2R\sin\left(\frac{\ell}{2R}\right)$$

$\min \frac{d}{\ell} = \underbrace{\frac{2R}{\ell}}_{1/x} \sin\left(\underbrace{\frac{\ell}{2R}}_{1/x}\right)$

~~$f = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f'(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$~~

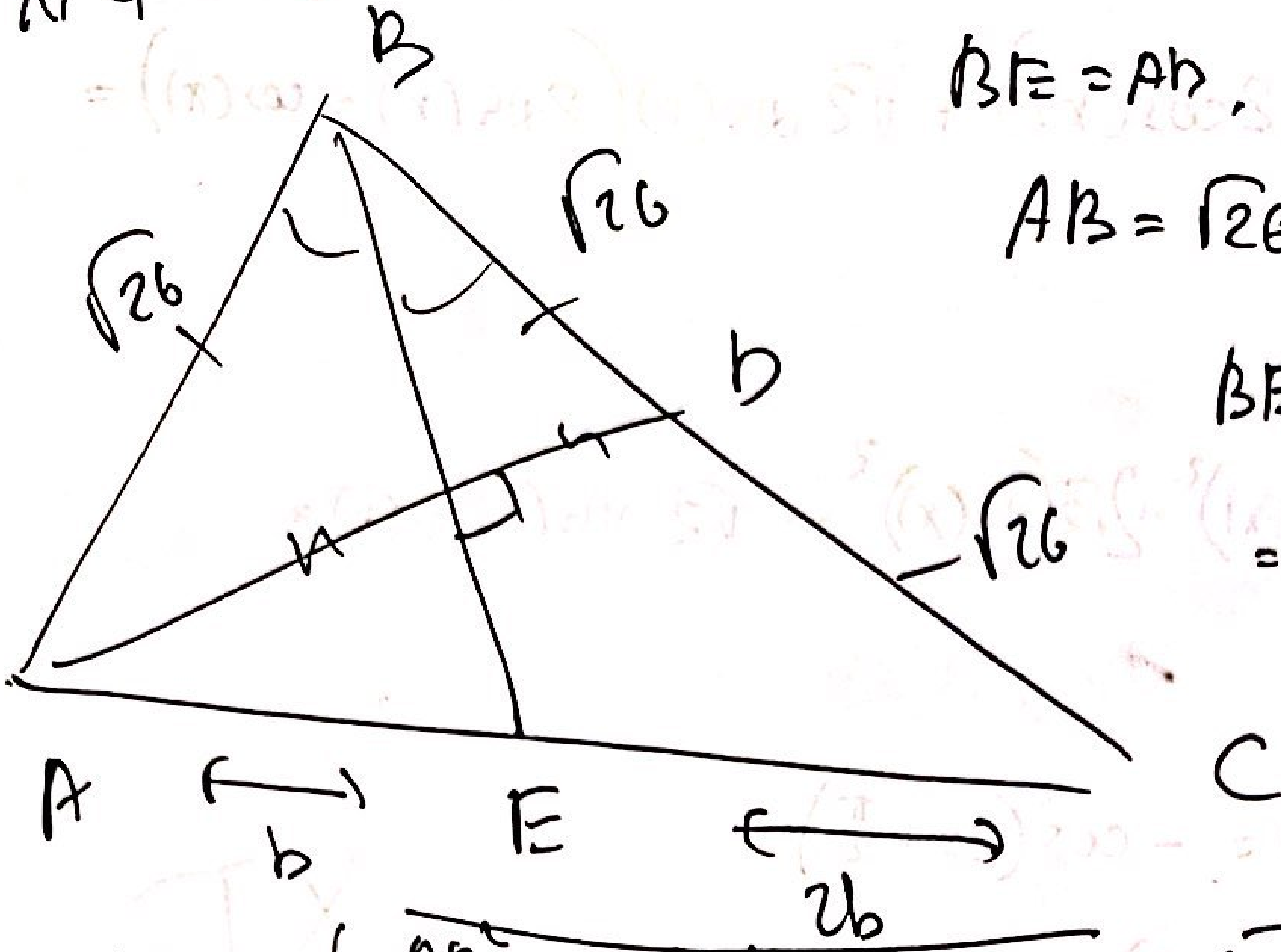
~~$= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right). \quad y = 1/x.$~~ $\qquad \ell \leq \pi R$

~~$f' = \sin(y) + y\cos(y) \qquad x = \frac{2R}{\ell}.$~~ $\qquad \frac{\pi R}{\ell} \geq 1 \quad \frac{2\pi R}{\ell} \geq 1$

~~$\frac{\pi R}{\ell} \geq \frac{1}{2} \qquad \frac{R}{\ell} \geq 1$~~

N 4

Черновик



$BE = AD, \quad BE \perp AD.$

$AB = \sqrt{26}$

$\times\frac{26}{2}$ 52

$BE = \sqrt{AB \cdot BC - AE \cdot EC} =$

$= \sqrt{\sqrt{26} \cdot 2\sqrt{26} - 2b^2} =$

$= \sqrt{2 \cdot 26 - 2b^2}$

$+\frac{26}{13}$ 39

$AD = \sqrt{\frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{26}{2} + \frac{9b^2}{2} - \frac{(2\sqrt{26})^2}{4}} =$

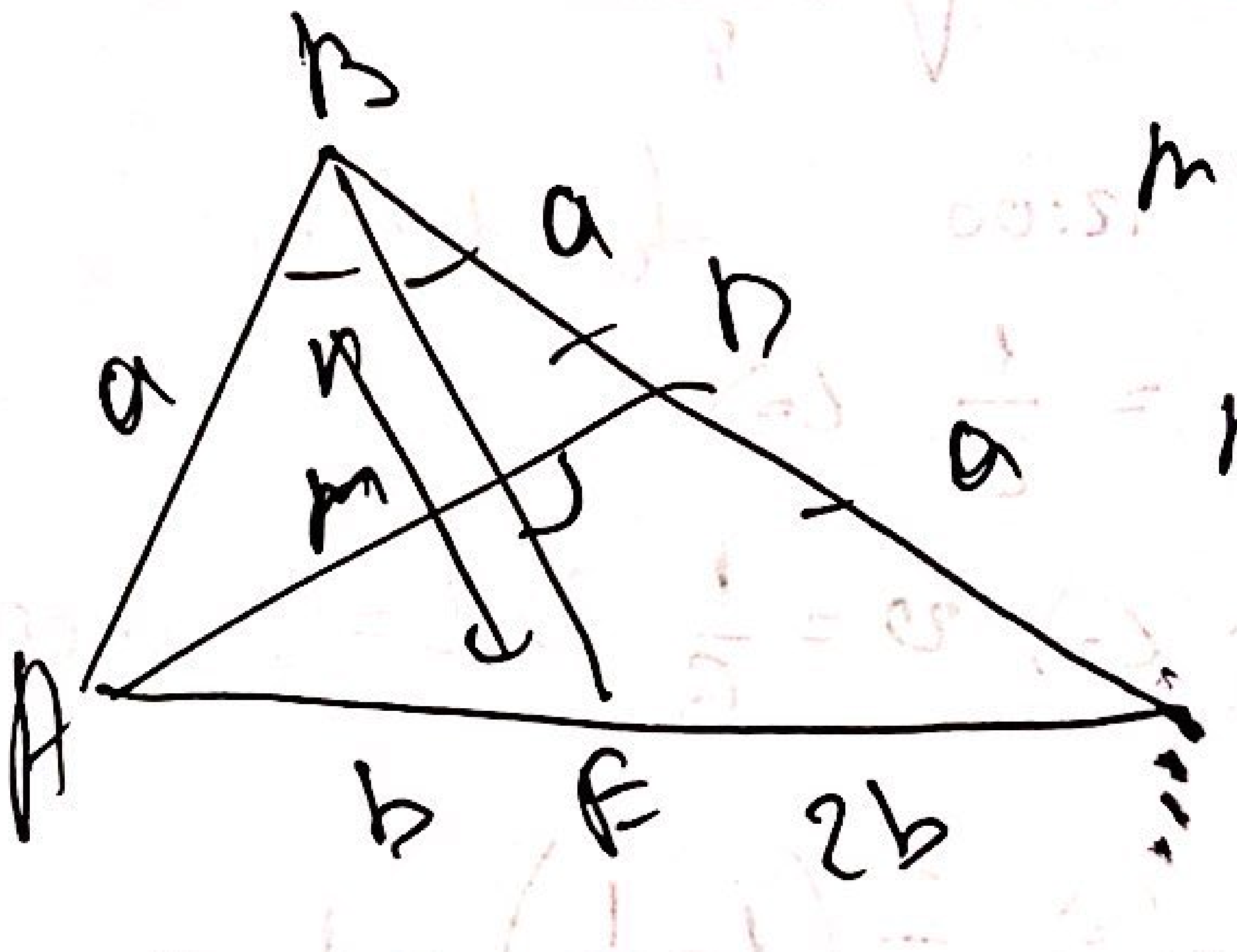
$= \sqrt{13 + \frac{9}{2}b^2 - 26} = \sqrt{\frac{9}{2}b^2 - 13}$

$-\frac{52}{39}$ 13

~~$52 - 2b^2 = \frac{9}{2}b^2 + 39 \Rightarrow \frac{13}{2}b^2 = 52 - 39 = 13$~~

~~$b^2 = \frac{13}{2}b^2 = 13 \Rightarrow b = \sqrt{2}$~~

$\times\frac{26}{2}$ 52 $+\frac{52}{13}$ 65



$m = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$

$m = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{(3b)^2}{2} - \frac{(2a)^2}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{9}{2}b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{9}{2}b^2 - \frac{a^2}{2}}$

~~$\frac{9}{2}b^2 - 13 = 2 \cdot 26 - 2b^2 \Leftrightarrow \frac{13}{b^2} = 65$~~

~~$65b^2 = 13 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{13}{65}}$~~

$m = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{5}{13}} = \sqrt{\frac{26-10}{13}}a = a\frac{4}{\sqrt{13}}$

$m = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{(3b)^2}{2} - \frac{(2a)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{9}{2}b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{9}{2}b^2 - \frac{a}{2}}$

$2a^2 - 2b^2 = \frac{9}{2}b^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{13}{\cancel{2}}b^2 = \frac{5}{\cancel{2}}a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{\frac{5}{13}}$

$S_{\Delta EDC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$

$S = \frac{3}{4} m^2 = \frac{3}{4} \cdot a\frac{\cancel{16}^{4}}{(\sqrt{13})^2} = \frac{12}{13}a^2 = \frac{12}{\cancel{13}} \cdot \cancel{26}^{2} = 24$

Черновик

N1 $1-\sqrt{2}\cos(x)\left(\sin(x)+2\cos(x)\right)+\sqrt{2}\sin(x)\left(2\sin(x)-\cos(x)\right)=$

$= 2\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$

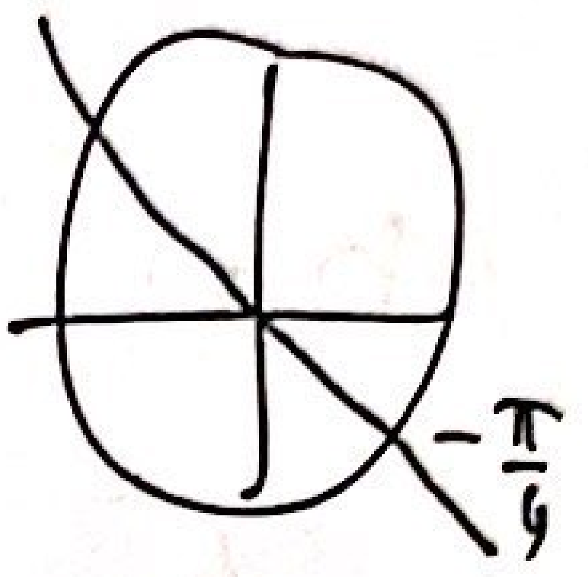
$\cancel{1}-\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)-2\sqrt{2}\left(\cos(x)\right)^2+2\sqrt{2}\left(\sin(x)\right)^2-\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)=$

$= \cancel{1}-\cancel{\cos}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$-2\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$2\sqrt{2}\cos(2x)+\sqrt{2}\sin(2x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$2\cancel{\sqrt{2}}\cos(2x)+\cancel{\sqrt{2}}\sin(2x)=\cos(2x)\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}-\sin(2x)\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}$

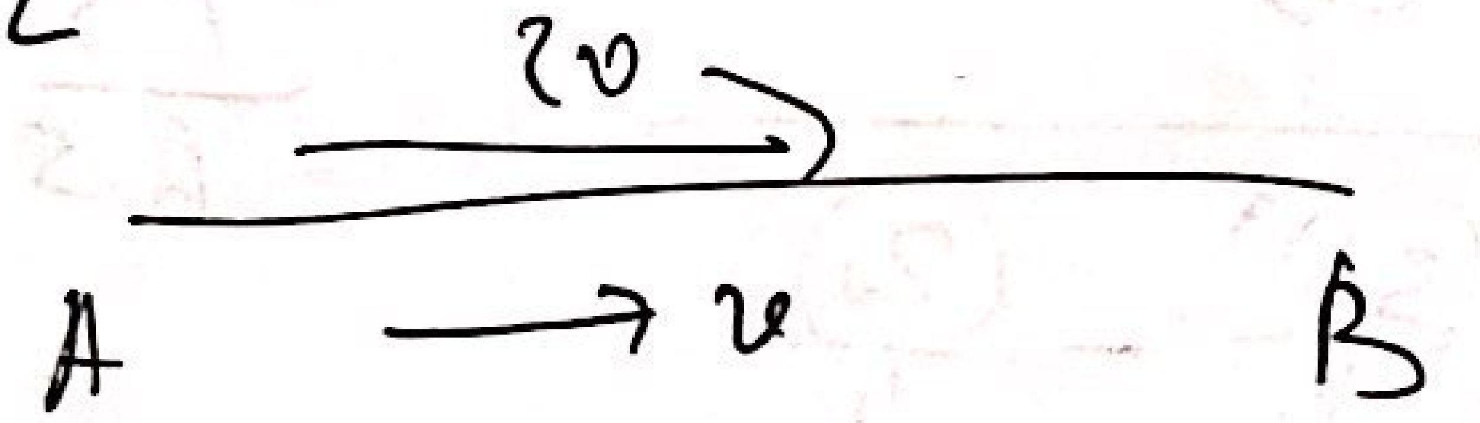


$\frac{3}{2}\cos(2x)+\frac{3}{2}\sin(2x)=0.$ $\cos(2x)=-\sin(2x)$

$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$ $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}.$

$x=-\frac{\pi}{8}.$ $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

N2



13:00 и 12:00 $t_0 = 12{:}00$

$\frac{1}{2v}+3=\frac{1}{v}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{v}\left(1-\frac{1}{2}\right)=3 \Leftrightarrow 3v=\frac{1}{2} \Leftrightarrow v=\frac{1}{6} \Rightarrow t=6,$ 18:00

$\cancel{\frac{1}{2v}+2t=\frac{1}{v}+2}$ $\frac{1}{2v}+2=\underbrace{\frac{1}{v}}_{}^{t}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{v}\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$

$v=\frac{1}{2} \Rightarrow t=3 \Rightarrow$ 15:00

N3 $\overbrace{x^3+a_0x^2+b_0x+c_0}^{f(x)}=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a_0 \\ \cancel{x_1x_2x_3=b_0}\ \ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b_0 \\ x_1x_2x_3=c_0 \end{cases}$$

$x^3+ax^2+bx+c=0$

$(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_1+x_3)=-a$

$a=2a_0$

$(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_3)(x_2+x_3)=b=$

$=x_1^2+x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2=$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=\left((x_1+x_2+x_3)-x_1\right)(\_)(\_)=f(x_1+x_2+x_3)$