0 938183 290003

93-81-83-29
(139.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс 10-С-1

Место проведения Челябинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бондаренко Андрея Борисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
93-81-83-29	90	20	20	20	20	10	×	×	×

 Черновик

93-81-83-29
(139.1)

1	2	3	4	5	6

90 (Девяносто)

Терешов

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x(\cos x + 2\sin x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x(2\cos x - \sin x) = $$
$$= \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$(*)\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x \cdot 3 + \sqrt{2}\cos^2 x - \sqrt{2}\sin^2 x$$

$$1 - 3\sqrt{2}\cos x\sin x + 2\sqrt{2}\cos^2 x - 2\sqrt{2}\sin^2 x = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

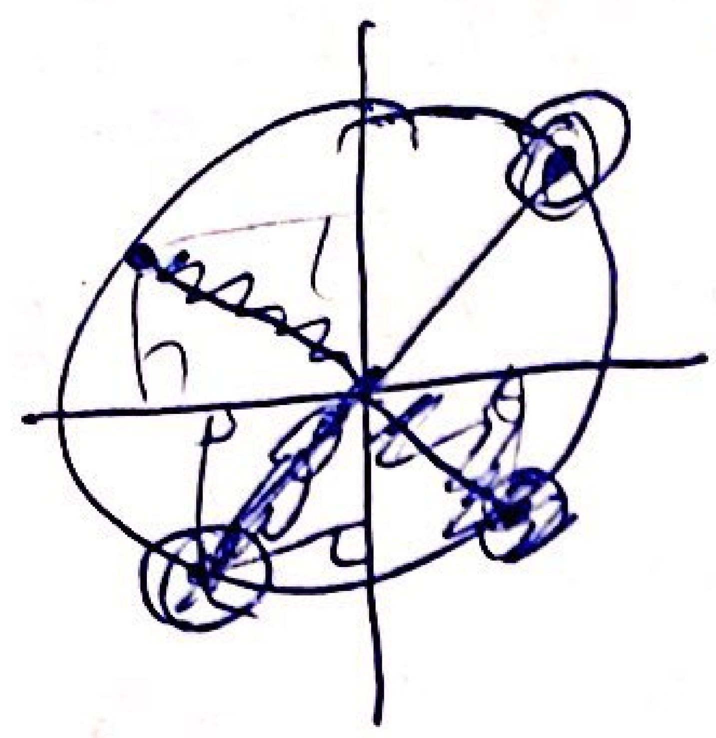
$$\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin 2x + \sqrt{2}\cos 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) + \sqrt{2}\cos 2x$$
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = $$
$$= \frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \cos^2\alpha$$

$$\cancel{(*)}\ \cancel{1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$
$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$
$$-2\sin 2x \sin\frac{\pi}{4}$$
$$-\sqrt{2}\sin 2x$$
$$0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x - \sqrt{2}\cos 2x$$

$1 - 2\sqrt{2}\sin x\cos x + 2\sqrt{2}\cos^2 x - 2\sqrt{2}\sin^2 x =$

$= \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$



$2\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 0$

$\cos 2x = \sin 2x$

$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{8} + \pi k$

$2x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$

$V_м = 2V_в$

$V_в$

3) раньше $V_м$: ост. м:

t - время м:

$2V_в(t-2) = V_в(t-1)$

$2t - 4 = t - 1$

$t = 3$

$2V_м$

$13 + t + 1 = 17$

1) Раньше в. и остановку в:

t - ~~путь~~ время в.

$V_в(t-2) = V_м(t-1)$ — ~~8~~

2) Раньше в и остан. м:

t - время м.

$V_в(t+1) = V_м(t-2)$

$V_в(t+1) = 2V_в(t-2)$

$V_в = V_в t - 4V_в$

$5V_в = V_в t$

$5 = t \Rightarrow$ приедет в $13 + t + 1 = 19$

$t_в$	t	t	t	t
$t_м$	$t+2$	$t-3$	$t-2$	$t+3$

$\frac{V_в}{V_м} = \frac{t_м}{2t_в}$

$\frac{t}{t-2} = 2$

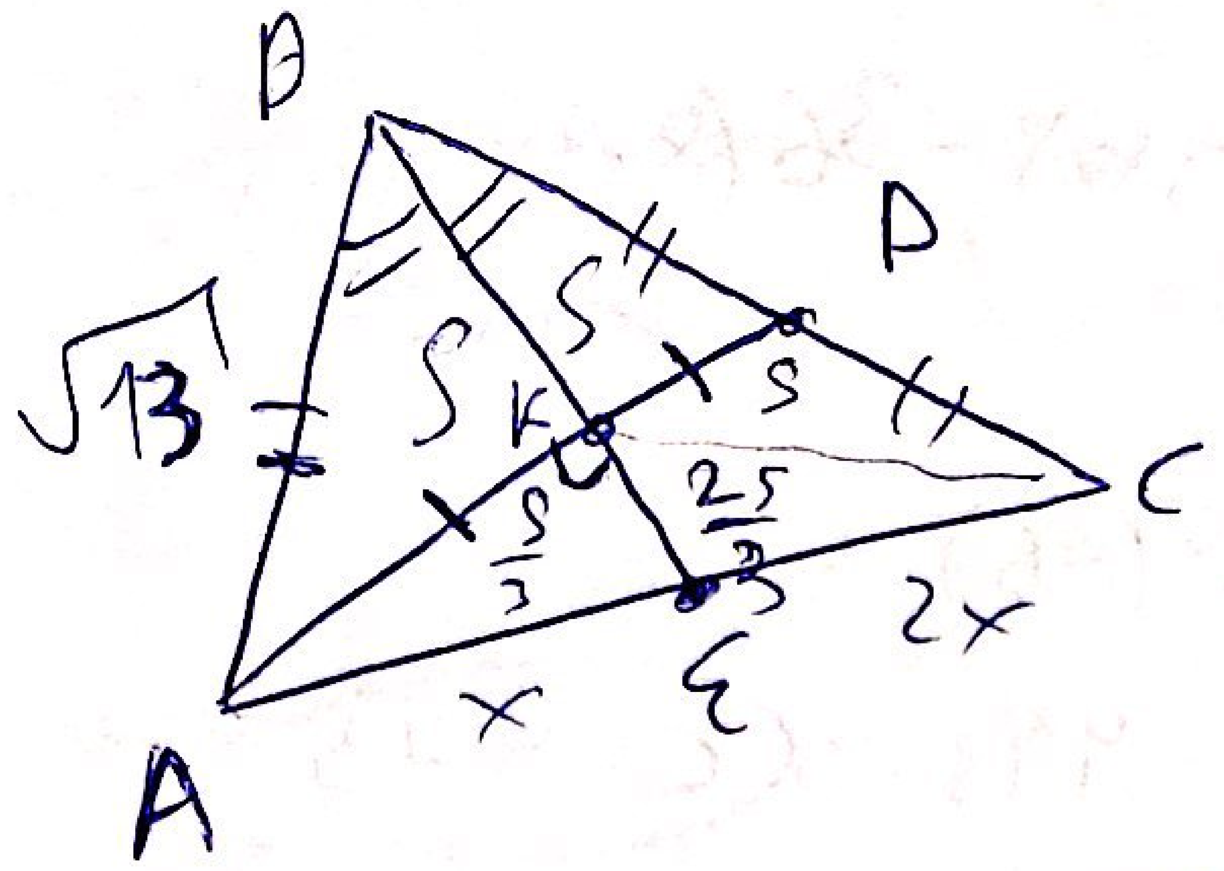
$t = 2t - 4$

$t = 4$

$\frac{t}{t-3} = 2$

~~$2t - 6 = t$~~

93-81-83-29 (139.1)



$AK = KD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BE$

$\frac{BK}{KE} = \frac{S}{S/3} = 3 \Rightarrow$

$BK = 3KE = \frac{3}{4}BE$

$BK = \frac{3}{4}y \quad AK = \frac{1}{2}y = \frac{2}{4}y$

$tg\angle\frac{B}{2} = \frac{AK}{BK} = \frac{\frac{1}{2}y}{\frac{3}{4}y} = \frac{2}{3}$

$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\sin B = 2\cos B$

$3\sin B = 2\sqrt{1-\sin^2 B}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$

$13\sin^2 B = 4 \Leftarrow 9\sin^2 B = 4(1-\sin^2 B)$

$\sin^2 B = \frac{4}{13}$

$\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin 2B = 2\sin B\cos B = \frac{12}{13}$ $\quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin 2B \cdot AB \cdot BC =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}\cdot\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13} = 12$

~~$E\ 2x+1$~~

~~$\frac{1}{8} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 1 - \frac{1}{8}\ \frac{12}{8}\ \frac{28}{8}\ \frac{8}{8}$~~

$6 = x_1+x_2+x_3 \quad 7 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \quad 1 = x_1x_2x_3$

$-a = 2x_1+2x_2+2x_3$; $b = (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)+$
$+(x_1+x_3)(x_1+x_2)$

$a = -12$

$b = 43$

$= 3x_1x_2+3x_1x_3+3x_2x_3+x_2^2+x_3^2+x_1^2 = (x_2+x_3+x_1)^2 + x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 36+7 = 43$

$c = (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3) =$

$= (x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_3x_2)(x_1+x_3)$

~~$(-7+x_2^2)(x_1+x_3)$~~

$(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2) = (36+x_3x_1-6x_3-6x_1)(6-x_2) =$

$= 216+6x_3x_1-36x_3-36x_1-36x_2-x_3x_1x_2$
$+6x_3x_2+6x_1x_2$

 Черновик

$-C = 216 + 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 36(x_1+x_2+x_3) -$
$- x_1x_2x_3$

$216 + (6)\cdot(-7) - 36\cdot(-6) - 1 =$
$= 216\cdot 2 + 41 = 432 + 41 = 473 \Rightarrow C = 473$

$\sigma(N)$ 1) очев: $p_{k-i} \cdot p_i = N$

$p_i \cdot p_{i+k}$
$p_{i+1} \cdot p_{i+k+1}$

$(\alpha_1+1)(\ldots)\ldots\ldots() \vee (\alpha_1+7)\ldots(\ldots)$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq p_1 p_2 \cdot p_{k-1} p_k$

$p_{1876} \cdot p_{1877} \geq p_{k-3} \cdot p_{k-4}$

$k-3 \leq 1877$
$1877 \leq k \leq 1880$

1877 ∈ P

$N = k^{1876}$
$N^3 = k^{5631}$
$\sigma(N^3) = 5632$

1878 = σ(N)

313 · 2 · 3

312 · 1 · 2 → 936 · 3 · 6 → 937 · 4 · 7
312 · 5 → 936 · 16 → 937 · 16
625 · 2 → (625 · 3) · 6 → 7 · (625 · 3 + 1)

93-81-83-29 (139.1)

~~939 · 2 → 9333 · 6 → (939·3+1) · 7~~

~~1877~~ 313 · 3 · 2 : 312 · 2 · 1 → 936 · 6 · 3 → 937 · 7 · 4

1878 : 939 · 2 : 938 · 1 → 2814 · 3 → 2815 · 4

626 · 3 : ~~2814 · 2~~ 625 · 2 → 1875 · 6 → 1876 · 7

1878 : 1877 → 1877 · 3 + 1

1879 | 7
14
47
42
59

1879 |

302 | 23
23
72

1879 | 29
174
139

29
6
174

110

$1880 = 2 \cdot 5 \cdot 188 = 2^2 \cdot 5 \cdot 94 = 2^3 \cdot 5 \cdot 47$

$p_1 < p_2 \dots < p_{k-1} < p_k$

p

1876 · 3 = 5628

5629

937 · 16 = 5622
+937
14992

937 · 28 = 7496
+1874
26236

937 · 27 = 6559
4
26236

Задача №1

$$1-\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x\sin x=$$
$$=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=$$
$$=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$2\sin x\cos x=2\sin 2x$, $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-$$
$$-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$\Updownarrow$

$$1-2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=\underline{1-\sqrt{2}\sin 2x+}$$
$$\underline{+2\sqrt{2}\cos 2x}=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\underline{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

$\Updownarrow$

$$1-\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

$\Updownarrow$

$$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

$\Updownarrow$

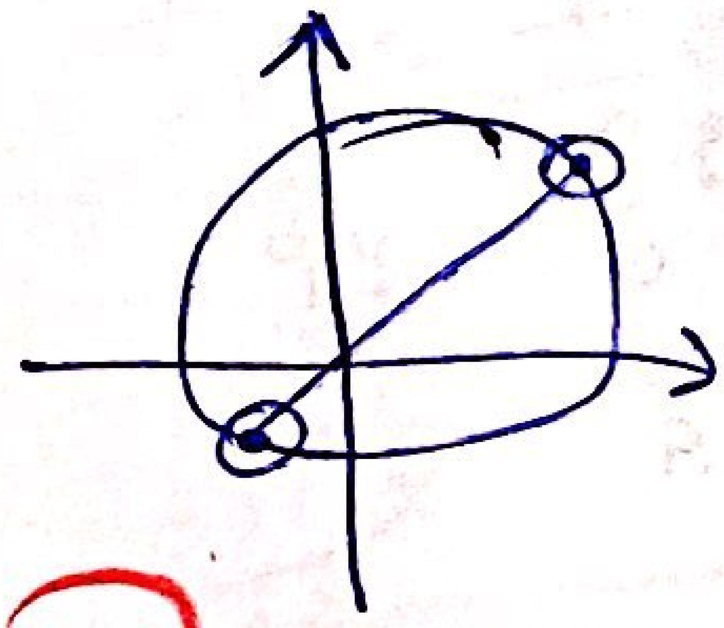
$$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

$\Updownarrow$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x=0$$

$\Updownarrow$

$$\cos 2x-\sin 2x=0\Rightarrow \cos 2x=\sin 2x$$



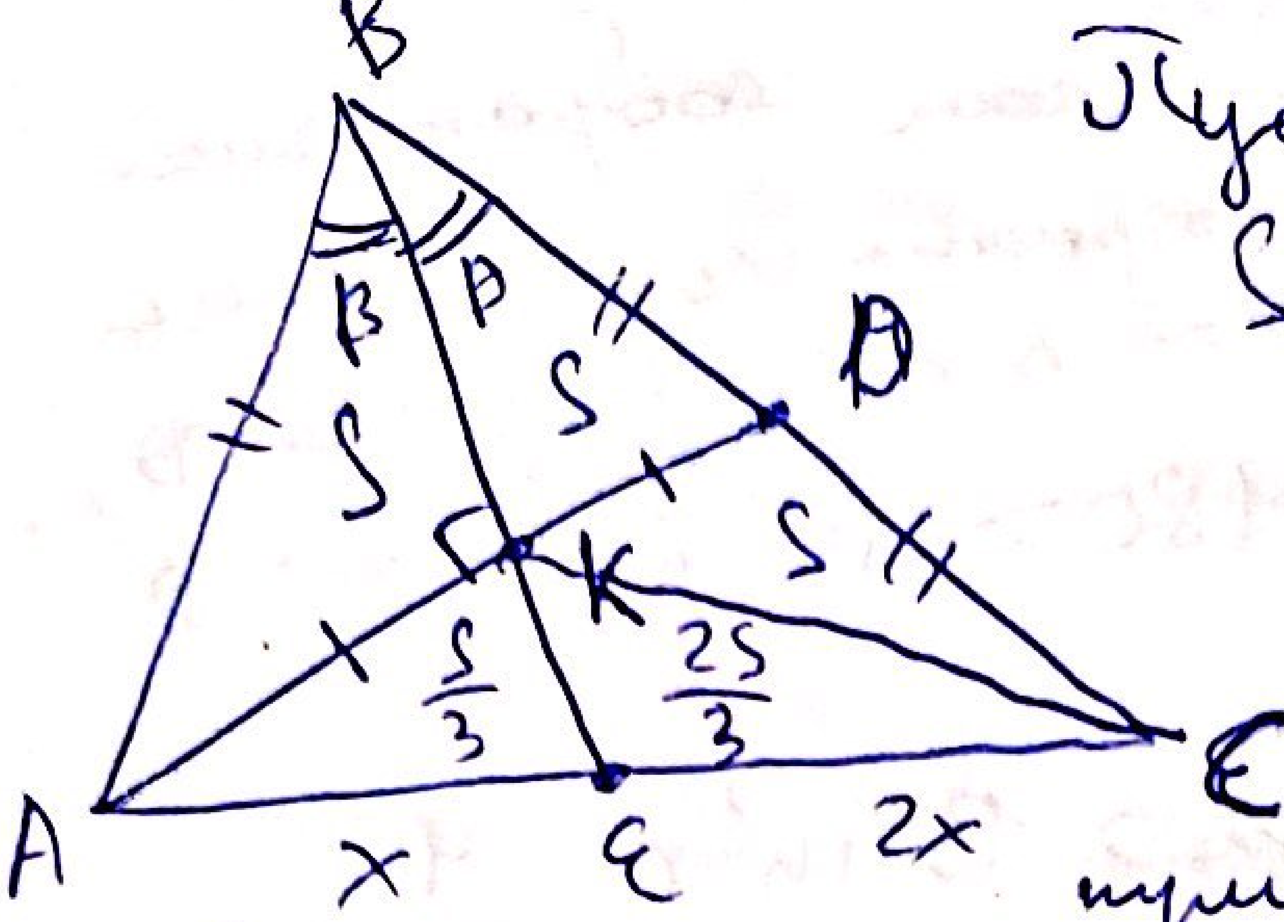
$$\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}+2\pi k\\ 2x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\pi k\\ x=\frac{5\pi}{8}+\pi k\end{array}\right.$$

где $k\in\mathbb{Z}$.

$\Downarrow$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\pi k\\ x=\frac{5\pi}{8}+\pi k\end{array}\right.$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Задача №4



Решение:

Пусть $\angle B = 2\beta$, $AD \cap BE = K$. $S_{ABK} = S$.

Заметим, что $BE \perp AD$ по условию и BE - биссектриса $\angle ABC$ => в $\triangle ABD$, BE - биссектриса и высота => $\triangle ABD$ - равнобедренный => $AB = BD = \frac{1}{2} BC$, и $AK = KD$.

По т. о биссектрисе: для $\triangle ABC$ $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$.

~~По методу [illegible]:~~

$\frac{S_{ABK}}{S_{AKC}} = \frac{\rho(B;AD)}{\rho(C;AD)}$, (где ρ - расстояние от точки до прямой) т.к. AK - их общее основание => отношение их площадей равно отношению высот, а ~~отношение~~ их высоты являются высотами $\triangle KBD$ и $\triangle KCD$, но у $\triangle KBD$ и $\triangle KCD$ тоже общее основание KD => $\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{S_{KBD}}{S_{KCD}}$, но

$S_{KBD} = \frac{1}{2}\rho(K;BC)\cdot BD$

$S_{KCD} = \frac{1}{2}\rho(K;BC)\cdot DC$, $DC = BD$ => $S_{KBD} = S_{KCD}$ =>

=> $\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = 1$ => $S_{ACK} = S$.

$\frac{S_{AKE}}{S_{CKE}} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ => $2S_{AKE} = S_{CKE}$, и $S_{AKE} + S_{CKE} = S_{ACK} = S$ => $S_{AKE} = \frac{S}{3}$, $S_{CKE} = \frac{2S}{3}$.

$\frac{BK}{KE} = \frac{S_{ABK}}{S_{AEK}} = \frac{S}{S/3} = 3$ => $BK = 3KE$ => ~~$BK = \frac{1}{3}$~~

=> $BK = \frac{3}{4} BE$.

Теперь мы знаем, что $BK = \frac{3}{4} BE$, $AK = \frac{1}{2} AD$

По условию $BE = AD$.

Тогда $tg\,B$ (из $\triangle ABK$) $= \frac{AK}{BK} = \frac{\frac{1}{2}AD}{\frac{3}{4}BE} = \frac{2}{3}$.

$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{2}{3}$, $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ из геом. соображений на ограничения суммы углов $\triangle ABC$ ($\angle B = 2\beta$)

$180 > \angle B = 2\beta \Rightarrow 90 > \beta$.

$\Downarrow$

$3\sin\beta = 2\cos\beta$

$\Updownarrow$

$3\sin\beta = 2\sqrt{1-\sin^2\beta}$

$\Updownarrow$

$9\sin^2\beta = 4(1-\sin^2\beta) \Leftrightarrow 13\sin^2\beta = 4$

$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftarrow \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin 2\beta = \sin\angle B = 2\sin\beta\cos\beta = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot BC\cdot \sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}\cdot\frac{12}{13} = 12$.

$\Downarrow$

Ответ: $\underline{S_{ABC} = 12}$.

Задача №3

$x_1; x_2; x_3$ — корни $x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$.

$\Downarrow$

По т. Виета для многочленов:

$6 = x_1 + x_2 + x_3$; $7 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$; $1 = x_1x_2x_3$.

Т.к. т. Виета обратима $\Rightarrow$ для того, чтобы x_1+x_2; x_2+x_3; x_3+x_1 были корнями урав. $x^3+ax^2+bx+c=0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие т. Виета, т.е.:

$-a = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$b = (x_1+x_2)(x_2+x_3) + (x_2+x_3)(x_3+x_1) + (x_3+x_1)(x_1+x_2)$

$-c = (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$

$\Downarrow$

1) $-a = 2(x_1+x_2+x_3) = 2\cdot 6 = 12 \Rightarrow \underline{a = -12}$

2) $b = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_3x_1 =$

$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 6^2 + 7 =$

$= 36 + 7 = 43 \Rightarrow \underline{b = 43}$.

3) $-c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2)=$
$=216-36(x_1+x_2+x_3)+6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3=$
$=216-36\cdot6+6\cdot7-1=41 \Rightarrow c=41.$

$\Downarrow$

Ответ: при $a=-12$, $b=43$, $c=41$.

Задача №2

Пусть $V_в$ - скорость велосипедиста, $V_м$ - скорость мотоциклиста. По условию $V_м=2V_в$.
Разберем все возможные случаи порядка выезда и остановок: (равенство $V_1t_1=V_2t_2$ - равенства путей).

1) Если в 13:00 выехал велосипедист и он же совершил остановку:
Пусть t - время в пути велосипедиста включая остановку.
Тогда $(t-2)$ - время которое он ехал.
$(t-1)$ - время которое ехал мотоциклист.

$$\Downarrow$$
$$V_в(t-2)=V_м(t-1)=2V_в(t-1)$$
$$\Downarrow$$
$$V_в(t-2)=2V_в(t-1) \Rightarrow t-2=2(t-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t-2=2t-2 \Rightarrow t=0 \text{ противоречие.}$$

2) Если в 13:00 выехал велосипедист, а остановку совершил мотоциклист:
Пусть t - время в пути велосипедиста
Тогда $(t-3)$ - время в пути мотоциклиста.

$$\Downarrow$$
$$V_в t=V_м(t-3)=2V_в(t-3)$$
$$\Downarrow$$
$$V_в t=2V_в(t-3) \Leftrightarrow t=2(t-3) \Rightarrow t=2t-6 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 0=t-6 \Rightarrow t=6$ часам $\Rightarrow$ они прибыли в $13+6=19{:}00$.

3) Если в 13:00 выехал мотоциклист и он же совершил остановку:
Пусть t - время в пути мотоциклиста включая остановку.

 Чистовик

Тогда $(t-2)$ – время которое он ехал.
$(t-1)$ – время в пути велосипедиста.
⇓
$$v_м(t-2) = 2v_в(t-2) = v_в(t-1)$$
⇓
$$2(t-2) = t-1 \Leftrightarrow 2t-4 = t-1 \Leftrightarrow t = 3 \text{ часам.}$$
Тогда они приехали в $13+3=$ 16:00.

4) Если в 13:00 выехал мотоциклист, а остановку совершил велосипедист:
Пусть t – время в пути мотоциклиста.
Тогда $(t-3)$ – время в пути велосипедиста.
⇓
$$v_в(t-3) = v_м(t) = 2v_в t$$
⇑
$$t-3 = 2t \Rightarrow -3 = t, \text{ но } t>0 \text{ противоречие.}$$
⇓
Ответ: или в 13:00 или в 16:00
(Однозначно определить время нельзя, т.к. очевидно реализуются и случай №2 и случай №3).

Задача №5

$1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$, где p_i – делители N по условию.
⇓
Из определения $\sigma(N) = k$.
Так же из упорядоченности $p_1 < \ldots < p_k$:
(*) $p_i \cdot p_{k-i} = N$ (Это очевидно, т.к. p_i – наименьший i-ый делитель $N \Rightarrow \frac{N}{p_i}$ – наибольший $k-i$-ый делитель $N \Rightarrow \frac{N}{p_i} = p_{k-i}$).
По условию $p_3 p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2$.
$$N^2 = N \cdot N = \underbrace{(p_3 \cdot p_{k-3})(p_4 \cdot p_{k-4})}_{\text{по } (*)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_3 p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq p_3 p_4 \cdot p_{k-3} p_{k-4}$$
$p_3 \cdot p_4 > 0$
⇕
$$p_{1876} \cdot p_{1877} \geq p_{k-3} \cdot p_{k-4}.$$

Если $k-3>1877$, то $k-4>1876 \Rightarrow p_{k-3}>p_{1877}$ и $p_{k-4}>p_{1876} \Rightarrow p_{k-3}p_{k-4}>p_{1877}p_{1876}$. противоречие.

$1877 \geq k-3$

$1880 \geq k = \sigma(N)$.

С другой стороны $\exists\ p_{1877} \Rightarrow k \geq 1877$.

$1880 \geq \sigma(N) \geq 1877$

1) Если $\sigma(N)=1877$:

(**) Пусть $N=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}$, где a_i - простой делитель N.

Тогда $\sigma(N)=(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1)$ - формула подсчета кол-ва делителей через разложение на простые.

Заметим, что 1877 - простое. $\Rightarrow \sigma(N)$ раскладывается на множители (большие 1) 1 способом: $1\cdot1877$.

$\Downarrow$

$N=m^{1876}$, где m - простое.

$\Downarrow$

$N^3=m^{5628} \Rightarrow \underline{\sigma(N^3)=5629}$.

2) Если $\sigma(N)=1879$:

Заметим, что оно тоже простое $\Rightarrow$ по (**),

$N=m^{1878}$, где m - простое.

$\Downarrow$

$N^3=m^{5634} \Rightarrow \underline{\sigma(N^3)=5635}$.

3) Если $\sigma(N)=1878$:

$1878=313\cdot2\cdot3 \Rightarrow$ по (**):

1) $N=a_1^{312}\cdot a_2^2\cdot a_3 \Rightarrow N^3=a_1^{936}\cdot a_2^6 a_3^3$ ~~$\sigma(N^3)$~~

2) $N=a_1^{312}\cdot a_2^5 \Rightarrow N^3=a_1^{936}\cdot a_2^{15}$

3) $N=a_1^{625}\cdot a_2^3 \Rightarrow N^3=a_1^{1875}\cdot a_2^9$ где a_i - простые делители N.

4) $N=a_1^{938}\cdot a_2 \Rightarrow N^3=a_1^{2814}\cdot a_2^3$

5) $N=a_1^{1877} \Rightarrow N^3=a_1^{5631}$

$\Downarrow$

 чистовик

1) $\sigma(N^3) = 937 \cdot 4 \cdot 7 = \cancel{14\,882}$ $\underline{26236}$

2) $\sigma(N^3) = 937 \cdot 16 = \underline{14992}$

3) $\sigma(N^3) = 1876 \cdot 10 = \underline{18760}$

4) $\sigma(N^3) = 2815 \cdot 4 = \underline{11260}$

5) $\underline{\sigma(N^3) = 5632}$

4) Если $\sigma(N) = 1880$:

$1880 = 2 \cdot 5 \cdot 188 = 2^2 \cdot 5 \cdot 94 = 2^3 \cdot 5 \cdot 47$

$\Downarrow$

представление $\sigma(N)$ в виде произведения степеней простых дел. N по $(**)$:

1) $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 47) \Rightarrow$ $\sigma(N^3) = \underline{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 142}$

2) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 235 \Rightarrow$ $\sigma(N^3) = \underline{7^3 \cdot 706}$

3) $2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 47 \Rightarrow \sigma(N^3) = 7^2 \cdot 31 \cdot 142$

4) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 94 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7^2 \cdot 16 \cdot 283}$

5) $2 \cdot 2 \cdot 470 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7^2 \cdot 1481}$

6) $2 \cdot 20 \cdot 47 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7 \cdot 61 \cdot 142}$

7) $2 \cdot 5 \cdot 188 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7 \cdot 16 \cdot 565}$

8) $2 \cdot 10 \cdot 94 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7 \cdot 31 \cdot 283}$

9) $2 \cdot 235 \cdot 4 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7 \cdot 13 \cdot 706}$

~~10) 2 · 940~~

10) $2 \cdot 940 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{7 \cdot 2821}$

11) $8 \cdot 5 \cdot 47 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{25 \cdot 16 \cdot 142}$

12) $8 \cdot 235 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{25 \cdot 706}$

13) $4 \cdot 470 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{13 \cdot 1411}$

14) $1880 \Rightarrow \sigma(N^3) = \underline{5641}$.

Так же понятно, что для любого набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $(**)$ ~~нужно про~~ $\exists$ такое $N \Rightarrow$ все случаи $\sigma(N)$ ~~реализуются~~ ~~набора~~ $= 1880, 1879, 1878$, и 1877 реализуются.