0 026210 350001

02-62-10-35
(141.1)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8 класс

Место проведения Волгоград
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бричко Макара Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 02-62-1035 | 98 | 21 | — | 14 | 21 | 21 | 21 | X | X |

02-62-10-35
(141.1)

Чистовик

98 (Девяносто восемь)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

№1

Давайте будем рассматривать кол-во пустых пакетов поочередно. Заметим, что если в пустой пакет мы положим 5 пакетов, то кол-во пустых увеличится на 4 (т.к. изначальный перестал быть пустым). Вначале был 1 пустой пакет, значит кол-во пустых пакетов равно $1+4x$, где $x$ - кол-во пакетов с пятью пакетами внутри (в этих пяти тоже могут быть пакеты)

$1+4x=101$

$x=25$

Всего пакетов: $1+5x=126$

Ответ: 126

Чистовик
№3

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

Заметим, что $2^{p-1}$ - четное, 3 - нечетное, значит $p^q - q^p$ - тоже нечетное. Значит или $p$ - четное, или $q$ - четное. Рассмотрим 2 случая:

1) $p$ - четное. Тогда $p = 2$ (т.к. $p$ - простое).

$2^q - q^2 + 3 = 2^1$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q = q^2 - 1$

$q = 3$

при $q > 3$, $2^q > q^2$ (видно, если составить их графики, получится, что $2^q$ возрастает быстрее)

2) $q$ - четное. $q = 2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^p$

$p^2 + 3 = 2^{p+1}$

Тут графики ~~для~~ $y = p^2 + 3$ и $y = 2^{p+1}$ пересекаются при $p = 1$, но при ~~остальных~~ $p > 1$ $y = 2^{p+1}$ возрастает быстрее)

Ответ: $p = 2$, $q = 3$

Чистовик

№4

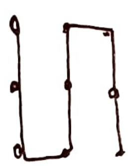
Заметим, что всего перекрестков $23 \cdot 10 = 230$.

Всего дорог между перекрестками:

$(23-1) \cdot 10 + (10-1) \cdot 23 = 427$ дорог. Заметим, что чтобы граф из $n$ вершин был связным, нужно минимум $n-1$ ребро. Значит для 230 перекрестков потребуется минимум 229 дорог. Значит максимум можно удалить $427 - 229 = 198$ дорог.

Пример на 198:

~~Ну~~ Оставим дороги зиг загом:



– Тогда как раз-таки будет 229 дорог оставшихся.

№5

Докажем по индукции, что $b_n = 2^{(n-2)^2}$. Для этого давайте заместо наших чисел будем записывать степень двойки этих чисел, то есть:

$a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$

$b_n = \dfrac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$ – отсюда видно, что все числа последовательности – степени двоек.

$a_n = a_{n-1} \cdot 3 + a_{n-3} - a_{n-2} \cdot 3$ – уравнение для последовательности $a$.

Теперь запишем индукционное предположение для последовательности $a$

↳

Чистовик

№5 продолжение

И П: каждый следующий член последовательности $a$, кроме $a_1, a_2, a_3$, равен $a_n=(n-2)^2$.

База индукции:

$a_4 = 1\cdot 3+1-0=4$

$a_5 = 4\cdot 3+0-3\cdot 1=9$

$a_6 = 9\cdot 3+1-3\cdot 4=16$

Переход:

$a_{n+1}=a_n\cdot 3+a_{n-2}-a_{n-1}\cdot 3$

$a_{n+1}=(n-2)^2\cdot 3+(n-4)^2-(n-3)^2\cdot 3$

$a_{n+1}=(n^2-4n+4)\cdot 3+n^2-8n+16-(n^2-6n+9)\cdot 3$

$a_{n+1}=3n^2-12n+12+n^2-8n+16-3n^2+18n-27$

$a_{n+1}=-2n+1+n^2=(n-1)^2$ — что и требовалось доказать

Значит:

$a_{2023}=(2023-2)^2$

$b_{2023}=2^{2021^2}$

Ответ: $2^{2021^2}$

Чистовик
№ 6

Ответ: Алиса

Стратегия:

| | |
|---|---|
| П - 1 | |
| О - 5 | |
| К - ~~3~~1 | |
| Р - 3 | |
| И - 1 | |
| В - 2 | |
| Б - 1 | |
| Ь - 1 | |
| Е - 1 | |
| Ы - 2 | |
| 2 - 1 | |

Заметим, что букв, которые встречаются 1 раз - 7 шт., 2 раза - 2 шт., 5 раз - 1 шт., 3 раза - 1 шт. Пусть первым ходом Алиса уберет 3 буквы О. Тогда станет:

"1" - 7
"2" - 3
"3" - 1

$\Rightarrow$ 1, 1 ... 1, 2, 3, 2, 2

Разобьем на группы:

1) единички
2) 2 и 3
3) две 2

Заметим, что если Боря уберет 1 букву из 1 группы, то Алиса может убрать из букв Р еще 1 букву и тогда выйдет симметрия; т.к. станет 6-"1", 4-"2" и Алиса может разбить их на 2 группы, где по 2 буквы с кол-вом 2 и 3 буквы с кол-вом 1. Если Боря уберет букву или буквы из 3 группы, то Алиса может сходить симметрично со второй буквой в группе.

Продолжение

Чистовик

№6 продолжение

Если Боря ~~[illegible]~~ зачеркнет букву из 2-ой группы, то:

1) останется 2 и 2. Тогда Алиса зачеркивает букву с кол-вом 1 и ходит симметрично

2) останется 3 и 1 или 2 и 1. Тогда Алиса зачеркивает 3 или 2 и ходит симметрично.

3) останется 3 и 0 или 2 и 0, тогда Алиса делает так, чтобы стало 1 и 0 и тоже ходит симметрично

В каждом варианте станет четное кол-во букв с кол-вом 1 и с кол-вом 2. Значит Алиса сможет ходить симметрично.

Ответ: Алиса

Черновик

№1

$1+4+4\ldots+4=101$

№2

$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{400}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+$

$-41$ $-41$ $15$ $26$

$x\cdot 2^{-15}=2\cdot 2^{-42}$

$2,1,2,2^4,2^4,2,2^{-5},x^{-11},2^{-26},$

$b_n=\frac{b_{n-3}\cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$ $\frac{27+1}{1}-12$

№4

$x\cdot 2^3=2^4\cdot 2^{-15}=2^{-11}$

$\cancel{2\cdot a^3=}$ $2,1,2,2^4,$ $\cancel{\frac{1\cdot 2^{12}}{2^3}}$ $x=2^{-14}$

$b_n\cdot 1^3=2\cdot 2^3$ $2,1,2,2^4,2^9,2^{16}$ $\cancel{1+2+7}$ $\frac{2^{24}\cdot 2}{2^{12}}$

$b_n=2^4$

$2\ 1\ 2\ 2^4,\ x$

$b_1\ b$ $1,0,1,4,9,16,$

$x\cdot 2^3=1\cdot 2^{12}$

$2\ 1\ 2\ 2^4,2^4,$ $a^2$ $\cancel{(a-1)^2}$ $3(a-1)+$

$x\cdot 2^3=2^4\cdot 2^{12}$

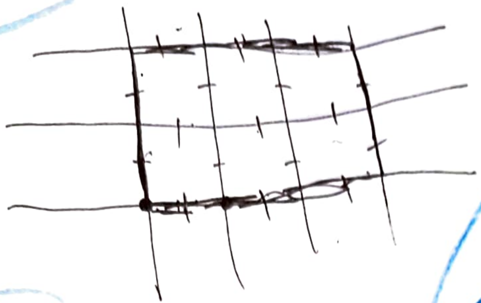
$2\ 2^4\ 2^4\ \cancel{x}\ x$

$a^2=(a-1)^2\cdot 3+(a-3)^2-(a-2)^2\cdot 3$ $\cancel{x\cdot 2^4\cdot 3=2\cdot 2^4}$

$3a^2-2a+1$ $x\cdot 2^{12}=2^4\cdot 2^3$

$3a^2-6a+3+a^2-6a+9-3a^2+12a$ $x\cdot 2^{12}=2^7$

Черновик №4



3 4

8 9

17

230

$(23-1)\cdot 10+(10-1)\cdot 23$

$601 : 17$: $-601$, $51$, $91$

№2

$601 : 23$: $-601$, $46$, $141$, $2.$

61-прост

$601 : 7$: $-601$, $56$, $4$

$601 : 19$: $-601$, $57$, $3$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$601 : 13$: $-601$, $52$, $81$

$601 :$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8}\ \dots\ +\frac{1}{337\cdot 338}+\frac{1}{339}-\frac{1}{400}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}=$

$\frac{37}{60}$

$\frac{338!:(7\cdot 8)}{338!}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{30+5+2}{60}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3\cdot 4+1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

$\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

$\frac{\phantom{338!}}{338!}$

$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1\cdot 2\cdot 5\cdot 6+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

Черновик

N6

П - 1
О - 5
К - 1
Р - 3
И - 1
В - 2
Б - 1
Б - 1
~~Е - 1~~
Ы - 2
Г - 1

11

×22
1

220

×9
23
207

427

?

$\underbrace{1\ 1 \dots 1}$ 2 3 $\underbrace{2\ 2}$

7 - 1 , 1 - 5 , 1 - 3 , 2 - 2

2 3

4 3

2

4 3 5 2

1) 2 3

2) 4 2

7 - 1 , 1 - 3 , 2 - 2

2 3

1 1 1 1 1 1 1 , 3 3 , 2 2

4 3

1) 2 3 2 1

2) 4 2

4 3
2 3