ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

0 189771 420009

18-97-71-42
(121.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мухтарова Азамата Фарходовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 13:11 / 13:21

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
18-97-71-42	95	20	20	20	20	15	X	X	X

18-97-71-42
(121.2)

① Черновик. Страница 1.

$1-\sqrt{2}\cdot\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\cdot\sin x(2\sin x-\cos x)=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})=$

$\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ ✓ $\Rightarrow 2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})=1-\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$2\sin^2 x=1-\cos 2x$

$2\sin x-\cos x=\sin x+2\cos x+\sin x-3\cos x.$

$2\cos^2 x=1+\cos 2x$

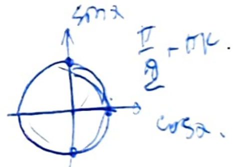
$2\sin x$ 1) $2\sqrt{2}\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x\cos x=\sqrt{2}(1-\cos 2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

2) $-\sqrt{2}\cdot\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos^2 x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\sqrt{2}(1+\cos 2x)$

$\cancel{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}\cos 2x+\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\cancel{1}-\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x.\cdot 4$



$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x$

$\times\begin{array}{r}847\\16\\\hline 5082\\+847\\\hline 13552\end{array}$

$\cos 2x+\sin 2x=0.$ Пусть $2x=a$, то

$\times\begin{array}{r}1665\\7\\\hline 11655\end{array}$

$\cancel{\cos 2x}+$ $\cos a+\sin a=0.$

$\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)=0.$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=0.$

$\times\begin{array}{r}847\\28\\\hline 6776\\1694\\\hline 23716\end{array}$

$\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=0.$

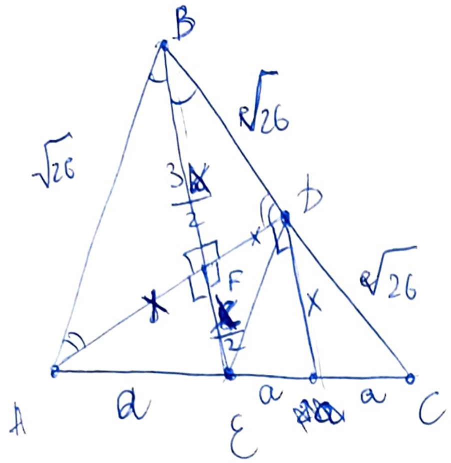
$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k.$

$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$

$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$ Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

Черновик. ~~Ст~~раница 2.

4.



$210 - 132$ 140

$10+68=78$

$60+10+8=78.$

$AD = BE$

$x+y=a+b.$

$BD=\sqrt{26}$

$2x=b+c.$

1697

297

$5x^2=4a^2$

$\begin{cases} x^2+a^2=26 \\ 4x^2+x^2=4a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+a^2=26 \\ 5x^2=4a^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+a^2=26 \\ \frac{5x^2}{4}=a^2 \end{cases}$ $x^2+\frac{5x^2}{4}=26$

$\cancel{\frac{9x^2}{4}=26}$ $\cancel{9x^2=}$

$\frac{9x^2}{4}+x^2=26$

$849 \mid 3$, 283; -6, 24

$\frac{9x^2+4x^2}{4}=26 \Rightarrow \frac{13x^2}{4}=26 \Rightarrow x^2=8.$

$x=2\sqrt{2}$

$40=4a^2$

$a=\sqrt{10} \Rightarrow 3a=3\sqrt{10}$

т.е. $\frac{S}{2}=\frac{3x^2}{2} \Rightarrow S=3x^2=24.$

2. Мат. модель Ск-ть м. $=2x$ Расстояние $-S$

Ск-ть велосип $=x.$

1 случай: ~~1 выехал~~ 1-ый выехал мотоц. - в 12 $(t+1)$

2-ой выехал велосип. - в 13 (t)

$\begin{cases} t+1=\frac{S}{2x}+2 \\ t=\frac{S}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{2}+2=t+1$ $t+4=2t+2$ $t=2.$

18-97-71-42 (121.2)

Черновик. Страница 3.

1) $t+1 = 2 + \frac{S}{2x}$ $\quad t+1 = 2 + \frac{t}{2}$

$t = \frac{S}{x}$

$2t+2 = 4+t$ $\quad 13+2 \Rightarrow 15.$

$t = 2\ \varnothing.$

2) $t+1 = \frac{S}{2x}$ $\quad \Rightarrow 2t+2 = \frac{S}{x}$

$t = \frac{S}{x} + 2$ $\quad$ т.е. $t = 2t+2+2$

$-4 = t.\ \varnothing.$

3) $t+1 = \frac{S}{x}$

$t = 2 + \frac{S}{2x}$ $\quad \Rightarrow t = 2 + \frac{t+1}{2}$

$2t = 4 + t+1$

$t = 5.$

4) $t+1 = \frac{S}{x} + 2$

$t = \frac{S}{2x}$ $\quad t+1 = 2t+2$

$-1 = t\ \varnothing.$

т.е. приехали в 18:00 или в 15:00.

③ $x^3+6x^2+7x+1=0.$ $\quad x^3+6x^2+7x+1=0.$

x_1, x_2, x_3 - корни урав.

$(x_1-a)(x_2-b)(x_3-c)=0.$

$1+6+7+1\ \varnothing$

$-1+6-7+1 = 0\varnothing$ $\quad x^3+ax^2+bx+c=0.$

$0 = (x_1+x_2-a_1)(x_2+x_3-b_1)(x_3+x_1-c_1)$

$+\begin{array}{r}6\\22\end{array}$ $\times\begin{array}{r}22\\6\\\hline 132\end{array}$ Черновик. Страница 4. $\times\begin{array}{r}1696\\3\end{array}$

$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+$
$+2x_3x_1$

(3) $x^3+6x^2+7x+1=0 \Rightarrow$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0.$

$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+$
$+3x_1^2x_3+3x_2^2x_3+3x_2^2x_1+$
$3x_3^2x_1+3x_3^2x_2+6x_1x_2x_3$

$(x^2-x_2x-xx_1+x_2x_1)(x-x_3)=0.$

$(x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2)(x-x_3)=0.$

$x^3\underbrace{-x^2x_3-x^2(x_1+x_2)}_{6}+\underbrace{x(x_1+x_2)x_3+xx_1x_2}_{7}\underbrace{-x_1x_2x_3}_{1}=0.$

$\begin{cases}-x_1x_2x_3=1\\ -(x_1+x_2+x_3)=6. \quad x_1=-6-x_2-x_3\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7\end{cases}$

$(x_1^2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_3)(x_2+x_3)=c$

$(x_1^2+7)(-6-x_1)=-c.$

$x^3+ax^2+bx+c=0.$

$-6+2x_2^2+2x_3$

$x_1^2(x_1+3x_2+3x_3)+x_2^2(x_2+3x_3+3x_1)+$
$+x_3^2(x_3+3x_2+3x_1)+6x_1x_2x_3=$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=b$

$\times\begin{array}{r}1696\\3\\\hline 5088\end{array}$ $\times\begin{array}{r}1696\\3\\\hline 5088\end{array}$

$(x-d)(x-e)(x-f)=0.$

$x^3-x^2f-x^2e+xef-x^2d+xdf+dex-def=0.$

$x^3-x^2(d+e+f)+x(de+ef+df)-def=0.$

т.е.

$\begin{cases}x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1=-a \Rightarrow \boxed{a=+12}\\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=b\\ (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=-c\end{cases}$

$x_1^2x_2+x_1^2x_3+\underbrace{x_1x_2x_3}_{-1}+x_3^2x_1+x_2^2x_1+x_3^2x_2+$
$+\underbrace{x_2x_1x_3}_{-1}+x_2^2x_3=x_1^2(x_2+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)+x_2^2(x_1+x_3)=$
$=2=$

18-97-71-42
(121.2)

Чистовик. Страница 1.

Задача 1.

$1-\sqrt{2}\cdot\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\cdot\sin x(2\sin x-\cos x)=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

В данной задаче, я буду использовать следующие тригонометрические формулы: $2\cos x\sin x=\sin 2x$; $2\sin^2 x=1-\cos 2x$; $2\cos^2 x=1+\cos 2x$. Тогда упростим исходное уравнение:

$\cancel{1}-\sqrt{2}\cdot\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cdot\cos^2\cancel{x}+2\sqrt{2}\sin^2 x-\sqrt{2}\cdot\sin x\cos x=\cancel{1}-\cos(2x+\frac{\pi}{4})$,

тогда: $\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\sqrt{2}(1+\cos 2x)-\sqrt{2}(1-\cos 2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$,

то $\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cdot\sin 2x+2\sqrt{2}\cdot\cos 2x+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}$, тогда т.к.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, то $\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}$,

тогда имеем: $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\sqrt{2}\cdot\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x$, тогда

$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x$, значит, $\cos 2x+\sin 2x=0$;

тогда $\cos 2x+\sin 2x$ можно представить в виде:

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right)=0$, тогда имеем, что $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=0$,

то т.к. $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$, то получим, что $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=0$.

Решим $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=0$, тогда

$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, тогда получим, что

$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$, тогда $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, где $k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, где $k\in\mathbb{Z}$

Задача 2.

Обозначим скорость велосипедиста за x, тогда ск-ть мотоциклиста равна $2x$. Пусть расстояние между A и B равно S. Обозначим время, за которое один из них приехал в B, причём выехал он в 13:00, за t_1. Тогда тот, который выехал раньше на

Чистовик. Страница 2.

один час, прибыл в В за $t+1$ часа.

Теперь рассмотрим все возможные случаи вероятных событий:

1) мотоциклист выехал в 12:00, а велосип. в 13:00, причём мотоц. сделал перерыв в 2 часа.

Получим: $\begin{cases} t+1 = 2 + \dfrac{S}{2x} \\ t = \dfrac{S}{x} \end{cases}$ подставим $\Rightarrow$ тогда $t+1 = 2 + \dfrac{S}{x}\cdot\dfrac{1}{2} = 2 + \dfrac{t}{2}$,

т.е. $2t+2 = 4+t \Rightarrow t = 2$, значит, они приехал в 15:00.

2) мотоц. выехал в 12:00, а велосип. в 13:00 и сделал остановку в 2 часа.

Получим: $\begin{cases} t+1 = \dfrac{S}{2x} \\ t = \dfrac{S}{x} + 2 \end{cases}$ $\Rightarrow 2(t+1) = \dfrac{S}{x}$ подставим, тогда $t = 2t+4 \Rightarrow t = -4$,

чего быть не может, значит, данный случай не подходит.

3) мотоц. выехал в 13:00, а велосип в 12:00 и сделал остановку в 2 часа. Получим: $\cancel{\begin{cases} t+1 = \dfrac{S}{2x} \\ t = \dfrac{S}{2x} \end{cases}}$ $\begin{cases} t+1 = \dfrac{S}{x} + 2 \\ t = \dfrac{S}{2x} \end{cases}$ подставим $\Rightarrow 2t = \dfrac{S}{x}$ т.е. $t+1 = 2t+2$

$t = -1$, чего быть не может, значит, случай нереальный.

4) мотоц. выехал в 13:00, а велосип. в 12:00, причём мотоц. сделал перерыв в 2 часа. Получим: $\begin{cases} t = \dfrac{S}{2x} + 2 \\ t+1 = \dfrac{S}{x} \end{cases}$ подставим, тогда

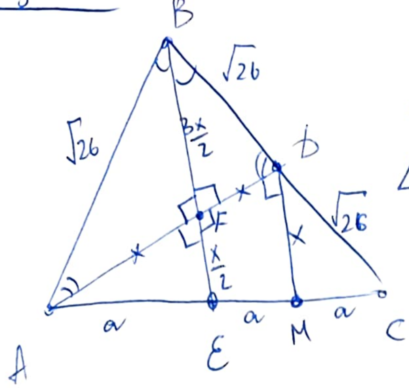
$t = \dfrac{t+1}{2} + 2 \Rightarrow 2t = t+5 \Rightarrow t = 5$, т.е. они прибыли в 18:00.

Из всех рассмотренных случаев (приведены выше) возможна лишь 2: они приехали либо в 18:00, либо в 15:00.

Ответ: либо в 15:00, либо в 18:00.

Чистовик. Страница 3

Задача 4.



Дано: $\triangle ABC$

AD - медиана

BE - биссектриса

$AB = \sqrt{26}$

$AD \perp BE$;

$AD = BE$

S_{ABC} - ?

Пусть $BE \cap AD = F$, тогда т.к. ~~$\triangle ABF$~~ $\angle ABF = \angle FBD$ и $\angle BFA = \angle BFD$, то $\angle BAF = \angle BDF$, что говорит о том, что $\triangle ABD$ - р/б, то ~~ABD~~ $BD = \sqrt{26} = AB$. Тогда т.к. $BD = DC$, то $DC = \sqrt{26}$.

По св-ву биссектрис: $\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BD}$, также $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$, тогда т.к. $\frac{AB}{BD} = 1$, то $AF = FD$, а $\frac{AE}{EC} = \frac{\cancel{\sqrt{26}}}{2\cancel{\sqrt{26}}} = \frac{1}{2}$. Тогда обозначим AF за x, то $AF = FD = x$, а $AE = a$, то $EC = 2a$. В $\triangle BEC$ проведём сред. линию DM, тогда $DM \parallel BE$ и $DM = \frac{BE}{2}$, также $EM = MC = \frac{EC}{2} = \frac{2a}{2} = a$. Тогда т.к. $BE = AD = 2x$, то $DM = \frac{2x}{2} = x$. т.к. $BE \parallel DM$, $BE \perp AD$, то $\angle AFE = \angle ADM = 90^\circ$, как соответств. при параллельных прямых. В $\triangle ADM$ FE - сред. линия, т.к. $FE \parallel DM$, $AF = FD$ (также $AE = EM$), что говорит о том, что $FE = \frac{DM}{2} = \frac{x}{2}$, тогда получим, что $BF = BE - FE = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$. Тогда найдём x в $\triangle BFD$ по т. Пифагора: $\frac{9x^2}{4} + x^2 = 26$, то $\frac{13x^2}{4} = 26$, то $x^2 = 8$; теперь найдём площадь $\triangle ABC$:

т.к. AD - медиана, то $S_{ADB} = S_{ADC}$, а $S_{ADB} = 2S_{BFD}$, где $S_{BFD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot FD = \frac{3x^2}{4}$, тогда $S_{ABD} = 2S_{BFD} = \frac{3x^2}{2}$, то $S_{ABC} = 2S_{ABD} = 3x^2 = 3 \cdot 8 = 24$

Ответ: 24.

Чистовик. Страница 4.

Задача 3.

$x^3+6x^2+7x+1=0$ имеет корни x_1, x_2, x_3, тогда данное уравнение можно записать в виде:

$x^3+6x^2+7x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, откуда получим, что $x^3-x^2(x_1+x_2+x_3)+x(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3=0$, тогда получим:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}.$$

Теперь если $x^3+ax^2+bx+c=0$ и его корни x_1+x_2; x_2+x_3; x_3+x_1, то, аналогично вышепредставленной системе уравнений, получим, что:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=-a \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=b \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-c \end{cases}.$$

Отсюда, получим, что $-a=2(x_1+x_2+x_3)=2\cdot(-6)=-12$, то $\boxed{a=12}$.

теперь выразим b через x_1, x_2, x_3. Получим, что:

$x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_1x_3+x_3^2=b$,

тогда $b=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=(-6)^2+7=36+7=43$, то есть $\boxed{b=43}$

Теперь выразим c через x_1, x_2, x_3: $-c=x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_3^2x_1+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_2+x_1x_2x_3$ $\cancel{+2x_1x_2x_3+x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)}$ (*)

Заметим, что $(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_1^2x_3+3x_2^2x_1+3x_2^2x_3+$

Черновик. Страница 5.

$+3x_3^2x_1+3x_3^2x_2+6x_1x_2x_3=x_1^2(x_1+3x_2+3x_3)+x_2^2(x_2+3x_1+3x_3)+$
$+x_3^2(x_3+3x_1+3x_2)+6x_1x_2x_3$, причем $x_1+x_2+x_3=-6$, тогда

$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^2(-6+2x_2+2x_3)+x_2^2(-6+2x_1+2x_3)+x_3^2(-6+2x_1+2x_2)-$
$-6=-6x_1^2+2x_1^2x_2+2x_1^2x_3+2x_2^2x_1+2x_2^2x_3-6x_2^2-6x_3^2+2x_3^2x_1+2x_3^2x_2-$
-6, т.е. $2(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_1+x_3^2x_2)=$

$=(-6)^3+6+6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, причём $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-$
$-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=36-14=22$.

тогда $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_1+x_3^2x_2=\frac{-216+6+6\cdot 22}{2}=$

$=\frac{-210+132}{2}=-39$.

~~Тогда~~ Подставим это в выражение $(\cancel{*})$, что

$-c=-2+(-39)=-41$, то $\boxed{c=41}$

Ответ: $a=12$; $b=43$; $c=41$.

Задача 5.

$N\in\mathbb{N}$, множество $P=\{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k\}$ такое, что все делители N содержатся в множестве P, т.е. $N\,\vdots\,p_i$, где $1\le i\le k$, причём $1=p_1<p_2<p_3<\ldots<p_k=N$.

Пусть $k=\sigma(N)$.

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\ge N^2$. $\qquad \sigma(N^3)-?$

т.к. $p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\ge N^2$, то пусть $p_{1696}=\frac{N}{p_{k-1695}}$, Черновик. Страница 6.

а $p_{1697} = \dfrac{N}{p_{k-1696}}$. Такая запись верна, т.к. $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, ~~тк~~ тогда можно сделать вывод, что $p_k \cdot p_1 = N$, $p_2 \cdot p_{k-1} = N$, $p_i \cdot p_{k-i+1} = N$, тогда действительно

$p_{1697} = \dfrac{N}{p_{k-1696}}$ и $p_{1696} = \dfrac{N}{p_{k-1695}}$, тогда

$p_3 \cdot p_4 \cdot \dfrac{N^2}{(p_{k-1695})(p_{k-1696})} \geq N^2$, то $p_3 \cdot p_4 \geq (p_{k-1695}) \times (p_{k-1696})$,

тогда ~~тк~~ т.к. $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$, то такое возможно только тогда, когда $3 = k-1696$ и $4 = k-1695$, или, записав иначе $p_3 \cdot p_4 \geq p_3 \cdot p_4$, или ещё возможный случай, когда

$p_3 \cdot p_4 \geq p_2 \cdot p_3$ и $p_3 \cdot p_4 \geq p_1 \cdot p_2$, т.е. значения, которые может принимать k, это $k_1 = 1697$; $k_2 = 1698$ или $k_3 = 1699$.

тогда т.к. пусть $N = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot a_3^{\alpha_3} \times \ldots \times a_n^{\alpha_n}$, причем a_i - простые, то $k = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) \times \ldots \times (\alpha_n+1)$.

Тогда $N^3 = a_1^{3\alpha_1} \cdot a_2^{3\alpha_2} \cdot a_3^{3\alpha_3} \times \ldots \times a_n^{3\alpha_n}$, т.е. $\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1) \times (3\alpha_2+1)(3\alpha_3+1) \times \ldots \times (3\alpha_n+1)$.

Теперь найдём возможные значения $\sigma(N^3)$:

1) если $k = 1697$, то т.к. 1697 – простое число, то

$k = (1696+1) \Rightarrow \alpha = 1696$, т.е. $\sigma(N^3) = 3 \cdot 1696 + 1 = 5089$.

Чистовик. Страница 7.

~~2) если $k = 1698$, то т.к. $1698 = 849 \cdot 2 = 283 \cdot 2 \cdot 3$, то~~

~~$1698 = (1+1)(2+1)(282+1)$~~

2) если $k = 1699$, то т.к. 1699 – простое, то

$k = (1698+1)$, значит $\alpha = 1698$, то

$\sigma(N^3) = 3 \cdot 1698 + 1 = 5095$.

3) если $k = 1698$, то т.к. $1698 = 2 \cdot 3 \cdot 283$, то

$1698 = (1+1)(2+1)(282+1) = (1+1)(848+1) = (2+1)(565+1) =$

$= (5+1)(282+1)$, то здесь возможные ~~$\sigma(N^3) = 3 \cdot 6 \cdot 282$~~

$\sigma(N^3)$ будут $(3+1)(6+1)(846+1) = 847 \cdot 7 \cdot 4 = 847 \cdot 28$,

либо $(3 \cdot 848+1)(3+1) = 2545 \cdot 4 = 10180$, либо

$7 \cdot 1665$, либо $16 \cdot 847$.

Все случаи рассмотрены, значит, всего 6 вариантов.

Ответ: 5095; $7 \cdot 1665$; $16 \cdot 847$; 10180; $847 \cdot 28$; 5089;

$7 \cdot 1665 = 11665$; $16 \cdot 847 = 13552$; $847 \cdot 28 = 23716$