0 278315 520005

27-83-15-52
(138.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Саитова Вадима Ринатовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
27-83-15-52	85	0	20	20	20	5	20		

27-83-15-52 (138.4)

Чистовик.

1	2	3	4	5	6

95 (девяносто пять)
Исправлено по апелляции.

№1.

$1+\sqrt{2}\sin x\cdot(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=$

$=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$ ОДЗ: $x\in R$.

$\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x-2\sqrt{2}\sin^2x+2\sqrt{2}\cos^2x+\sqrt{2}\sin x\cos x=$

$=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})-1$

$2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x+2\sqrt{2}(\cos^2x-\sin^2x)=\cos(2(x+\frac{\pi}{8}))$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}(\sin 2x+2\cos 2x)=\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$\cancel{\sqrt{2}}(\sin 2x+2\cos 2x)=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}(\cos 2x-\sin 2x)$

$2\sin 2x+4\cos 2x=\cos 2x-\sin 2x$

$\sin 2x=3\cos 2x$

(не явл-ся решением)
$\cos 2x\neq 0$, значит, ур.-е равносильно $tg 2x=3$

$2x=arctg 3+\pi n, n\in Z$

$x=\frac{arctg 3}{2}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

Ответ: $\frac{arctg 3}{2}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$ 1

№2.

Пусть велосипедист ехал x часов (без учёта остановки), y - автомобилист (без учёта остановки), вескорость велосип, 2x - автомобилиста. Черновик

I сл. Велосипедист выехал на час позже, а ~~ав~~ позже останавливался на 2 часа. Тогда $x+3=y$.

С другой стороны, $x\cancel{v}=2y\cancel{v} \Rightarrow x=2y \Rightarrow x=2(x-3) \Rightarrow$

$x=2x-6 \Rightarrow x=-6$ – не уд.

II сл. Вел. выехал на час позже, а авт. сделал остановку на 2 часа. Тогда $x+1=y-2 \Rightarrow x=y+1$

$x\cancel{v}=2y\cancel{v} \Rightarrow y-1=2y \Rightarrow y=1, x=2.$

Велосипедист приехал в $14+1+2=17$ часов.

III сл. Авт. выехал на час позже, а вел. сделал остановку на 2 часа. $x+2=y-1 \Rightarrow y=x-1$

$x\cancel{v}=2y\cancel{v} \Rightarrow x=2(x-2) \Rightarrow x=2x-2 \Rightarrow x=-2$ – не уд.

IV сл. Авт. выехал на час позже и сделал ост. на 2 часа. $x=y-\cancel{3}1-2=y-3.$

$x\cdot\cancel{v}=y\cdot 2\cancel{v} \Rightarrow y-3=2y \Rightarrow y=3, x=6.$ Велосипедист приехал в $14+6=20$ часов.

Ответ: в 17 или в 20 часов.

№3.

Применим теорему Виета к первому уравнению:
$$\begin{cases} 6=x_1+x_2+x_3 \\ 7=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \\ 1=x_1x_2x_3 \end{cases} \quad (1)$$

$x_1\neq x_2\neq x_3 \Rightarrow x_1+x_2\neq$
$\neq x_2+x_3\neq x_1+x_3\neq x_1+x_2$

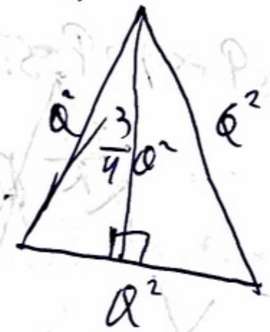
Теорема Виета для 2-го уравнения:
$$\begin{cases} -a=x_1+x_2+x_2+x_3+x_1+x_3 \Rightarrow \\ b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3) \\ -c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3) \end{cases} \quad (2)$$

Черновик

$2\sqrt{2}\sin x\cos x + 2\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos 2x = \cos($

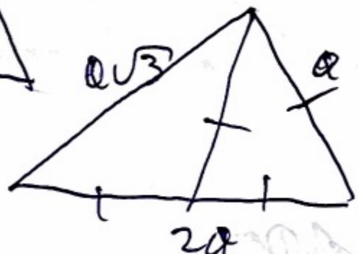
$\frac{2tg x}{1 - tg^2 x} = 3$ $\quad m^2 = \frac{2a^2 - 2b^2 - c^2}{4}$



$3tg^2 x + 2tg x - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$t = \frac{-2 \pm 4}{6}$



$a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 3\varphi$

$x_2^2 x_2 - x_2 x_2^2 - x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2$

$3a^2 - a^2$

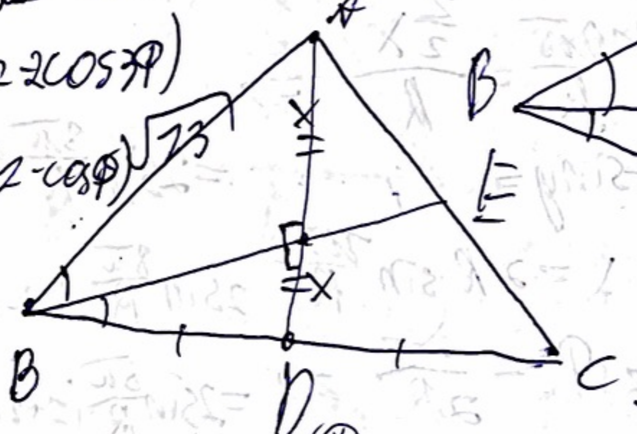
$x_2(x_2 x_2 + x_2 x_3 - x_2^2 - x_3^2)$ $\quad \frac{6a^2 + 2a^2 - 4a^2}{4} =$

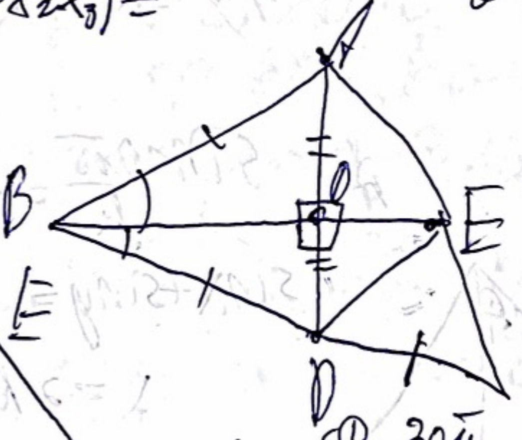
$(x_2 - x_2 - x_3)(x_2 x_2 - x_2 x_3 - x_2 x_3) =$ $\quad a^2$

$R^2\sqrt{2 - \cos}$

$R^2(2 - 2\cos 3\varphi)$

$2R^2(1 - \cos\varphi)\sqrt{3}$





$\angle AOD = 5\varphi$

$\angle DOC = 3\varphi$

$\angle BOC = 8\varphi$

$5\varphi - 20\pi$

$2\pi - \frac{8\pi^2}{\varphi}$

$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{4\pi}{\varphi}$

Черновик.

$AB+BC+AC=R\left(\sqrt{2-\cos3\varphi}+\sqrt{2-\cos4\varphi}+\sqrt{2-\cos5\varphi}\right)=$

$=\frac{4\pi}{\varphi}\left(\sqrt{2-\cos3\varphi}+\sqrt{2-\cos4\varphi}+\sqrt{2-\cos5\varphi}\right)$

$\varphi\in[0^\circ;40^\circ]$

$\left(\sqrt{2-\cos3\varphi}\right)'=3\sin3\varphi\cdot\frac{1}{2\sqrt{2-\cos3\varphi}}$

$\varphi'=\frac{-8\pi}{\varphi^2}(\sin3{,}5\varphi+\sin2\varphi+\sin2{,}5\varphi)+\frac{4\pi}{\varphi}(3{,}5\cos3{,}5\varphi+2\cos2\varphi+$

$+2{,}5\cos2{,}5\varphi)=0.$

$3{,}5\cos3{,}5\varphi+2\cos2\varphi+2{,}5\cos2{,}5\varphi=$

$=\frac{2}{\varphi}(\sin3{,}5\varphi+\sin2\varphi+\sin2{,}5\varphi)$

~~AB(cos~~

$\varphi=\cancel{\frac{20\pi}{R}}\quad\varphi=\frac{20\pi}{R}$

$\varphi(3\cos3{,}5\varphi+4\cos2\varphi+5\cos2{,}5\varphi)=4(\sin2{,}5\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi)$

$\sin\frac{x+y}{2}\cdot$ ~~AB=R~~ $AB=R\sqrt{2-2\cos}$

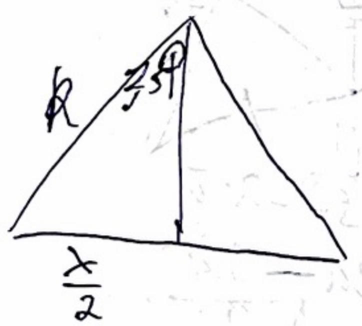
$2\sin$

$\sin\frac{6\pi}{R}+\sin\frac{10\pi}{R}=$

$\sin\frac{10\pi}{R}=\frac{\frac{1}{2}x}{R}\Rightarrow$

$\sin x+\sin y=$

$=2\sin\frac{8\pi}{R}\sin\frac{2\pi}{R}$



$x=2R\cdot\sin\frac{10\pi}{R}$

$2\sin\frac{8\pi}{R}\left(2-2\cos\frac{2\pi}{R}\right)$

$\sin3{,}5\varphi=\frac{x}{2R}\Rightarrow$

$=2\sin\frac{8\pi}{R}\left(2+2\cos\frac{2\pi}{R}\right)$

$2R(\sin3{,}5\varphi+\sin2\varphi+\sin2{,}5\varphi)=$

$=\frac{8\pi}{\varphi}(\sin3{,}5\varphi+\sin2\varphi+\sin2{,}5\varphi)$

27-83-15-52 (138.4)

Черновик

$$\begin{cases} -a=2(x_1+x_2+x_3) \\ b=3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ -c=(x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+x_2^2) \end{cases}$$

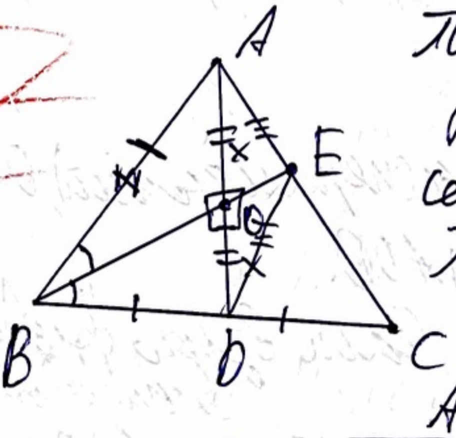
См. (1): $\begin{cases} -a=2\cdot 6 \\ b=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) \\ -c=x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+ \\ +x_2x_3^2+x_2^2x_3 \end{cases}$

$$\begin{cases} a=-12 \\ b=36+7=43 \\ -c=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3= \\ =6\cdot 7-1=41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-12 \\ b=43 \\ c=-41 \end{cases}$$

Ответ: при $a=-12$, $b=43$, $c=-41$

№4.



Пусть $BE \cap AD = O$.

В $\triangle ABD$ BO — высота и биссектриса $\Rightarrow AO=DO$, $AB=BD=5\sqrt{13}$

Пусть $OA=OD=x$.

Т. Пифагора для $\triangle ABO$:

$AB^2=OB^2+OA^2 \Rightarrow 25\cdot 13=OB^2+x^2 \Rightarrow$

$OB^2=325-x^2 \Rightarrow OB=\sqrt{325-x^2}$

Т. Пифагора для $\triangle AOE$: $AE^2=OA^2+(BE-OB)^2=$

$=x^2+(2x-\sqrt{325-x^2})^2=5x^2+325-x^2-4x\sqrt{325-x^2}=$

$=4x^2-4x\sqrt{325-x^2}+325$

③

Чистовик

BE - сер. пер. к $AD \Rightarrow DE = AE \Rightarrow DE^2 = AE^2 = 4x^2 - 4x\sqrt{325 - x^2} + 325$

По св-ву бис-сы BE: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow CE = AE \cdot \frac{BC}{AB} = AE \cdot 2 \Rightarrow CE^2 = 4AE^2 = 16x^2 - 16x\sqrt{325 - x^2} + 1300$

Формула медианы ED в $\triangle BEC$: $DE^2 = \frac{2BE^2 + 2CE^2 - BC^2}{4}$

$\Rightarrow 4DE^2 = 2BE^2 + 2CE^2 - BC^2 \Rightarrow 16x^2 - 16x\sqrt{325 - x^2} + 1300 = 2 \cdot 4x^2 + 32x^2 - 32x\sqrt{325 - x^2} + 2600 - 4AB^2 \Rightarrow$

$16x^2 - 16x\sqrt{325 - x^2} + \cancel{1300} = 8x^2 + 32x^2 - 32x\sqrt{325 - x^2} + \cancel{2600 - 1300} \Rightarrow 24x^2 = 16x\sqrt{325 - x^2} \Rightarrow 3x = 2\sqrt{325 - x^2} \Rightarrow$

$9x^2 = 1300 - 4x^2 \Rightarrow 13x^2 = 1300 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10.$

$S_{ABD} = \frac{AD \cdot OB}{2} = x \cdot \sqrt{325 - x^2} = 10 \cdot \sqrt{225} = 150.$

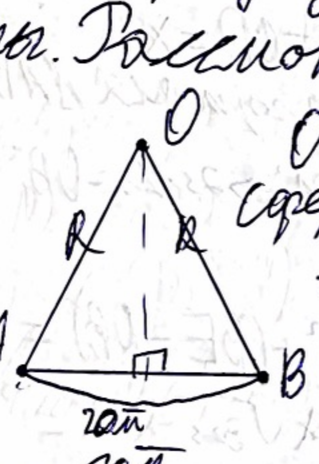
$S_{ABC} = 2S_{ABD} = 150 \cdot 2 = 300$

Ответ: $S_{ABC} = 300.$

<u>Оценка</u>

№5.

Пусть R – радиус сферы (переменный), O – центр сферы. Рассмотрим $\triangle AOB$.



$OA = OB = R$. Если взять ~~[illegible]~~ большую окр-ть сферы, на которой лежат A и B, то $\overset{\frown}{AB} = 20\pi \Rightarrow 20\pi = R \cdot \angle AOB \Rightarrow \angle AOB = \frac{20\pi}{R}$

$\sin\frac{\angle AOB}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{OA} \Rightarrow AB = 2OA \cdot \sin\frac{\angle AOB}{2} = 2R \cdot \sin\frac{10\pi}{R}$

12

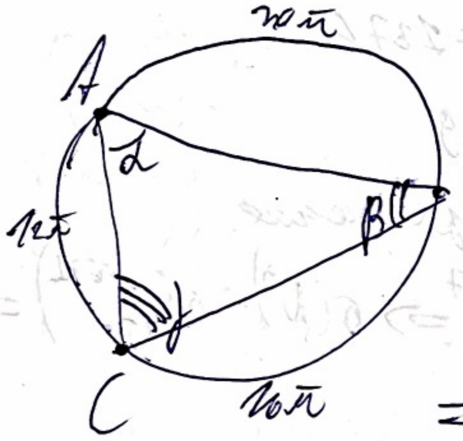
Аналогично получаем, что $AC = 2R\cdot\sin\frac{12\pi}{2R} = 2R\cdot\sin\frac{6\pi}{R}$, $BC = 2R\cdot\sin\frac{16\pi}{R} = 2R\cdot\sin\frac{8\pi}{R}$ Итоговая

$$AB+BC+AC = 2R\left(\sin\frac{6\pi}{R}+\sin\frac{8\pi}{R}+\sin\frac{10\pi}{R}\right) = P(R)$$

функция.

$$P'(R) = 2\left(\sin\frac{6\pi}{R}+\sin\frac{8\pi}{R}+\sin\frac{10\pi}{R}\right)+2R\cdot\left(\frac{6}{R}\cos\frac{6\pi}{R}+\right.$$
$$\left.+\frac{8}{R}\cos\frac{8\pi}{R}+\frac{10}{R}\cos\frac{10\pi}{R}\right) = 2($$

Пример. Пусть точки A, B и C лежат на одной данной окружности.



$L_{окр} = 48\pi \Rightarrow R = 24.$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow$

$BC = 2R\cdot\sin\alpha = 48\cdot\sin\frac{16\pi}{24\cdot2} = 48\cdot\sin\frac{2\pi}{3\cdot2} =$

$= 48\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 48\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 24\sqrt3$

$AC = 2R\cdot\sin\beta = 48\cdot\sin\frac{12\pi}{24\cdot2} = 48\cdot\frac{\sqrt2}{2} = 24\sqrt2$

$AB = 2R\cdot\sin\gamma = 48\cdot\sin\frac{20\pi}{24\cdot2} = 48\cdot\sin\frac{5\pi}{12} = 48\cdot\sin 75^\circ =$

$= 48\cdot\sin(30^\circ+45^\circ) = 48\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right) = 48\cdot\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4} =$

$= 12(\sqrt2+\sqrt6)$

$P = AB+BC+AC = 12(3\sqrt2+2\sqrt3+\sqrt6)$

Ответ: $P = 12(3\sqrt2+2\sqrt3+\sqrt6)$

5

№6. Чистовик

Заметим, что $p_i \cdot p_{\sigma(N)+1-i} = N$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{2876} \cdot p_{2877} \geq N^2 = N \cdot N = p_3 \cdot p_{\sigma(N)-2} \cdot p_4 \cdot p_{\sigma(N)-3} =$

$= p_3 \cdot p_4 \cdot p_{\sigma(N)-3} \cdot p_{\sigma(N)-2} \Leftrightarrow p_{2876} \cdot p_{2877} \geq p_{\sigma(N)-3} \cdot p_{\sigma(N)-2} \Leftrightarrow 2876 \geq$

$\sigma(N)-3 \Leftrightarrow \sigma(N) \leq 2879$. (другой стороны очевидно, что $\sigma(N) \geq$

≥ 1877.

I. $\sigma(N) = 1877$ — простое число

Пусть $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$).

Тогда $\sigma(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$ — простое число $\Rightarrow$

число N — степень простого, и $\alpha_1 = 1876$

$\sigma(N^3) = \sigma((p_1^{1876})^3) = \sigma(p_1^{5628}) = 5629$

II $\sigma(N) = 1878 = 6 \cdot 313 = 2 \cdot 3 \cdot 313$ — разложение.

Возм. варианты: 1) $N = p_1^{1877} \Rightarrow \sigma(N^3) = \sigma(p_1^{5631}) =$

$= 5632$

2) $N = p_1^{1} \cdot p_2^{938} \Rightarrow \sigma(N^3) = \sigma(p_1^3 \cdot p_2^{2814}) = 4 \cdot 2815 = 11260$

3) $N = p_1^{2} \cdot p_2^{625} \Rightarrow \sigma(N^3) = \sigma(p_1^6 \cdot p_2^{1875}) = 7 \cdot 1876 = 13132$

4) $N = p_1^{5} \cdot p_2^{312} \Rightarrow \sigma(N^3) = \sigma(p_1^{15} \cdot p_2^{936}) = 16 \cdot 937 = 14992$

5) $N = p_1^{1} \cdot p_2^{2} \cdot p_3^{312} \Rightarrow \sigma(N^3) = (p_1^3 \cdot p_2^6 \cdot p_3^{936}) = 28 \cdot 937 = 26236$

III. $\sigma(N) = 1879$ — простое $\Rightarrow$ ед. возм. сит: $N = p_1^{1878} \Rightarrow$

$\sigma(N^3) = \sigma(p_1^{5634}) = 5635$

Ответ: $N \in \{5629; 5632; 5635; 11260; 13132; 14992; 26236\}$

6

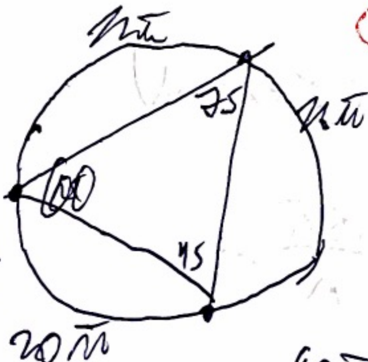
Черновик

$\sin x + \sin y = 2 \quad \frac{x+y}{2} \quad \frac{x-y}{2}$

30 60

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ$

$2\cos\frac{x-y}{2} \cdot \quad \frac{x+y}{2}$



$40\pi \Rightarrow R = 20$

$\sin 0 + \sin 90 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

3 : 4 : 5

$\sin 0 + \sin 60 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(30^\circ) \quad \frac{180}{12} = 15$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$a = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 20\sqrt{3}$

$\sin 2{,}5\varphi + \sin 3\varphi = 2\sin 2\varphi \cdot \cos\varphi + \sin 2\varphi =$

$= \sin 2\varphi(2\cos\varphi + 1)$

$t(6\cos 6t + 8\cos 8t + 10\cos 10t) +$

$+ t(2\cos 8t + 4\cos 10t)$

$\cancel{2x} \cdot \frac{2}{x} \cdot (\sin 6\pi x + \sin 8\pi x + \sin 10\pi x)$

$\pi x = t$

$\frac{2}{x^2}(\ldots) = \frac{2}{x}(6\pi \ldots$

$\sin 6t + \sin 8t + \sin 10t = t(6\cos 6t + 8\cos 8t + 10\cos 10t)$

$\sin 6\pi x + \sin 8\pi x + \sin 10\pi x =$

$= \pi x(6\cos 6\pi x + 8\cos 8\pi x + 10\cos 10\pi x)$

Черновик

$2R\sin\frac{8\pi}{R}(1+2\cos\frac{8\pi}{R})$

$\sin 4x(1+2\cos x)$

2877 $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{5}$ $\cancel{7}$ $\cancel{11}$

$\cancel{13}$ $\cancel{17}$ $\cancel{19}$ $\cancel{23}$

$\sin\frac{8\pi}{R}+$

29

2877 | 31
−186 | 60
27

$\frac{2}{x}(\sin 8\pi x+\sin 8\pi x\cdot\cos 2\pi x)$

2877
−1450
427

2877 | 37
−185 | 6
27

$p_3\cdot p_4\cdot$

290
137
−29
108

577
−520
57

2877 | 41
−161 | 45
237

$p_3\cdot p_4\cdot p_{\sigma(N)-3}\cdot p_{\sigma(N)-2}=N^2$

$2876\geq\sigma(N)-3$

2877 | 23

2877 | 43
−172 | 4
157

$\sigma(N)\leq 2879$

2 3 $\cancel{5}$ $\cancel{7}$ 47^2

2887 587 67

$\cancel{11}$ $\cancel{13}$ $\cancel{17}$

$\cancel{19}$ 23

2876
× 7
13232

2 3 $\cancel{5}$ $\cancel{7}$ $\cancel{11}$

287

$\cancel{13}$ 17

2876
× 3
5628

23232 | 7
−7 | 2876
62

2887 | 17
−17 | 111
187
−17

17+170+1700=

=2887

2·3·32356

53
−49
42

2·3·323

323=

937
× 26
5622
+937
14992

16
937

$\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{5}$ $\cancel{7}$ $\cancel{11}$

$\cancel{13}$ $\cancel{17}$

Черновик.

1879

~~2~~ ~~3~~ ~~5~~ ~~7~~

~~11~~ ~~13~~ ~~17~~

~~19~~ ~~23~~ ~~29~~

31 ~~37~~

~~41~~

1909

409

59

579

59

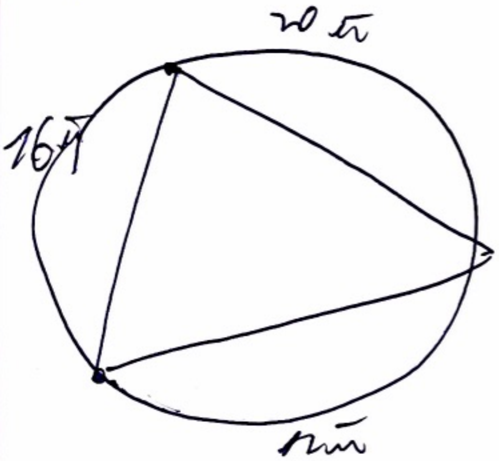
$$\begin{array}{r|l} 1879 & 23 \\ -184 & 8 \\ \hline 39 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1879 \\ -1150 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1879 \\ -1640 \\ \hline 239 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1879 \\ -1720 \\ \hline 159 \end{array}$$

sin



$$\begin{array}{r} 937 \\ \times\ 14 \\ \hline 3748 \\ +937 \\ \hline 13118 \end{array}$$

26236

$$\frac{60\pi}{2\pi} = 30$$

Повысить оценку на 10 баллов (старая оценка — 85 баллов, новая оценка — 95 баллов)

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!“
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему
ученика 11Б класса МБОУ „Физико-математический лицей №93“ г. Уфа
Саитова Вадима Ринатовича

Апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (85 баллов) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что в задаче №1 мною допущена арифметическая ошибка: в 10 строке решения должно быть написано $\sin 2x = -\cos 2x$, тогда получается верный ответ. Других ошибок не допущено, значит, по критериям должно стоять 10 баллов за эту задачу.

20.04.2023

(Саитов В.Р.)