0 989353 930007

98-93-53-93
(123.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Корнилина Павла Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
98-93-53-93	85	20	20	20	20	0	5		

черновик

1. $1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x+\cos x)=$
$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

~~sin x - 2cos x~~

$1+\sqrt{2}\cos x\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\cos x\sin x=$
$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

$1+\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=/$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha \Rightarrow \sin\alpha^2=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$2\cos^2\alpha-1=$
$1-2\sin^2\alpha=$

$/=1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x-\cos 2x)$

$2\sqrt{2}\sin 2x-4\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x=0$
$3\sqrt{2}\sin 2x-5\sqrt{2}\cos 2x=0$
$3\sin 2x-5\cos 2x=0$

$\sqrt{34}\sin(2x+\varphi)=0$, где $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\sin\varphi=\frac{-5}{\sqrt{34}}$

$2x+\varphi=\cancel{\ldots}\ \pi n, n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{-\arcsin\frac{-5}{\sqrt{34}}}{2}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}=\frac{\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}}{2}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$

2

1) 12:00
2) 11:00

A B

остановку делал автомобиль

1) авт. в 12:00 → 14:00, 11:00 | => время приб. 17:00

2) авт. в 11:00 → 13:00, 12:00 | => время приб. 14:00

3. $x^3+6x^2+7x+1=0$ - корни x_1, x_2, x_3

$x^3+ax^2+bx+c=0$ - корни $(x_1+x_2), (x_2+x_3), (x_3+x_1)$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3$

$(x-\underset{1}{1})(x-\underset{2}{2})(x-\underset{3}{3})=(x^2-3x+2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-6$ (−)
$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_3=11$ (+)
$x_1+x_2+x_3=6$ (−)

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1,$
$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=7$
$x_1+x_2+x_3=-6$

черновик

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1$

$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_3=7$

$x_1+x_2+x_3=-6$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=(x_1x_2+x_2^2+x_2x_3+x_1x_3)(x_3+x_1)=$

$=x_1^2x_2+x_1x_2^2+\underbrace{x_1x_2x_3}+x_1^2x_3+\underbrace{x_1x_2x_3}+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1x_3^2=$

$=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+2x_1x_2x_3=$

$\cancel{=x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)+2x_1x_2x_3=}$

$\cancel{=x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)+\;-\!\!\parallel\!\!-}$

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=a(ab+ac)+$

$+b(ab+bc)+c(bc+ac)=a(7-bc)+b(7-ac)+c(7-ab)-$

$=7(a+b+c)-3abc$

$7(a+b+c)-3abc$

$=x_1(x_1x_2+x_1x_3)+\ldots+2x_1x_2x_3=\ldots=7\cdot(-6)-(-1)=-41$

$x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1=2\cdot(-6)=-12=-a\Rightarrow \underline{a=12}$ $\qquad =-c \Rightarrow \underline{c=41}$

$(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$

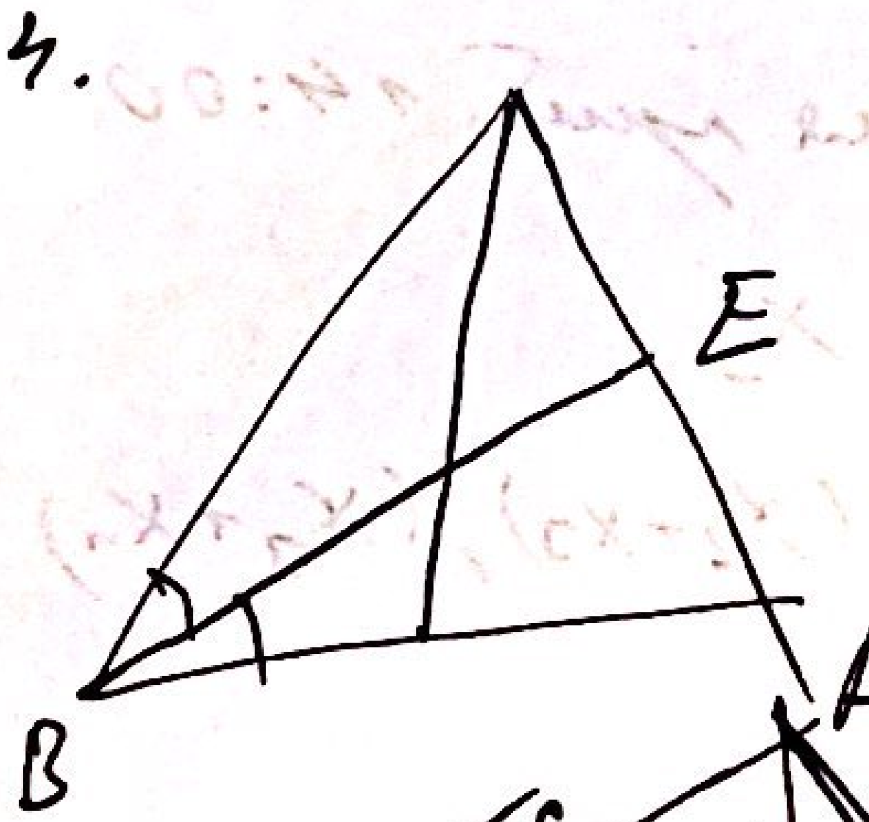
$=x_1^2+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+$

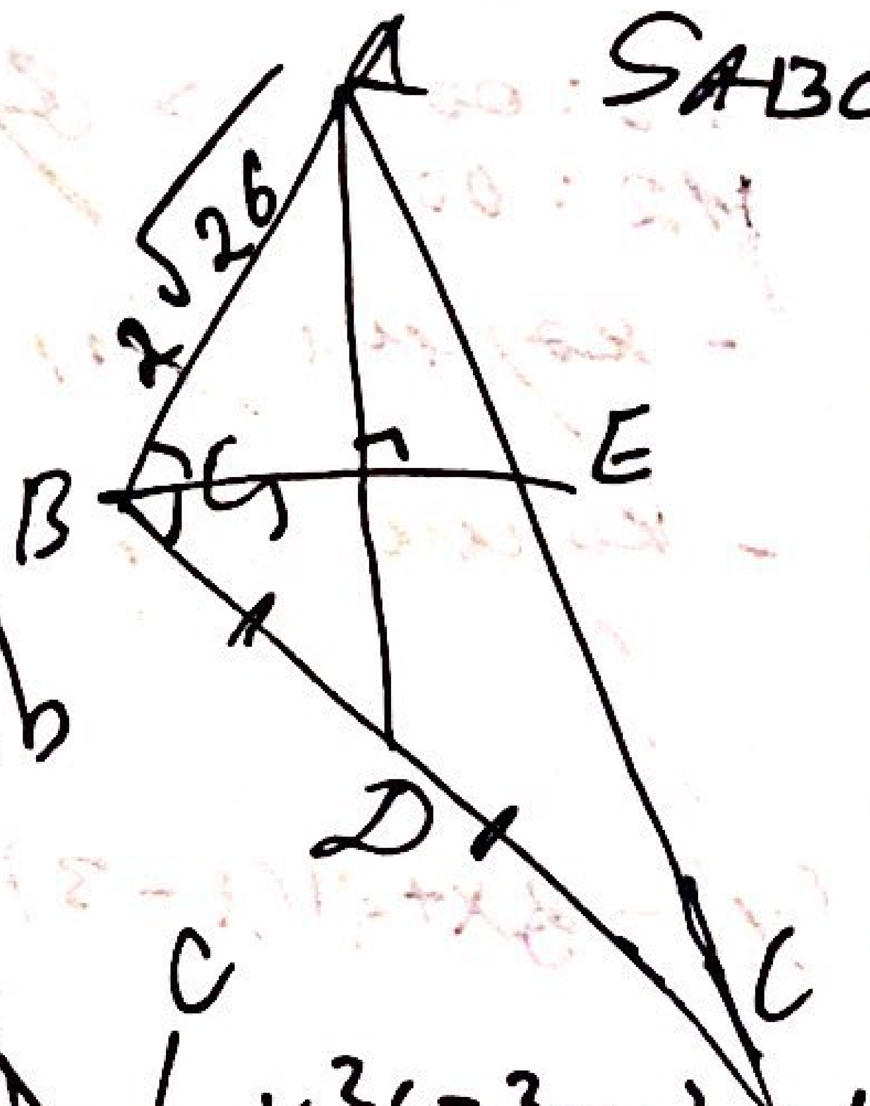
$+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2=36+7=\underline{43=b}$

$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+2ab+2ac+b^2+c^2+2bc$

4.

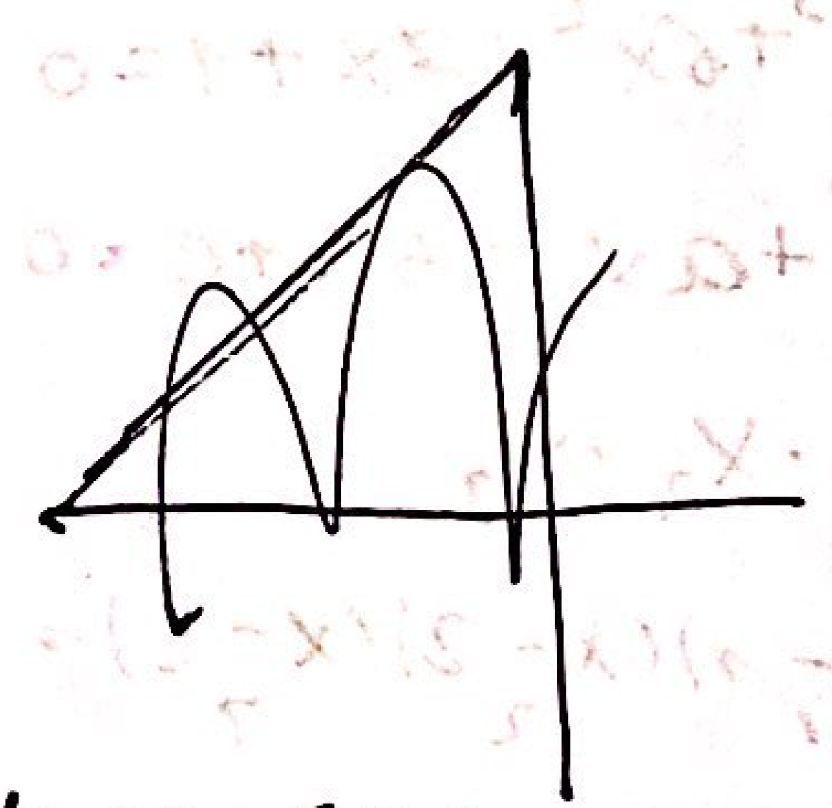


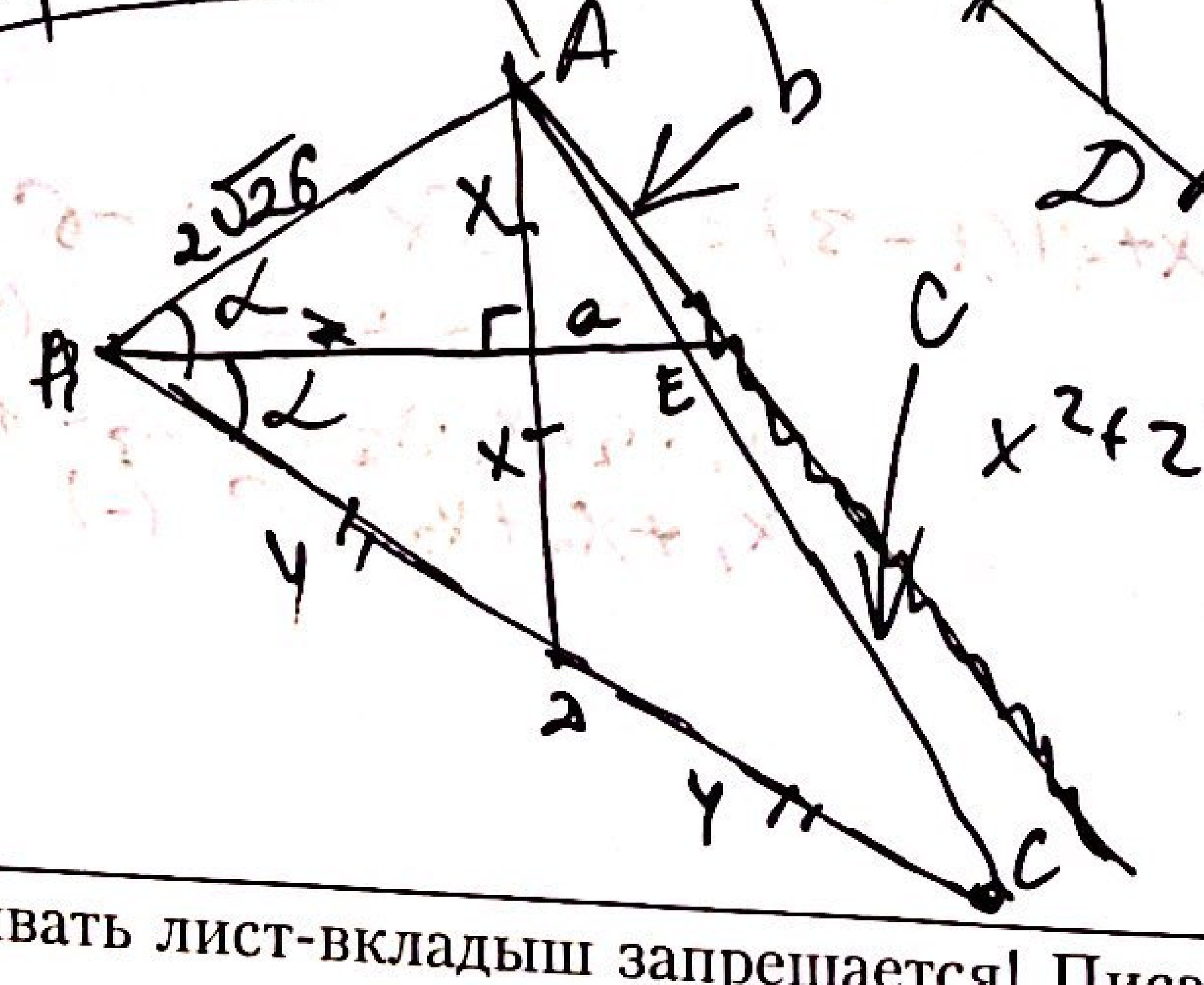


S_{ABC} -?

$AD=BE,$

$AD\perp BE$





$x^2+2^2=y^2=4\cdot26=104$

$BC=2\cdot\sqrt{104}=4\sqrt{26}$

98-93-53-93 (123.10)

черновик

$z + a = 2x \Rightarrow z = 2x - a$

$x^2 + z^2 = 104$

$x^2 + (2x-a)^2 = 104$

$x^2 + 4x^2 - 4ax + a^2 = 104$

$5x^2 - 4ax + a^2 - 104 = 0$

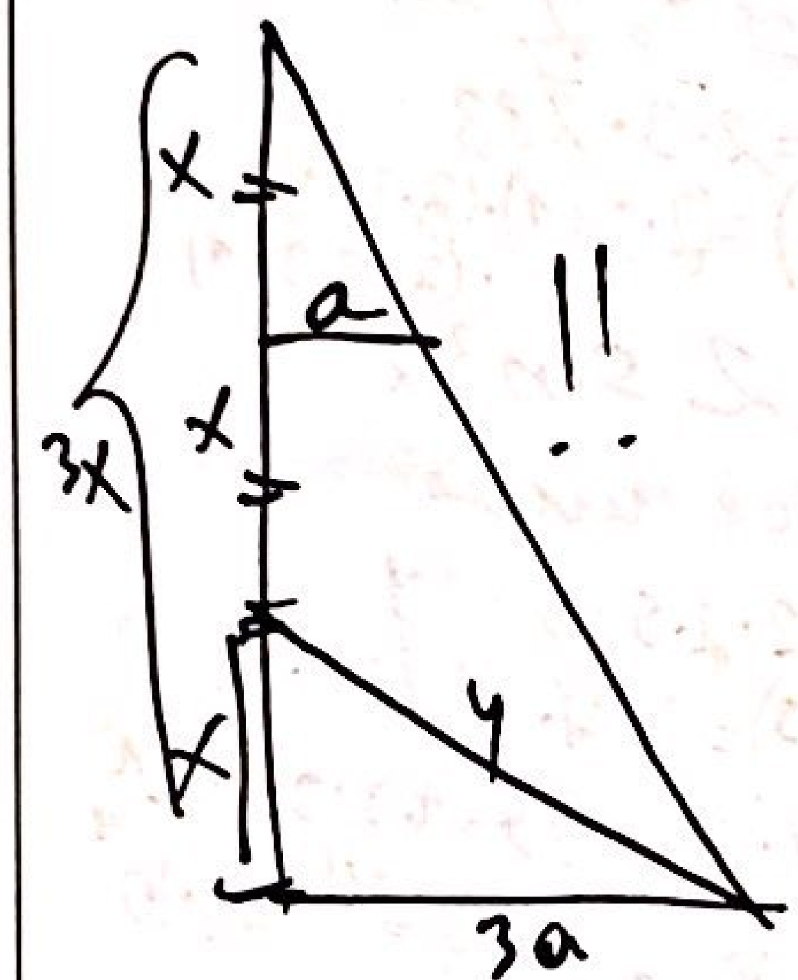
$\sin\alpha = \frac{x}{2\sqrt{26}}, \cos\alpha = \frac{z}{2\sqrt{26}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2xz}{4\cdot 26} = \frac{xz}{52} = \frac{(2x-a)\cdot x}{52} =$

$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$ (т.к. BE - биссек.)

$AC = 3b = 3\sqrt{x^2+a^2}$

$= \frac{6a^2}{52} = \frac{6\cdot 8}{52} = \frac{12}{13}$



!!

$AO = x = 4\sqrt{2}$

$BO = z = 6\sqrt{2}$

$2AO\cdot BO = 96$

$3a = z!$

$3a = 2x - a$

$4a = 2x$

$x = 2a$

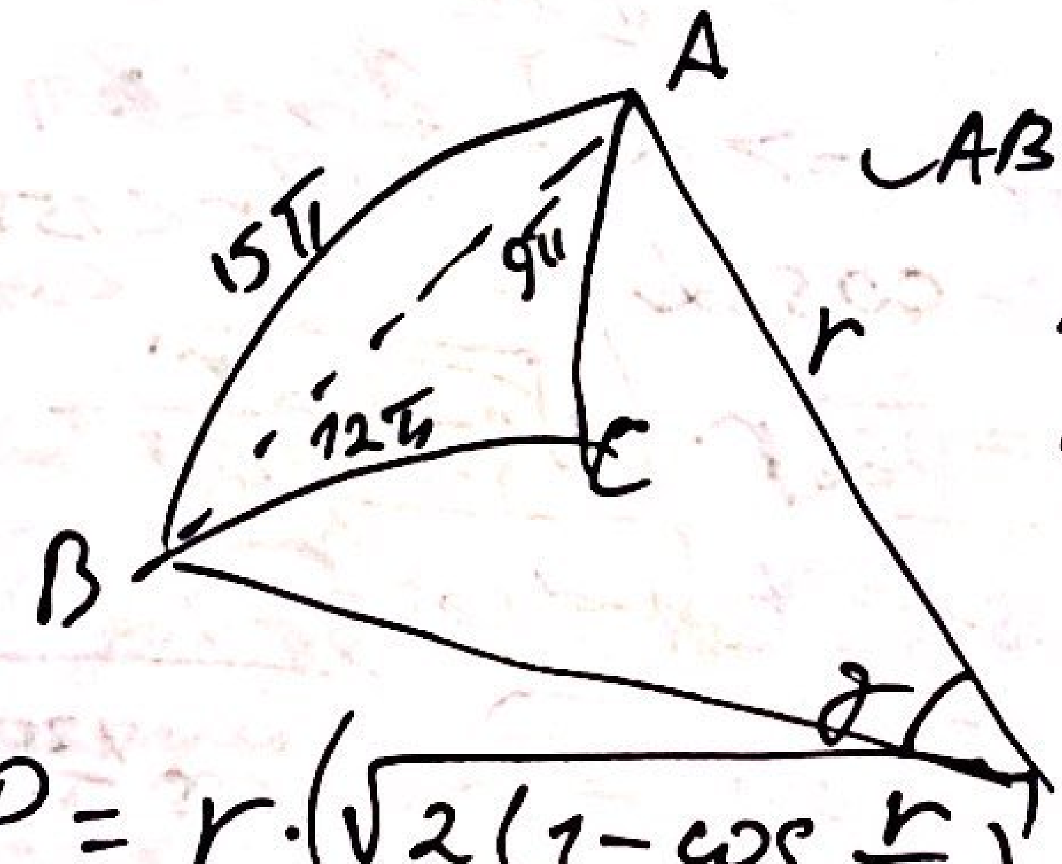
$z = 2x - a = 3a$

$y = a\cdot\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}a = 2\sqrt{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{26}\cdot 4\sqrt{26}\cdot\frac{12}{13} = \frac{6}{13}\cdot 8\cdot 26 = 96$

5.



$\smile AB = 15\pi = r\cdot\gamma$

$AB = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cdot\cos\gamma} = r\cdot\sqrt{2(1-\cos\gamma)}$

$\gamma = \frac{r}{15\pi}$

$P = r\cdot\left(\sqrt{2\left(1-\cos\frac{r}{15\pi}\right)} + \sqrt{2\left(1-\cos\frac{r}{12\pi}\right)} + \sqrt{2\left(1-\cos\frac{r}{9\pi}\right)}\right) -$

миним. при ~~22 30~~

6. $1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$ $\quad\sigma(N)$ - кол-во нат. дел.

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697} \geq N^2$ $\quad\sigma(N^3)$ - ?

$N^2 = p_3\cdot p_{k-3}\cdot p_4\cdot p_{k-4}$, где $k = \sigma(N)$

$p_{1696}\cdot p_{1697} \geq p_{k-3}\cdot p_{k-4} \Rightarrow \sigma(N) \leq 1701$

$p_{k-3} = \frac{N}{p_3}$ $\quad$ ~~$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}$~~ $\quad\sigma(N) \geq 1697$

~~1697~~ ~~1697~~ $1700\cdot 1$

$1699\cdot 2$

$1698\cdot 3$

$1697\cdot 4$

$p_3\cdot p_4\cdot$ $\quad\sigma(N) = 1697, 1698, 1699, 1700, 1701$

черновик

$\sigma(N) = 1697, 1698, 1699, 1700$

$\sigma(N^3) - ?$

$\sigma(2) = 2 \quad (1, 2)$

$\sigma(8) = 4 \quad (1, 2, 4, 8)$

$\sigma(3) = 2, \quad \sigma(27) = 4$

$\sigma(6) = 4 \quad (1, 2, 3, 6)$

$\sigma(216) = 16 \quad (1, 2, 3, 6, 4, 9, 12$

$\sin \frac{15\pi}{2} = -1$

$\times \begin{array}{r} 1697 \\ 3 \\ \hline 5091 \end{array}$

$\sin 6\pi = 0$

$\sin \frac{9\pi}{2} = 1$

$\cos \frac{15\pi}{2} = 0$

$\cos \frac{2\pi}{2} = 0$

$\cos \frac{12\pi}{2} = 1$

$216 = 2^3 \cdot 3^3$

2 \ 3	0	1	2	3
0	1	3	9	27
1	2	6	18	54
2	4	12	36	108
3	8	24	72	216

1697 = простое число

$\sigma(N^3) = 1697^a \cdot 2 + 1$

$1698 = 3 \cdot 566 = 2 \cdot 3 \cdot 283$

$\sigma(N^3) = (2 \cdot 3+1) \cdot (3 \cdot 3+1) \cdot (283 \cdot 3+1)$

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

1699 - простое число

$1700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$

$\sigma(N^3) = 7 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 52$

$\sigma(12) = 6$

$(1, 2, 3, 4, 6, 12)$

$\sigma(12^3) =$

4 48

5 96

6 192 576 1728

$12^3 = 144 \cdot 12 = 1440 + 288 = 1728$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$170 \ 1 = 3 \cdot 3 \cdot 189 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\sigma(N^3) = 64 \cdot 10$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x$

$7 \cdot 4 = 28$

$2^2 \cdot 3$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$6 \quad 3$

$\alpha = \frac{15\pi}{r}$

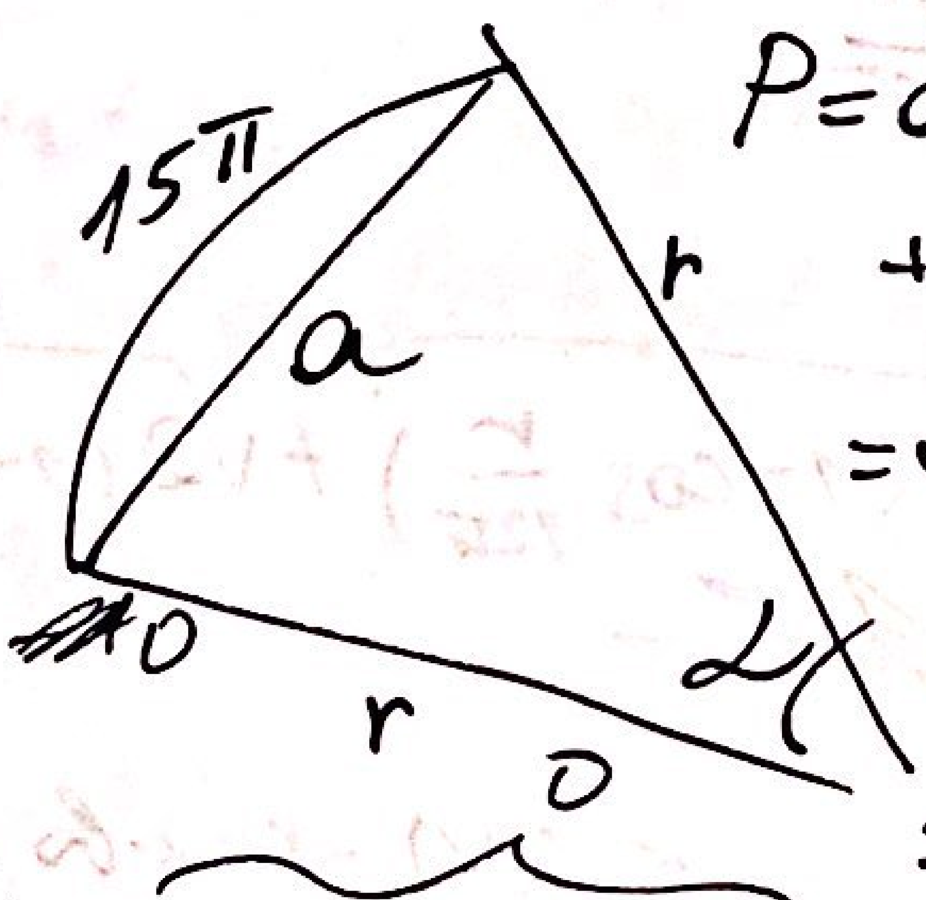
$15\pi = r \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{15\pi}{r}$

$r < 15\pi^2$

$r < 9\pi^2$

$a^2 = 2r^2(1 - \cos\alpha)$

$P = a + b + c = \sqrt{2}\, r \cdot \left(\sqrt{1 - \cos\frac{15\pi}{r}} + \sqrt{1 - \cos\frac{12\pi}{r}} + \sqrt{1 - \cos\frac{9\pi}{r}}\right)$



$= \sqrt{2}\, r \cdot \left(\sqrt{1 - \cos\frac{15\pi}{r}} + \sqrt{1 - \cos\frac{12\pi}{r}} + \sqrt{1 - \cos\frac{9\pi}{r}}\right) =$

$\sin 5\pi = 0$

$= 2r \cdot \left(\left|\sin\frac{15\pi}{r}\right| + \left|\sin\frac{12\pi}{r}\right| + \left|\sin\frac{9\pi}{r}\right|\right) =$

$P' = 2\left(\left|\sin\frac{15\pi}{r}\right| + \left|\sin\frac{12\pi}{r}\right| + \left|\sin\frac{9\pi}{r}\right|\right) + 2r \cdot \frac{\cos\frac{15\pi}{r}}{r^2} + \frac{2\cos\frac{12\pi}{r}}{r} + \frac{2\cos\frac{9\pi}{r}}{r}$

$= 0$ при

$\cos 5\pi = -1 \quad \cos 4\pi = 1 \quad \cos 3\pi =$

$\sin\frac{15\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{12\pi}{4} = 0, \quad \sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{15\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{12\pi}{4} = -1 \quad \cos\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

98-93-53-93
(123.10)

чистовик (№1)

№1. $1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x+\cos x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

$1+\sqrt{2}\cos x\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

т.к. $2\cos x\sin x=\sin 2x$; $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$; $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{2}$,

то: $1+\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x+\sin 2x)$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x+\sin 2x) \quad \Big| \cdot\sqrt{2}$

$2\sin 2x-4\cos 2x+\cos 2x+\sin 2x=0$

$3\sin 2x-3\cos 2x=0 \quad \Big| : 3\cos 2x\neq 0$

$\operatorname{tg} 2x=1 \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$.

~~№2 I) Пусть автомобилист выехал в 12:00, тогда велосипедист выехал в 11:00. Т.к. скорость велосипедиста меньше, то он не мог сделать остановку, иначе ехал бы на 1 час меньше автомобилиста. Пусть приехали в x часов, длина дороги S км~~

~~$v_a=\frac{S}{x-12-2}=\frac{S}{x-14}$ - скорость автомобилиста~~

~~$v_в=\frac{S}{x-11}$ - скорость велосипедиста~~

~~$v_a=2v_в \Rightarrow \frac{1}{x-14}=\frac{2}{x-11} \Rightarrow x-11=2x-28 \Rightarrow x=17$ (ч) - время приезда~~

~~II) Пусть автомобилист выехал в 11:00, тогда велосипедист выехал в 12:00. Рассуждая аналогично, остановку сделал автомобилист.~~

~~$v_a=\frac{S}{x-11-2}=\frac{S}{x-13}$ - скорость автомобилиста~~

~~$v_в=\frac{S}{x-12}$ - скорость велосипедиста~~

~~$v_a=2v_в \Rightarrow \frac{1}{x-13}=\frac{2}{x-12} \Rightarrow 2x-26=x-12 \Rightarrow x=14$ (ч) - время приезда~~

~~Ответ: в 14:00 или в 17:00~~

чистовик. (№3)

№3. $x^3+6x^2+7x+1=0$

x_1, x_2, x_3 - корни => по теореме Виета для корней кубического уравнения:

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7$

$x_1+x_2+x_3=-6$

$x^3+ax^2+bx+c=0$

$(x_1+x_2), (x_2+x_3), (x_3+x_1)$ - корни =>

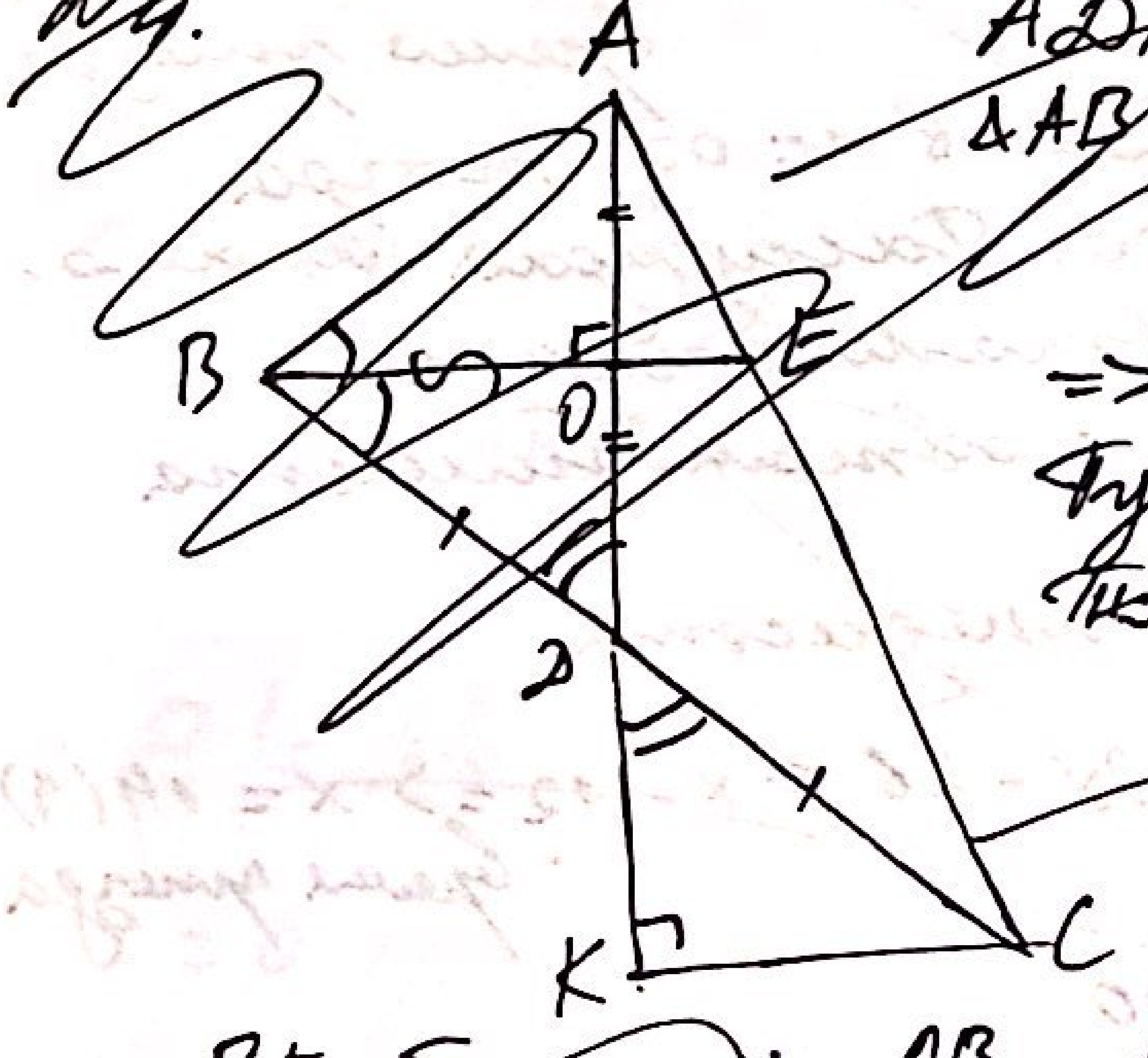
$\Rightarrow 1)\ c=-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=-(x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3)\cdot(x_2+x_3)=-(x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_1x_2x_3+x_2x_3^2)=-(2x_1x_2x_3+x_1(x_1x_2+x_1x_3)+x_2(x_1x_2+x_2x_3)+x_3(x_1x_3+x_2x_3))=-(2\cdot(-1)+x_1\cdot(7-x_2x_3)+x_2(7-x_1x_3)+x_3(7-x_1x_2))=-(-2+7(x_1+x_2+x_3)-3x_1x_2x_3)=2-(7\cdot(-6)-3\cdot(-1))=2-(-42+3)=2-(-39)=41$

$2)\ b=(x_1+x_2)\cdot(x_1+x_3)+(x_1+x_2)\cdot(x_2+x_3)+(x_2+x_3)\cdot(x_1+x_3)=x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_2x_1+x_3x_1+x_2x_3+x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_1x_3+3x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=(-6)^2+7=43$

$3)\ a=-((x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_2+x_3))=-2(x_1+x_2+x_3)=-2\cdot(-6)=12$

Ответ: $a=12,\ b=43,\ c=41$

№4.



$AD\cap BE=O$

$\Delta ABO=\Delta DBO$, т.к. $\angle ABO=\angle DBO$, $\angle AOB=\angle DOB=90°$, $AO=OD$, BO - общая

$\Rightarrow AB=BD=2\sqrt{26}=CD$. $BC=BD+CD=4\sqrt{26}$

Пусть $\angle ABO=\alpha=\angle DBO$.

Тогда $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin2\alpha=AB\cdot BC\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2AB^2\cdot\frac{AO}{AB}\cdot\frac{BO}{AB}=2AO\cdot BO$

BE - биссек. $\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$

Достроим ΔADC до прямоуг. ΔAKC (см. рис.). Тогда $\Delta AOE\sim\Delta AKC$ (по 2 угл.) с коэф. подобия $K=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow$
$\Rightarrow KC=3OE$.

$\Delta BOD=\Delta CKD$ (по остр. углу и гипотен.) $\Rightarrow BO=KC=3OE$

чистовик (№4)

~~№4 (продолжение)~~

$AD = BE \Rightarrow \frac{4}{3}BO = 2AO \Rightarrow AO = \frac{2}{3}BO$

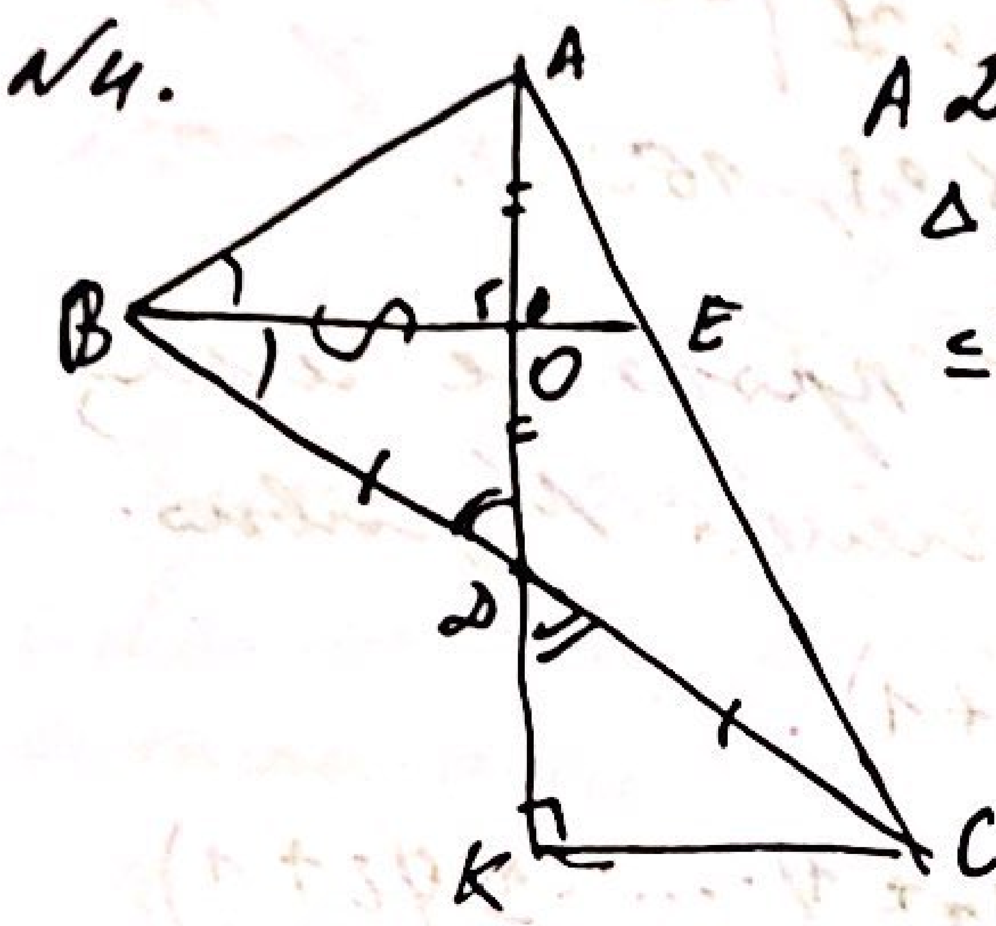
~~По теореме Пифагора~~ $AO^2 + BO^2 = AB^2 = 104$

$\frac{4}{9}BO^2 + BO^2 = 104 \Rightarrow BO^2 = \frac{104 \cdot 9}{13} = 72$

$S_{\triangle ABC} = 2AO \cdot BO = \frac{4}{3}BO^2 = \frac{4}{3} \cdot 72 = 96$

~~Ответ:~~ $S_{\triangle ABC} = 96$.

№4.



$AD \cap BE = O$

$\triangle ABO = \triangle DBO$ по 2-м углам и стороне между ними

$\Rightarrow AO = OD$,

$AB = BD = 2\sqrt{26} = CD$. $BC = BD + CD = 4\sqrt{26} = 2AB$

Пусть $\angle ABO = \alpha$

Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin 2\alpha = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2AB^2 \cdot \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BO}{AB} = 2AO \cdot BO$.

BE – биссектриса $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$

Достроим $\triangle ADC$ до прямоугольного $\triangle AKC$ (см. рис)

Тогда $\triangle AOE \sim \triangle AKC$ (по 2 углам) с коэф. подобия

$k = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$. $\Rightarrow KC = 3OE$

~~ABC~~ $\triangle BOD = \triangle CKD$ (по острому углу и гипотен.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BO = KC = 3OE$

$AD = BE \Rightarrow \frac{4}{3}BO = 2AO \Rightarrow AO = \frac{2}{3}BO$

По т.Пифагора $AO^2 + BO^2 = AB^2 = 104$

$\frac{4}{9}BO^2 + BO^2 = 104 \Rightarrow BO^2 = \frac{104 \cdot 9}{13} = 72$

$S_{\triangle ABC} = 2AO \cdot BO = \frac{4}{3}BO^2 = \frac{4}{3} \cdot 72 = 96$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 96$

чистовик (№6)

№6.

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^2$

$N^2 = p_k^2$, где $k = \sigma(N)$

$N^2 = p_k^2 = p_3 \cdot p_{k-2} \cdot p_4 \cdot p_{k-3}$, т.к. $N = p_n \cdot p_m$, если $n+m = k+1$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq p_3 \cdot p_4 \cdot p_{k-3} \cdot p_{k-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1696 \geq k-3 \Rightarrow k \leq 1699$ | $\Rightarrow$

Т.к. существует p_{1697}, то $k \geq 1697$ |

$\Rightarrow \sigma(N)$ может быть 1697, 1698, 1699.

Если $N = r_1^{q_1} \cdot r_2^{q_2} \cdot r_3^{q_3} \cdot \ldots \cdot r_i^{q_i}$, где r - простое число, то кол-во натуральных делителей N равно:

$\sigma(N) = (q_1+1) \cdot (q_2+1) \cdot (q_3+1) \cdot \ldots \cdot (q_i+1)$.

Тогда $\sigma(N^3) = (3q_1+1) \cdot (3q_2+1) \cdot (3q_3+1) \cdot \ldots \cdot (3q_i+1)$

1) $\sigma(N) = 1697$ - простое число $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = 3 \cdot 1697 + 1 = 5092$

2) $\sigma(N) = 1698 = 2 \cdot 3 \cdot 283 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = (3 \cdot 2+1) \cdot (3 \cdot 3+1) \cdot (283 \cdot 3+1) = 7 \cdot 10 \cdot 850 = 59500$

3) $\sigma(N) = 1699$ - простое число $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = 3 \cdot 1699 + 1 = 5098$

Ответ: 5092, 5098, 59500

чистовик (№2)

№2

I) Пусть автомобиль выехал в 12:00, тогда велосипедист – в 11:00. Т.к. скорость велосипедиста меньше, то он не мог остановиться, потому что иначе время его езды было бы меньше. Значит, останавливался автомобилист.

Пусть x – время приезда в В (ч), а S – путь АВ (км)

$v_a = \frac{S}{x-12-2} = \frac{S}{x-14}$ – скорость автомобилиста

$v_в = \frac{S}{x-11}$ – скорость велосипедиста

$v_a = 2v_в \Rightarrow \frac{S}{x-14} = \frac{2S}{x-11} \Rightarrow x-11 = 2x-28 \Rightarrow x = 17$ (ч)

II) Пусть автомобилист выехал в 11:00. Рассуждая аналогично, автомобилист вынужден был сделать остановку.

$v_a = \frac{S}{x-11-2} = \frac{S}{x-13}$

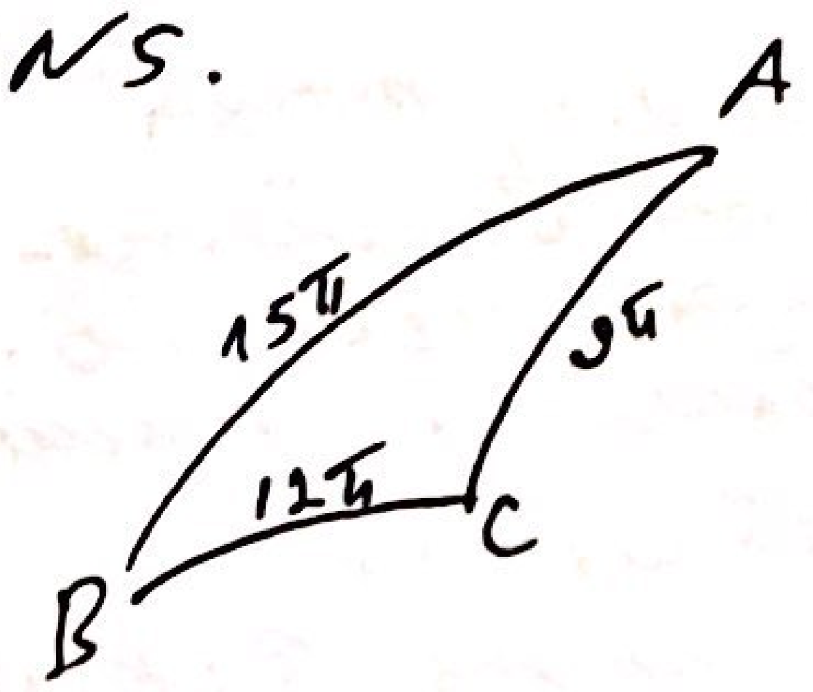
$v_в = \frac{S}{x-12}$

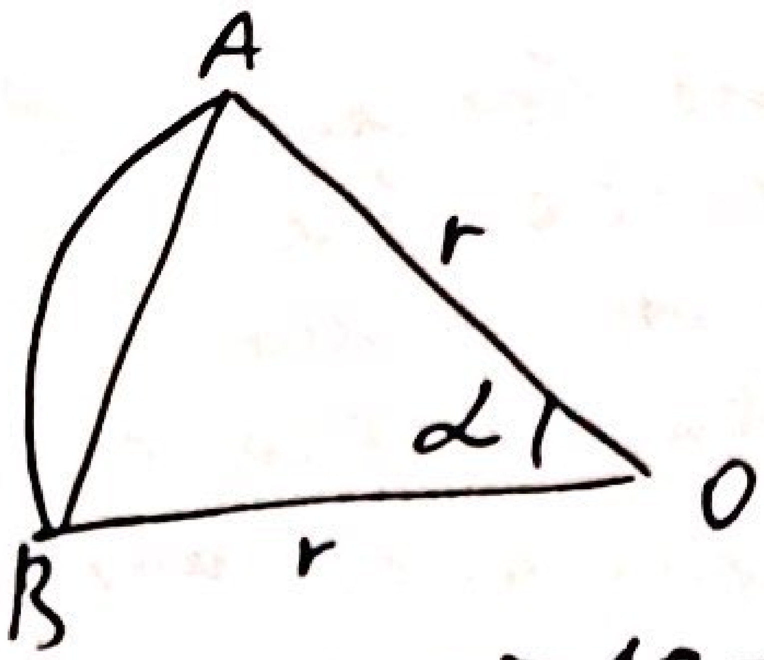
$v_a = 2v_в \Rightarrow \frac{S}{x-13} = \frac{2S}{x-12} \Rightarrow x-12 = 2x-26 \Rightarrow x = 14$ (ч)

Ответ: в 14:00 или в 17:00.

чистовик (№5).

№5.





O - центр сферы

r - радиус сферы

$AB = r\cdot\alpha = 15\pi$

$AB^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}\,r\cdot\sqrt{1-\cos\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 2r\cdot\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right) = 2r\cdot\sin\frac{15\pi}{2r}$, т.к. дуга

~~AB возрастает [illegible], то $\sin\frac{\alpha}{2}$ [illegible]~~

т.к. $\frac{\alpha}{2} \leq 180°\cdot\pi$, то $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{15\pi}{2r}$.

Аналогично $BC = 2r\cdot\sin\frac{12\pi}{2r}$, $AC = 2r\cdot\sin\frac{9\pi}{2r}$.

Периметр $P = 2r\left(\sin\frac{15\pi}{2r} + \sin\frac{12\pi}{2r} + \sin\frac{9\pi}{2r}\right)$

$P' = 2\left(\sin\frac{15\pi}{2r} + \sin\frac{12\pi}{2r} + \sin\frac{9\pi}{2r}\right) + \frac{2\cos\frac{15\pi}{2r}}{r} + \frac{2\cos\frac{12\pi}{2r}}{r} + \frac{2\cos\frac{9\pi}{2r}}{r}$ ~~принимает значение 0 при $r = 18$~~

~~$r = 18$ тогда $P = 2\cdot 18\left(\sin\frac{5}{6}\pi + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\right) =$~~

~~$= 36\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ - наиб. значение~~

~~Ответ: $18(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$~~