0 274186 380007

27-41-86-38
(123.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Аверкина Максима Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
27-41-86-38	100	20	20	20	20	20			

27-41-86-38 (123.6)

Черновик

$\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x)\cos x + \sqrt{2}(2\sin x + \cos x)\sin x =$

$22 \cdot 6 = 2 \cdot 60 = 120 + 12 = 132$

$=$

$2(\sin^2 x \cancel{- 4\sin x\cos x} + 4\cos^2 x + 4\sin^2 x \cancel{+ 4\sin x\cos x} + \cos^2 x)$

$= 2(5\sin^2 x + 5\cos^2 x) = 2 \cdot 5 = 10$

$1 + \sqrt{10}\sin(x+\varphi) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$

$1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x +$

$+ \sqrt{2}\sin x\cos x = 0$

$\cos 2x + \sin 2x + 2\sin x\cos x - 4\cos^2 x + 4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 0$

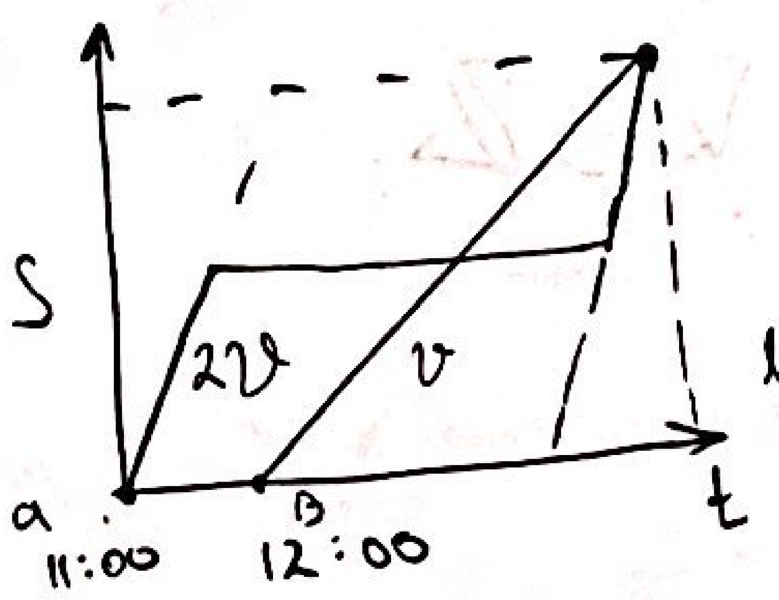
$\cos 2x + 3\sin 2x - 4\underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} = 0$

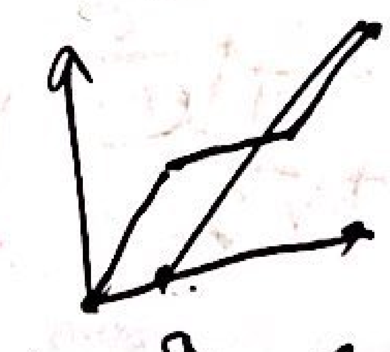
$3\sin 2x - 3\cos 2x = 0$

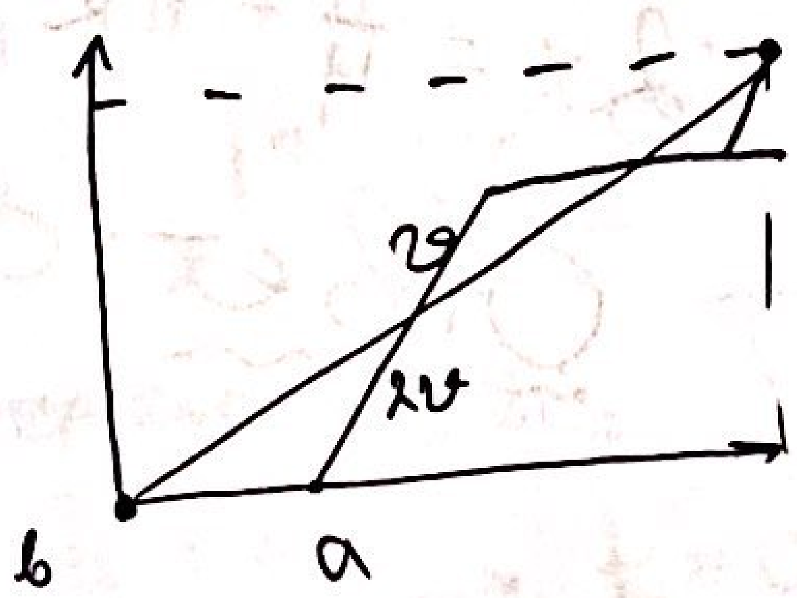
$t = \frac{S}{v}$

1) а раньше, а останавл.

$t = 1 + 2 + \frac{S}{2v}$







$t = 1 + \frac{S}{2v}$

$t = \frac{S}{v} + 2$

$t = 3 + \frac{t}{2}$; $\frac{t}{2} = 3$; $t = 6$

$134 - 93 = 41$

$\cancel{\frac{S}{v} = \frac{S}{2v} + 2}$

$t = \frac{S - x}{2v} + \frac{x}{2v} + 2 = \frac{S}{2v} + 2$

$\begin{cases} 2t = \frac{S}{v} + 4 \\ t = 1 + \frac{S}{v} \end{cases}$; $t = 3$

$t = 1 + \frac{S}{2v}$

$2t = 2 + \frac{S}{v}$

$t = 2 + \frac{S}{v}$

$X_1 X_2 X_3$

Чистовик

Задача 1

$1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x+\cos x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right).$

Перенесем $2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$ влево и запишем

$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\cos\left(2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x.$

После этого домножим ур-ние на $\sqrt{2}$:

$\cos 2x+\sin 2x+2\cos x(\sin x-2\cos x)+2\sin x(2\sin x+\cos x)=0$

Раскроем скобки:

$\cos 2x+\sin 2x+2\sin x\cos x-4\cos^2 x+4\sin^2 x+2\sin x\cos x=0$

$3\sin 2x+\cos 2x-4(\cos^2 x-\sin^2 x)=0.$

$3\sin 2x-3\cos 2x=0;\quad \sin 2x=\cos 2x.$

У данного ур-ния $\cos 2x=0$ не явл. реш. (тогда $\sin 2x=1$), так что поделим на $\cos 2x$:

$\tan 2x=1;\quad 2x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Чистовик!

Задача 2

Пусть расстояние между A и B равно S, время, за которое до B доезжает тот, кто выехал в 11:00 равно t (ч), скорость вел. v, авт. – $2v$. Рассмотрим случаи:

1) Первым выехал автомобиль. Тогда он обязан сделать остановку (ведь он выехал раньше и едет быстрее, но в B приезжает одновр. с вел.).
Запишем t ~~ч~~ с 2-х сторон:

вел: $t = 1 + S/v$; $\begin{cases} t = S/v + 1 \\ 2t = \frac{S}{v} + 4 \end{cases}$; $\underline{t = 3}$,

авт: $t = \frac{S}{2v} + 2$

т.е. время в B $\underline{14:00}$. (*)

2) Первым выехал вел.
Остановку делал авт. Тогда

2.1) Остановку делал авт. Тогда

вел: $t = S/v$ $\rightarrow$ $t = 3 + \frac{t}{2}$; $\frac{t}{2} = 3$; $\underline{t = 6}$,

авт: $t = 1 + \frac{S}{2v} + 2$

т.е. время в B $\underline{17:00}$. (*)

2.2) Остановку делал вел. Тогда

вел: $t = \frac{S}{v} + 2$; $\begin{cases} t = \frac{S}{v} + 2 \\ 2t = \frac{S}{v} + 2 \end{cases}$ $\rightarrow$ $t = 0$ (не возм.)

авт: $t = 1 + \frac{S}{2v}$

Ответ: 14:00 или 17:00

(*) Примеры на соотв. t легко построить, подставив t в систему, найдя S/v и взяв подходящие S и v.

Чистовик | Задача 3

По т-ме Виета имеем $x_1+x_2+x_3=-6$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$; $x_1x_2x_3=-1$; $x^3+ax^2+bx+c=0$ явл.
Условие „корнями x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1" по т-ме Виета равносильно системе

$$\begin{cases} (1)\ (x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=-a \\ (2)\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)=b \\ (3)\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-c \end{cases}$$

(1) $2(x_1+x_2+x_3)=-a$; $2(-6)=-a$; $\underline{a=12}$.

~~(3)~~ $\cancel{(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_3+x_1)=-c;}$

$\cancel{(x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1x_3^2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_2^2x_1+}$
$\cancel{+x_2x_3^2+x_1x_2x_3)=-c;}$

$2x_1x_2x_3+$

(2) $x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_2x_3+x_1x_2+x_3^2+x_3x_1+$
$+x_3x_1+x_2x_3+x_1^2+x_1x_2=b.$

$3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1^2+x_2^2+x_3^2=b;$

$3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=b.$

$b=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=36+7=\underline{43}.$

(3) $-c=(x_1x_2+x_3x_1+x_2^2+x_2x_3)(x_3+x_1)=$
$=x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_3^2x_1+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_2+x_1x_2x_3$
$=2x_1x_2x_3+x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)$
$=2x_1x_2x_3+x_1^2(x_1+x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_2+x_3)+x_3^2(x_1+x_2+x_3)-$

27-41-86-38 (123,6)

Чистовик

$-(x_1^3+x_2^3+x_3^3) =$

$-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$

$= 2x_1x_2x_3 + (x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - (x_1^3+x_2^3+x_3^3)$

$= -2 + (-6)(36-2(7)) - (x_1^3+x_2^3+x_3^3)$

$= -2 - 6\cdot 22 - (x_1^3+x_2^3+x_3^3) = -134 - (x_1^3+x_2^3+x_3^3).$

Заметим, что

$x_i^3+6x_i^2+7x_i+1=0 \Rightarrow x_i^3 = -6x_i^2-7x_i-1.$

Тогда

$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -6(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - 7(x_1+x_2+x_3) - 3$

$= -6(36-2(7)) - 7(-6) - 3$

$= -6\cdot 22 + 6\cdot 7 - 3 = 6(-15) - 3 = -93$

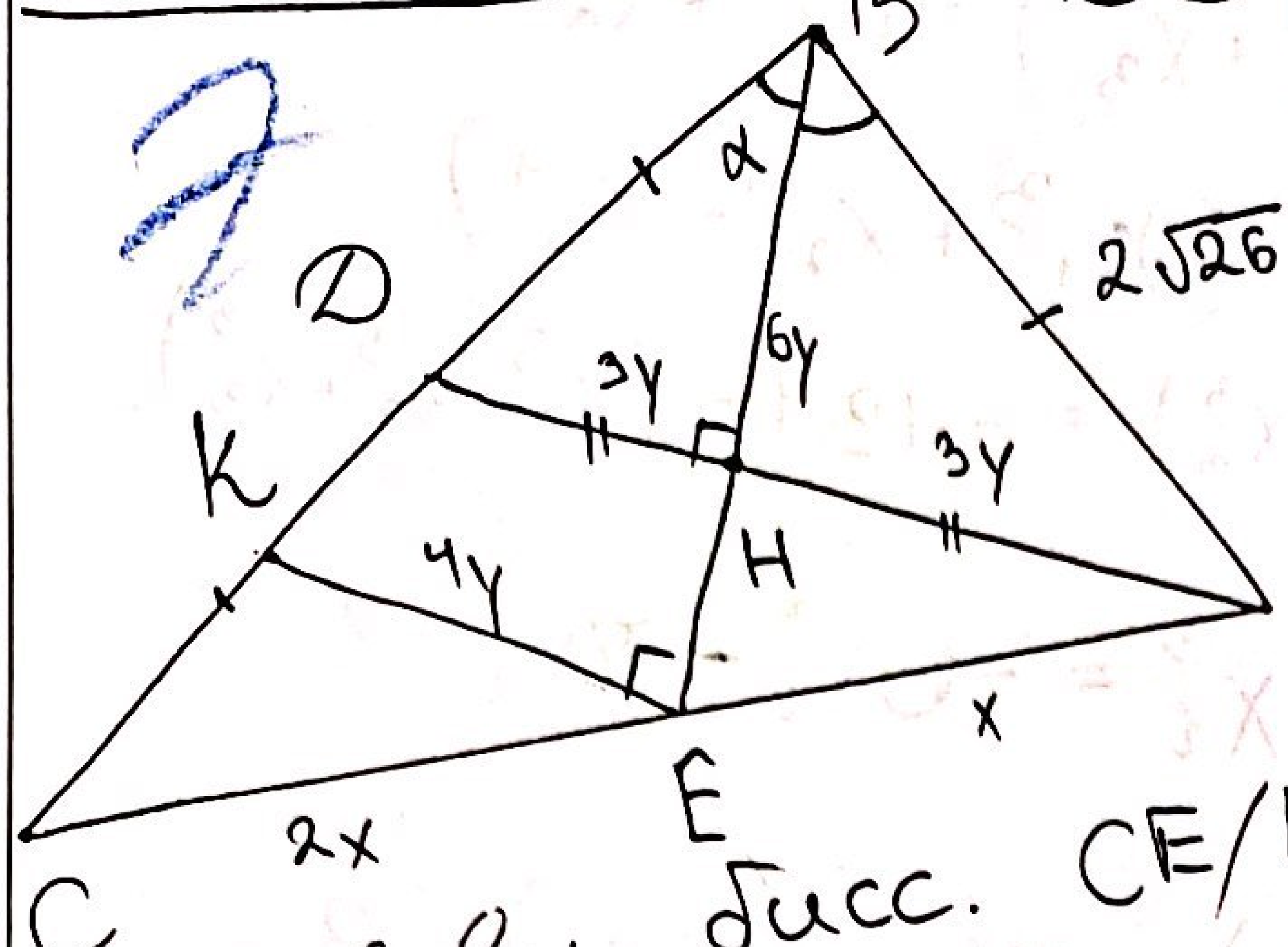
Итого $-c = -134 - (-93) = 93 - 134 = -41 \rightarrow$

$\rightarrow c = 41.$

Ответ: $(a,b,c) = (12, 43, 41).$

Чистовик

Задача 4



В ΔABD BH явл. и бисс. и выс., откуда ΔABD – р/б $\Rightarrow AB = BD = DC = 2\sqrt{26}$. По св-ву бисс. $CE/EA = CB/AB = 2/1$. Построим $EK \parallel AD$ (см. рис.). Пусть $DH = AH = 3y$ (они равны т.к. BH еще и медиана). Тогда из подобия ΔCKE и ΔCDA имеем $KH = 4y$. Вспомним, что $BE = AD = 6y$. Тогда $KE \parallel AD \perp BE$ и из прямоуг. треугольника BKE по т-ме Пифагора $BK = \sqrt{16y^2 + 36y^2} = 2\sqrt{4y^2 + 9y^2} = 2\sqrt{13}y$. Значит $\sin\alpha = \frac{4y}{2\sqrt{13}y} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{6y}{2\sqrt{13}y} = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Ищем площадь!

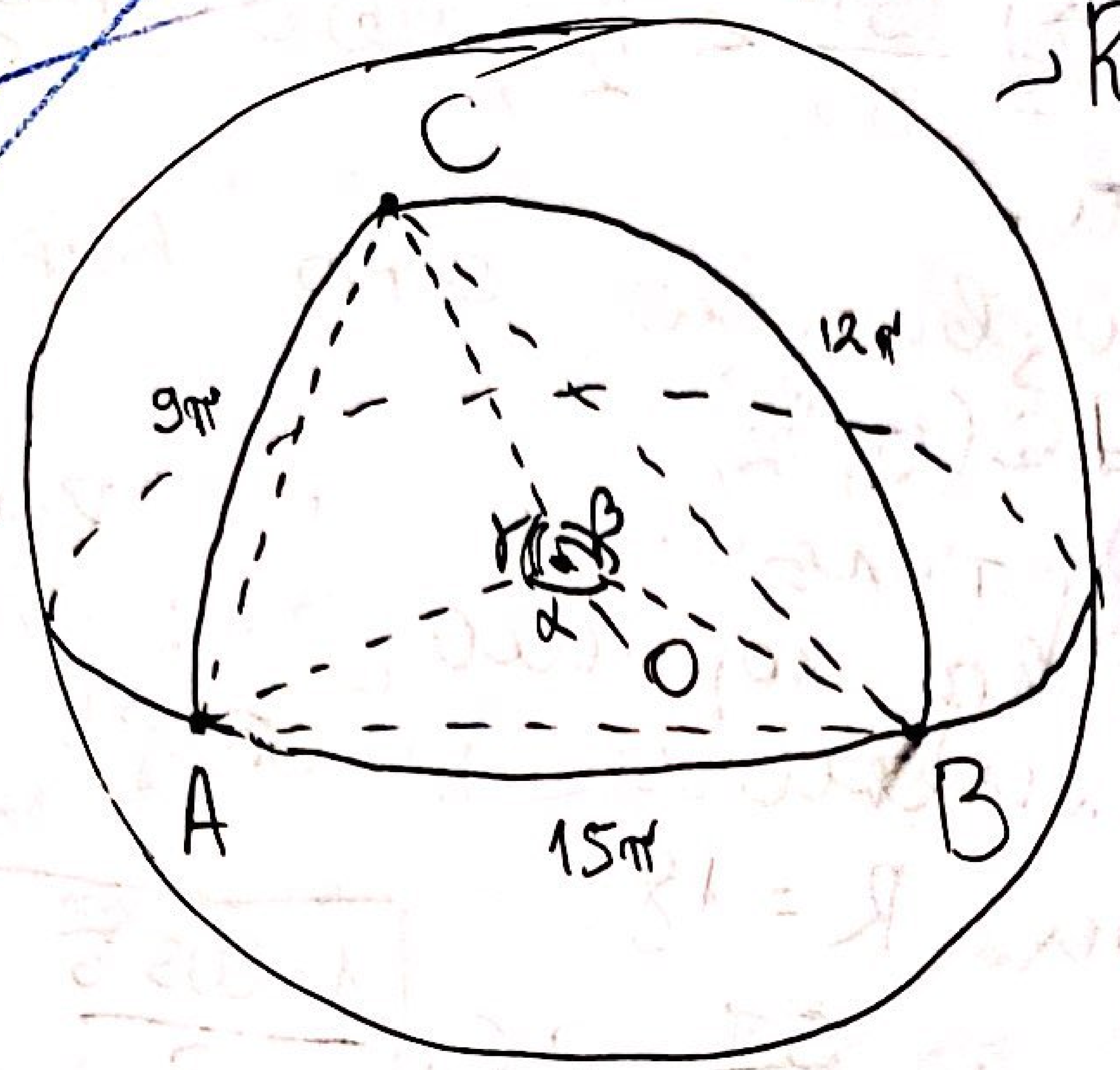
$$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin 2\alpha = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{26}\cdot 4\sqrt{26}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= 4\cdot 26\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = 4\cdot 2\cdot\cancel{13}\cdot 2\cdot\frac{2\cdot 3}{\cancel{13}} = 32\cdot 3 = 96.$$

Ответ: 96

Чистовик

Задача 5



$\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi]$

Пусть R - радиус сферы, O - её центр, $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle COA = \gamma$. ~~ΔR=15π~~ Минимальное расстояние по пов-ти сферы достигается если идти по меньшей из дуг большой окружности сферы, проходящей через нужные нам точки. Значит $\alpha = \frac{15\pi}{R}$, $\beta = \frac{12\pi}{R}$, $\gamma = \frac{9\pi}{R}$. Запишем критерий существования трехгранного угла с плоскими углами $\alpha \geq \beta \geq \gamma$:

$$\begin{cases} \alpha \leq \beta + \gamma, & \frac{15\pi}{R} \leq \frac{12\pi}{R} + \frac{9\pi}{R} = \frac{21\pi}{R} \text{ - верно } \forall R > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi, & \frac{36\pi}{R} \leq 2\pi, \ \underline{R \geq 18}. \end{cases}$$

Докажем, что увеличивая R мы будем увеличивать периметр, а тогда 18 будет радиусом с min периметром. Из соотв. р/б треугольников получаем:

$$AB = 2R\sin\frac{15\pi}{2R}, \quad BC = 2R\sin\frac{12\pi}{2R}, \quad CA = 2R\sin\frac{9\pi}{2R}.$$

Пусть $2R = r$, $15\pi = \varphi$. Тогда $AB(r) = r\sin\frac{\varphi}{r}$.

$$AB'(r) = 1\cdot\sin\frac{\varphi}{r} + r\cos\frac{\varphi}{r}\cdot\left(-\frac{\varphi}{r^2}\right) = \sin\frac{\varphi}{r} - \frac{\varphi}{r}\cos\frac{\varphi}{r}.$$

Чистовик | Докажем $AB'(r) > 0$:

$\sin\frac{\varphi}{r} - \frac{\varphi}{r}\cos\frac{\varphi}{r} > 0$; $\sin\frac{\varphi}{r} > \frac{\varphi}{r}\cos\frac{\varphi}{r}$.

Вспомним, что $0 < \frac{\varphi}{r} \overset{(*)}{\leq} \frac{15\pi}{36} < \frac{\pi}{2}$, поэтому

$\cos \varphi/r > 0$, поделим:

$\tan\frac{\varphi}{r} > \frac{\varphi}{r}$ — как известно это верно для $\frac{\varphi}{r} \in (0; \pi/2)$

Для BC и CA доказательство то же самое (в нер-ве (*) все хорошо, т.к. для BC и CA φ еще меньше). Теперь найдем перим. при $R = 18$:

$AB = 36\sin\frac{15\pi}{36} = 36\sin\frac{5\pi}{12} = 36\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} =$

$= 36\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = 36\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = 18\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

$BC = 36\sin\frac{12\pi}{36} = 36\sin\frac{\pi}{3} = 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$,

$CA = 36\sin\frac{9\pi}{36} = 36\sin\frac{\pi}{4} = \frac{36}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}$

Ответ: $18\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$.

Чистовик 1

Задача 6

Пусть $N = q_1^{\alpha_1}\dots q_n^{\alpha_n}$, где $q_1,\dots,q_n$ — его простые множители. Тогда $\sigma(N) = (\alpha_1+1)\dots(\alpha_n+1)$, ведь чтобы собрать очередной делитель мы каждый q_i берем в кол-ве от 0 до α_i, α_i+1 вариантов.

Значит $N^3 = q_1^{3\alpha_1}\dots q_n^{3\alpha_n}$, $\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)\dots(3\alpha_n+1)$.

Заметим, что

$$p_3 p_4 p_{1696} p_{1697} < p_4^2 p_{1697}^2 \Rightarrow N^2 < p_4^2 p_{1697}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N < p_4 p_{1697}$$

Черновик | $N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$; $N^3 = q_1^{3\alpha_1} q_2^{3\alpha_2} \dots q_k^{3\alpha_k}$.

$\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1)$

$\sigma(N) \geq 1697$ $\quad \sigma(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$

$N=30=2\cdot 3\cdot 5$ $\quad \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{15}, 10, 30$

$\cancel{R_1=1}$ $\qquad \alpha = \frac{\gamma}{r}$

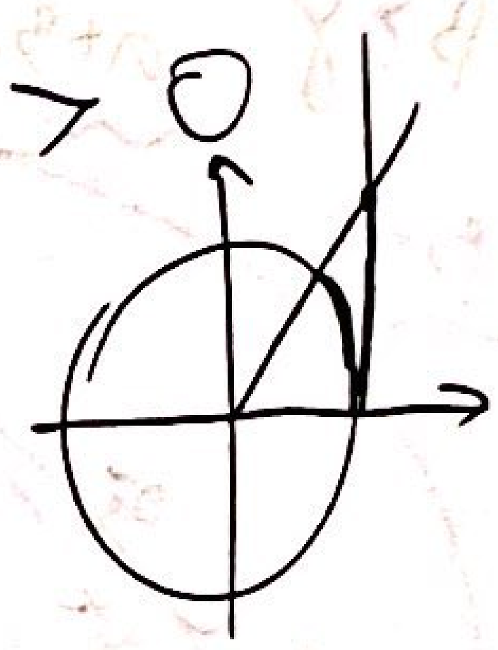
i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1	2	3	5	6	10	15	10

$\frac{\gamma}{r} = \frac{15\pi}{2R} \leq \frac{15\pi}{36} < \frac{\pi}{2}$

$AB = 2R\sin\frac{15\pi}{2R}$; $\quad 2R = r$, $15\pi = \gamma$

$AB' = \left(r\sin\frac{\gamma}{r}\right)' = \sin\frac{\gamma}{r} + \cancel{r}\cos\frac{\gamma}{r}\cdot\gamma\left(-\frac{1}{r^{\cancel{2}}}\right) =$ $\quad \alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$

$= \sin\frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma}{r}\cos\frac{\gamma}{r} = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha > 0$



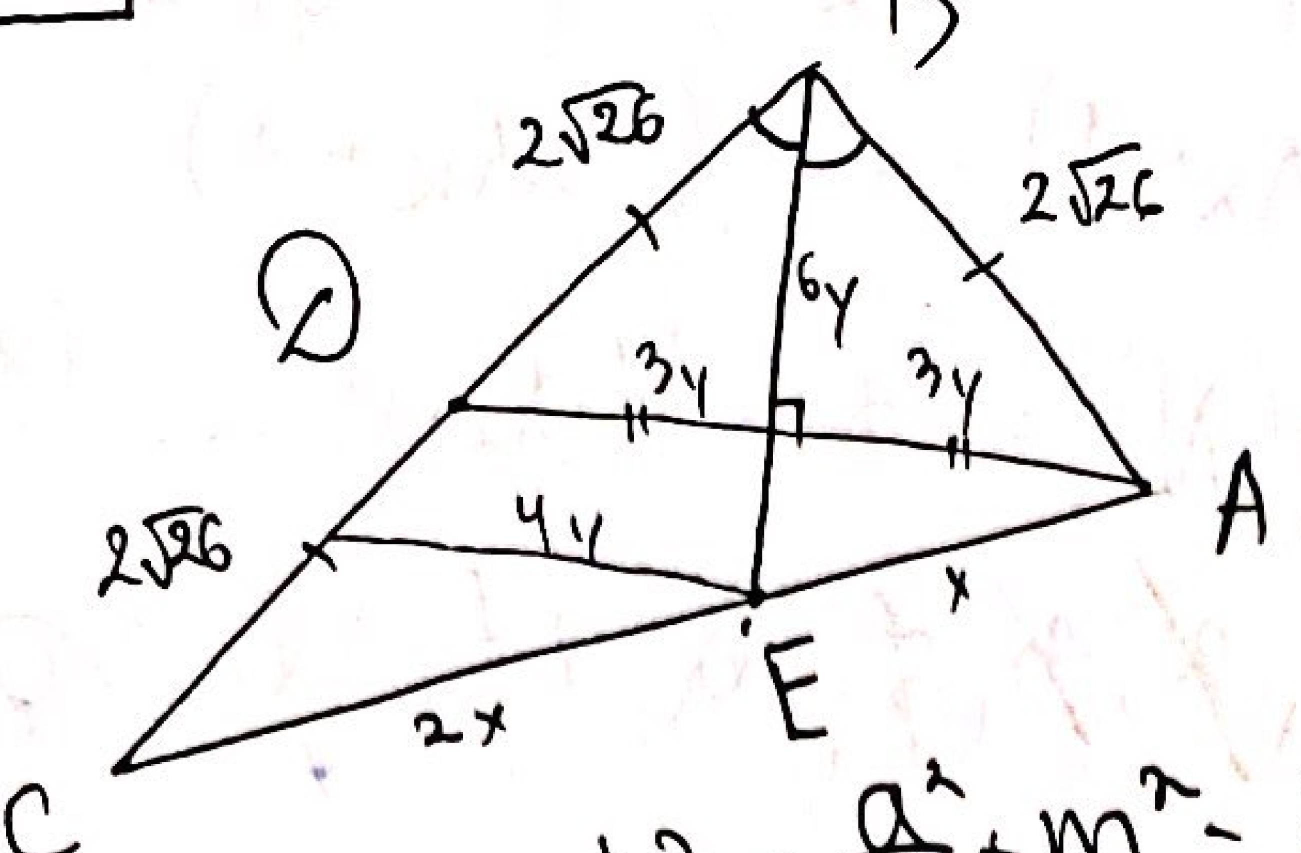
$\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$; $\tan\alpha > \alpha$

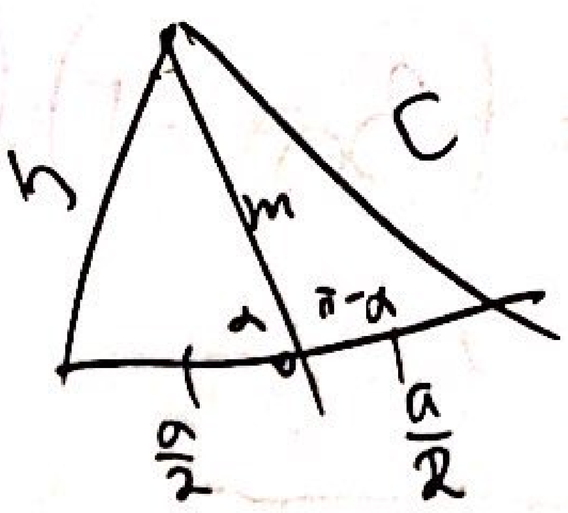
$\sin\alpha > t - \frac{t^3}{6}$, $\cos\alpha < 1 - \frac{t^2}{2}$

$\alpha\cos\alpha \leq \alpha\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = \alpha - \frac{\alpha^3}{2} < \alpha - \frac{\alpha^3}{6} = \sin\alpha$

Черновик

$AD = BE$





~~$\frac{1}{2}\frac{a}{2}m\sin\alpha=\frac{1}{2}$~~

$b^2=\frac{a^2}{4}+m^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot m\cdot\cos\alpha$

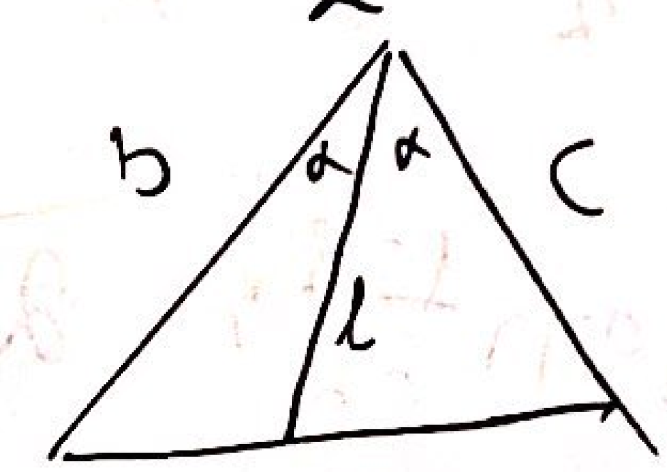
$c^2=\frac{a^2}{4}+m^2+2\frac{a}{2}m\cos\alpha$

$2m^2+\frac{a^2}{2}=b^2+c^2;\quad 2m^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2}$

$$\boxed{m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}$$

$9\pi=R\alpha$

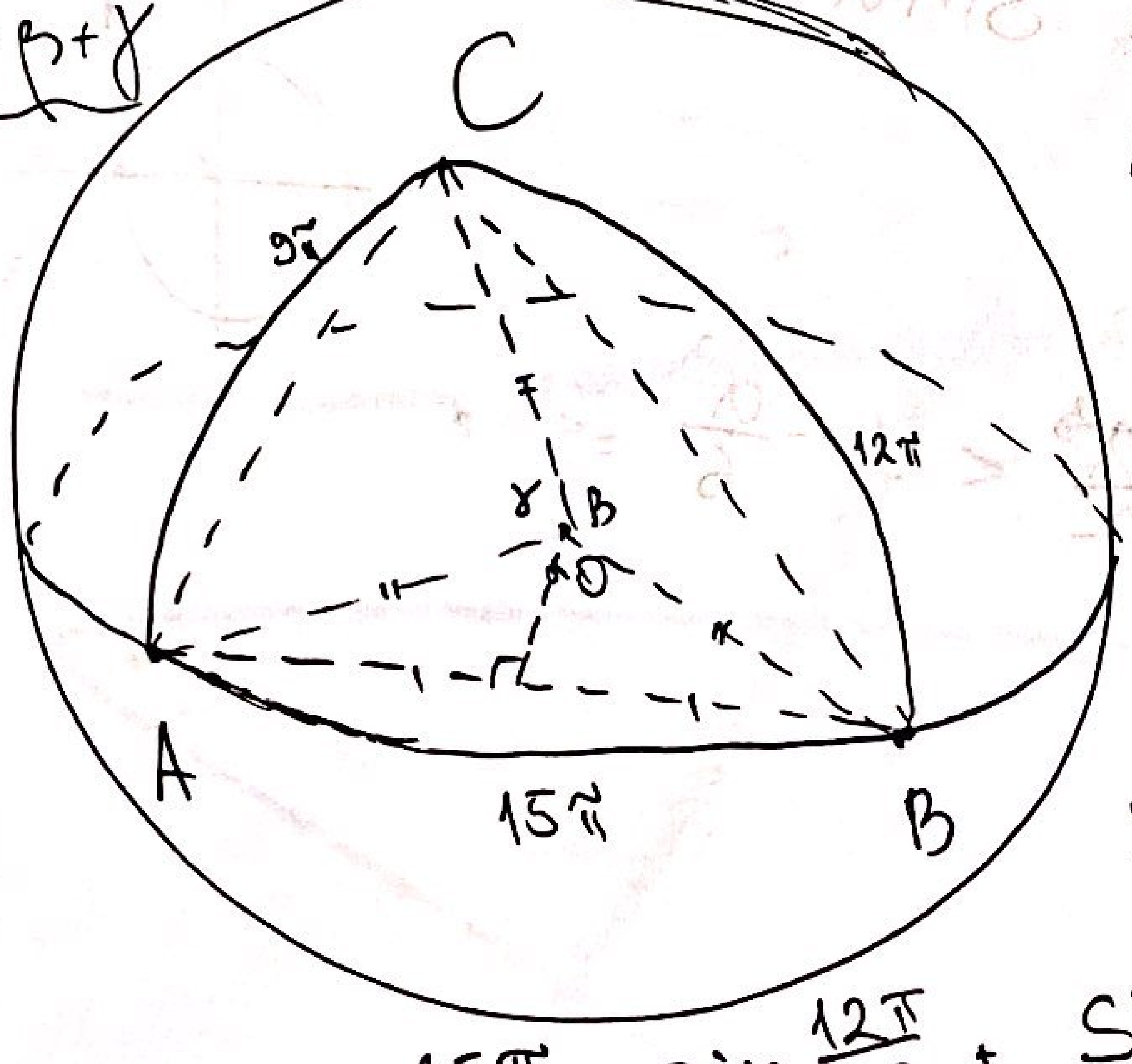
$\alpha=\frac{9\pi}{R}$



$\alpha\geq\beta\geq\gamma$ $\quad\alpha+\beta+\gamma\leq 2\pi$

$\alpha\leq\beta+\gamma$

$\sim R$ $\quad 15\pi=\alpha R;\ \alpha=\frac{15\pi}{R}$



$AB=2R\sin\frac{\alpha}{2}$

$=2R\sin\frac{15\pi}{2R}$

$BC=2R\sin\frac{12\pi}{2R}$

$CA=2R\sin\frac{9\pi}{2R}$

$x,y>0$ $\quad t-\frac{t^3}{6}$ $\quad 2R\geq 36$

$R\geq 18$

$P=2R\left(\sin\frac{15\pi}{2R}+\sin\frac{12\pi}{2R}+\sin\frac{9\pi}{2R}\right)$

$\sin xy\leq xy$ $\quad$ ~~$\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$~~

~~$x\sin y\geq \sin xy\, xy$~~

~~$x\sin y\geq\sin x\sin y$~~

$\frac{15\pi}{R}+\frac{12\pi}{R}+\frac{9\pi}{R}=\frac{36\pi}{R}\leq 2\pi;$

~~$P\geq 2R($~~

$AB'=2\left(\sin\frac{15\pi}{2R}+R\cos\frac{15\pi}{2R}\cdot\frac{15\pi}{2}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\right)$

$=2\left(\sin\frac{15\pi}{2R}-\frac{15\pi\cos\frac{15\pi}{2R}}{2R}\right)$