0 891885 330005

89-18-85-33
(123.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант Вариант 3

Место проведения Москва
город

Выход 12:45 – 12:54

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Афанасьева Ильи Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
89 – 18 – 85 – 33	100	20	20	20	20	20	5		

89-18-85-33 (123.7)

Чистовик.

1) $1+\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sin^2 x+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=$
$=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$1+2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$1+\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}$

$\left(2\sqrt{2}-\cos\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x=-\left(\sqrt{2}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$

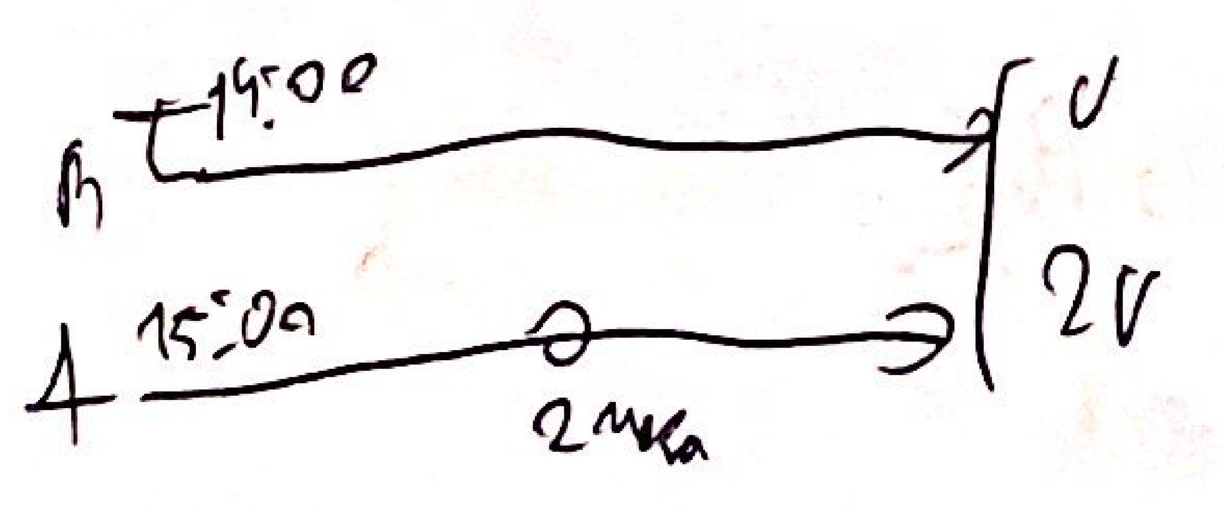
$(4-1)\cos 2x=-(2+1)\sin 2x$

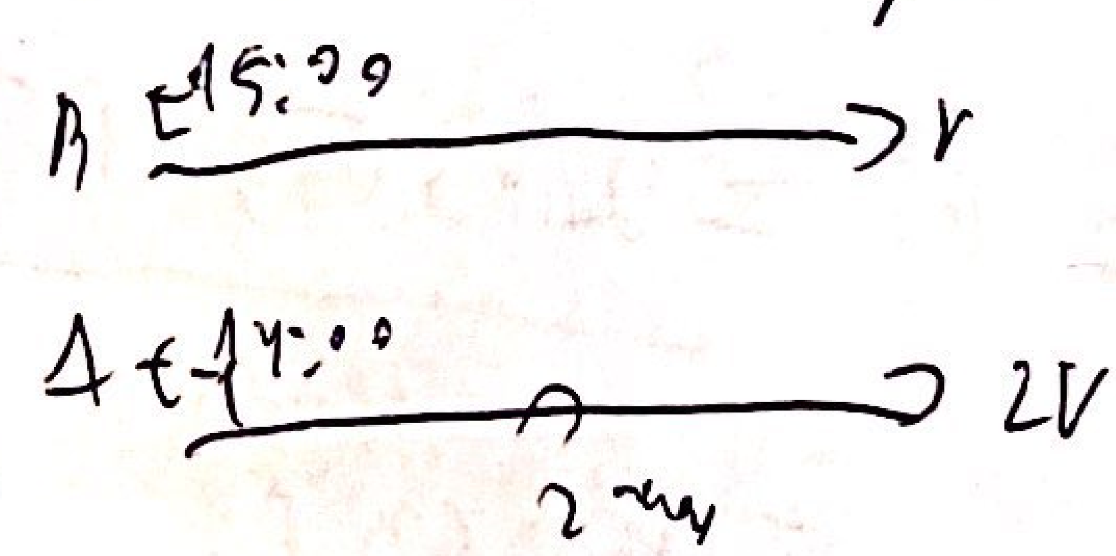
$\operatorname{tg} 2x=-1 \quad 2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$

Дано скорость вел $=v$ скорость авто $2v$ остановка 2 часа было по дороге

2) Велосипед не мог остановиться ибо его скорость меньше и время было бы тоже меньше: $\Rightarrow$ 2 случая





$tv=2v(t-3)$

$t=6 \Rightarrow 20:00$

$vt=2v(t-1)$

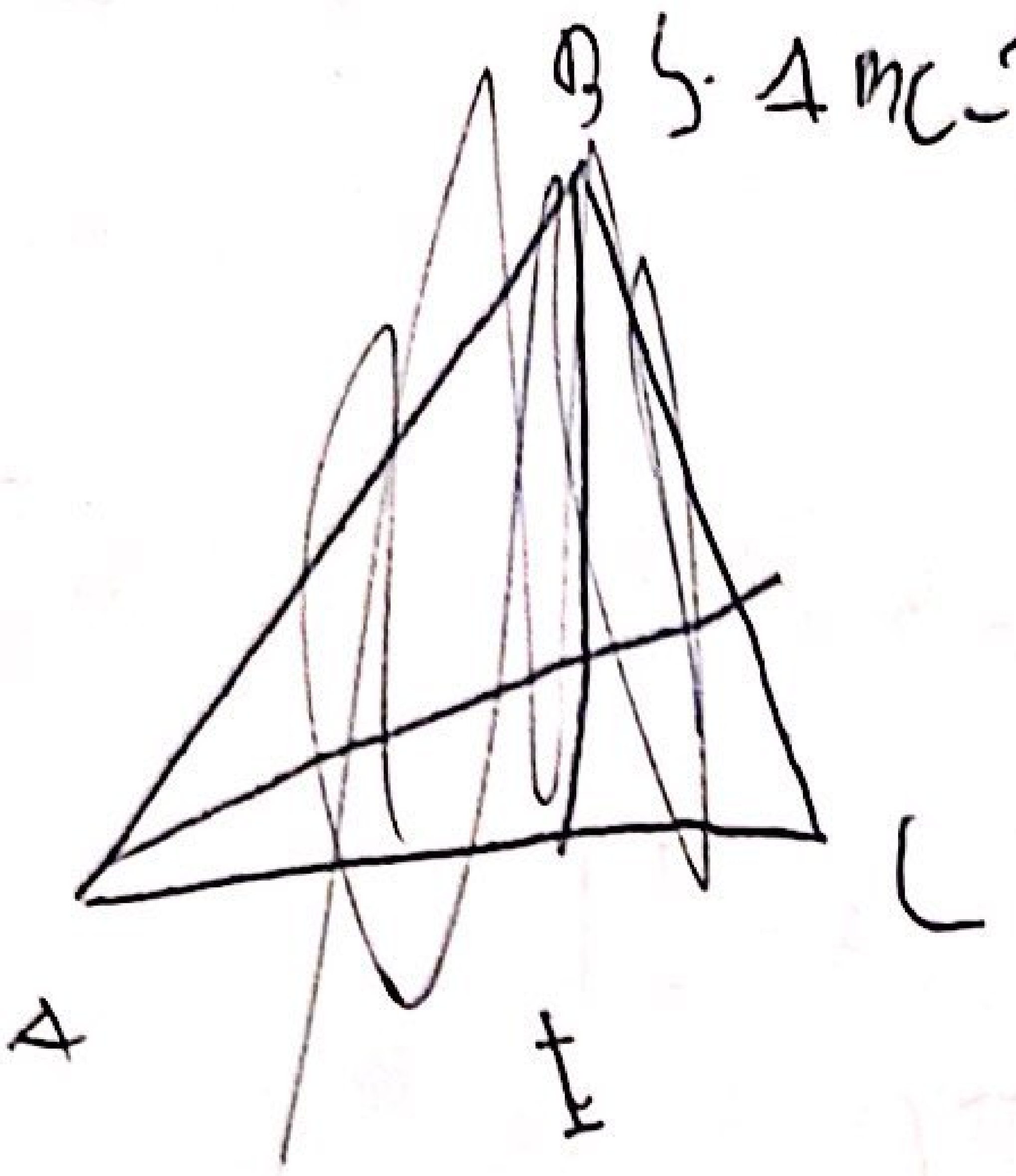
$t=2\Rightarrow 17:00$

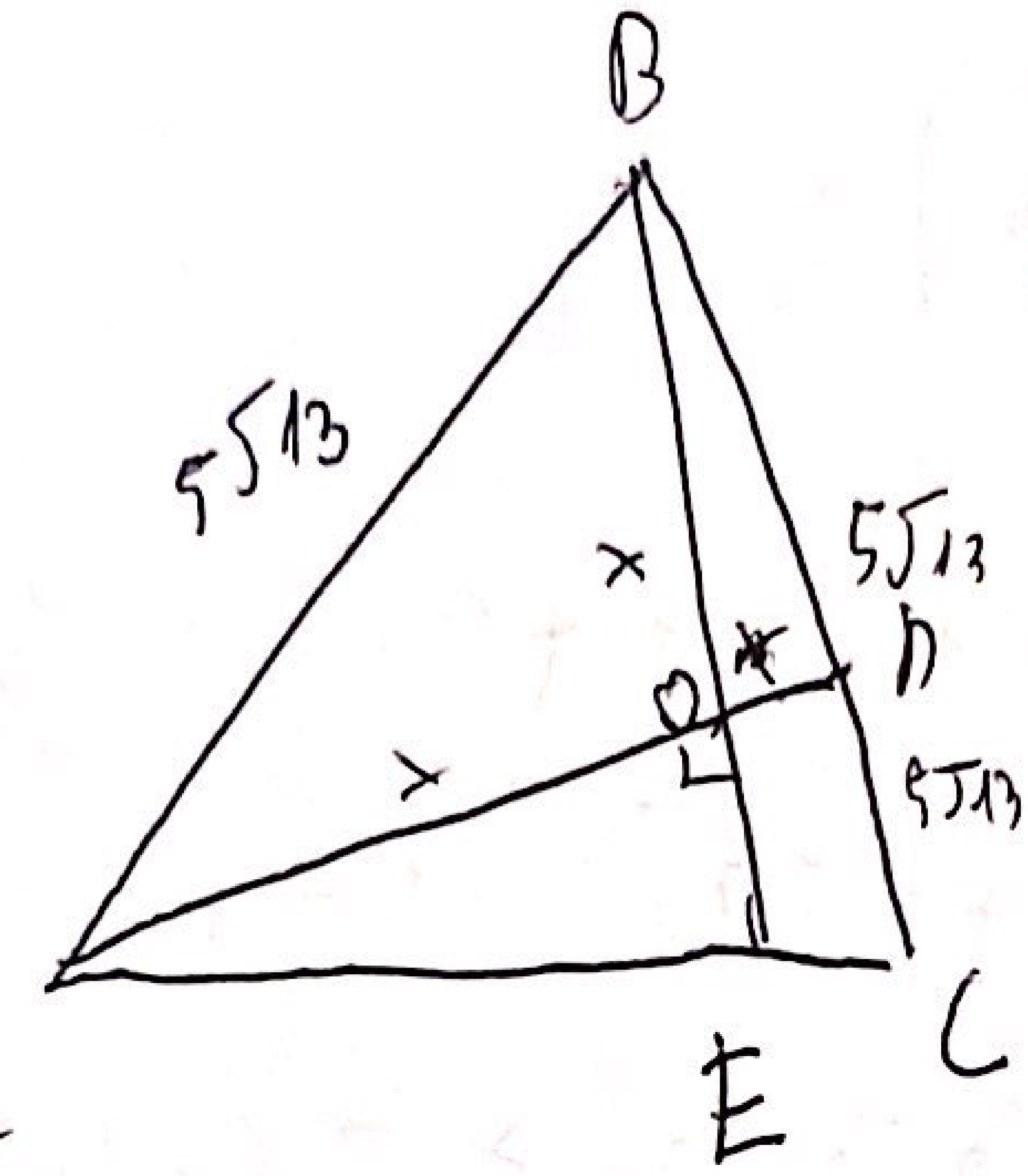
(1) Ответ: 20:00, 17:00

№9 Черновик.

Дано: ~~вас бис~~ $\triangle ABC$ бис BE AB медиана $AB = 5\sqrt{13}$

$S_{\triangle ABC}$ - ?





Решение: ~~Пользуясь~~ $\triangle ABO$ в нем BO биссектриса и BO перпендикуляр AD значит BO медиана. Тогда $\triangle ABD$ равнобедренный $AB = BD = DC = 5\sqrt{13}$

$AO = OB = x$ $BE = 2x$. Рассмотрим $\triangle ABC$ с бис BE

Обозначим $\angle ABC$ за β тогда $\angle ABE = \angle CBE = \frac{\beta}{2}$

$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BE \cdot \sin\frac{\beta}{2}$ $S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} CB \cdot BE \cdot \sin\frac{\beta}{2}$

тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} BE \cdot (AB + BC) \sin\frac{\beta}{2}$

Из этого $BE = \frac{2 \cdot AB \cdot BC}{AB + BC} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$

$2x = BE = \frac{2 \cdot 5\sqrt{13} \cdot 10\sqrt{13}}{15\sqrt{13}} \cdot \cos \beta/2$

$x = \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{13} \cdot \cos \beta/2$

из $\triangle ABO$ $x = AO = 5\sqrt{13} \cdot \sin \beta/2$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x = 5\sqrt{13}\cdot\cos\frac{B}{2} \\ x = 5\sqrt{13}\cdot\sin\frac{B}{2} \end{cases}$$

Чистовик.

$$\frac{9}{4}x^2 + x^2 = 325 \quad \frac{13x^2}{4} = 325 \quad x^2 = 100 \quad x = 10$$

$$\cos\frac{B}{2} = \frac{3\cdot 10}{2\cdot 5\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \sin\frac{B}{2} = \frac{10}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin B = 2\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{13}\cdot 10\sqrt{13}\cdot\frac{12}{13} =$$

$$= 25\cdot 12 = 300$$

Ответ: 300

5)

Дано 20П, 12П и 16П. Решение

Кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере по её поверхности это длина минимальной дуги проходящей через эти точки окружности с центром в центре сферы. Тогда радиус сферы не может быть меньше чем 20 так т.к. если радиус будет < 20 то $\cup 20\pi$ не может быть меньшей дугой. т.к. длина всей окружности будет меньше 40π. Пусть R это радиус сферы. Тогда т.к. AB, AC и BC меньшие дуги то их длина $\le \pi\cdot R$. и больше 0. Тогда рассмотрим $\triangle OAB$

$$\angle AOB = \frac{\text{дуга } AB}{R} \le \pi \text{ и } > 0 \qquad \text{Тогда } \frac{\pi}{2} \ge \frac{\cup AB}{2R} > 0$$

3

Чистовик.

Отрезок $AB = 2R \cdot \sin \cup AB = 2R \cdot \sin \frac{\cancel{\cup AB}}{2R}$

$BC = 2R \cdot \sin \frac{10\pi}{R}$ $AC = 2R \frac{\sin 6\pi}{R}$ тогда

периметр $ABC = 2R \cdot \left(\sin \frac{8\pi}{R} + \sin \frac{10\pi}{R} + \sin \frac{6\pi}{R} \right)$

Нужно найти минимальный периметр т.е. найти минимум

зависимости от радиуса для этого возьмём производную P по R

тогда $P' = 2 \cdot \left(\sin \frac{8\pi}{R} + \sin \frac{10\pi}{R} + \sin \frac{6\pi}{R} \right) - \frac{2}{R}$

$\left(8\pi \frac{\cos 8\pi}{R} + \frac{10\pi \cos 10\pi}{R} + \frac{6\pi \cos 6\pi}{R} \right)$

минимальный радиус среди возможных это когда

все точки лежат на одной окружности с центром в центре стола

Длина $= 20\pi + 16\pi + 12\pi = 48\pi$ Радиус $= 24$

Тогда $P = 48 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{12} \right) =$

$= 12 \cdot (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) =$

(4) Ответ $12 (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$

89-18-85-33 (123.7)

Черновик.

3 Дано: $x^3-6x^2+42x-1=0$ $x^3+ax^2+bx+c=0$ корн $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$.

Теорема Виета для $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-d \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=1 \end{cases}$$

$(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=-a$

$2(x_1+x_2+x_3)=-a$

$a=-12$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)\cdot(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)=$

$=3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1^2+x_2^2+x_3^2=b$

$3\cdot\cancel{7}+22=b$ $b=43$.

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-\cancel{6}$

Заметим $x_1+x_2+x_3=6$ и получим

$(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2)=-c$ $=2c=-41$

$f(6)=6^3-6(6)^2+42(6)-1=6^3-6^3+42-1=\cancel{41}$ 41

5 ~~Ответ: a=-12, b=43, c=-41~~

Чистовик.

Ответ: $a=-12$, $b=43$, $c=-41$

Д-о:

$$\begin{array}{r} 1876 \\ \times\ 7 \\ \hline 13132 \end{array}$$

Для числа N все делитель p, в порядке возрастание $1=p1<p2<\ldots pk=N$

Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$

Пусть $N=x_1^{\alpha 1}\ldots x_s^{\alpha s}$ простые $\Rightarrow \sigma(N)=(\alpha 1+1)\ldots(\alpha s+1)$

N натуральное возможно $\sigma(N^3)$ ей удовлетворим

$\sigma(N^3)=(3\cdot\alpha 1+1)\ldots(3\alpha s+1)$, $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2$

$(p_4\cdot p_{1877})^2\geq p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2\Rightarrow p_4\cdot p_{1877}\geq N$

$$\begin{array}{r|l} 1878 & 2 \\ 939 & 3 \\ 313 & \end{array}$$

Решение: ~~Сумма цифр числа совпадает с самим числом~~

$\Rightarrow\sigma(N)\leq 1877+4-1=1880$ (когда $p_4\cdot p_{1877}=N$), также $\sigma(N)\geq 1877$

но если $\sigma(N)=1880$, то $p_4\cdot p_{1876}<N$ и $p_3\cdot p_{1877}<N\Rightarrow$ не вып-ся усл

~~по остатку при делении на 9. Если их будут факторизации~~

$$\begin{array}{r} 1876 \\ \times\ 3 \\ \hline 5628 \end{array}$$

1) 1877 - простое $\Rightarrow\sigma(N^3)=(3\cdot 1876+1)=\boxed{5629}$

$$\begin{array}{r} 1877 \\ \times\ 3 \\ \hline 5631 \end{array}$$

~~Остаток от деления на 4~~

$$\begin{array}{r} 2815 \\ \times\ 4 \\ \hline 11260 \end{array}$$

2) $1878=2\cdot 3\cdot 313=6\cdot 313=2\cdot 939=1\cdot 1878=626\cdot 3$

$\sigma(N^3)=\boxed{5632}$

$\sigma(N^3)=(3\cdot 1+1)\cdot(312\cdot 3+1)\cdot 7=28\cdot 937=\boxed{26236}$

$$\begin{array}{r} 937 \\ \times\ 28 \\ \hline 7496 \\ 1874 \\ \hline 26236 \end{array}$$

~~Далее~~ $\sigma(N^3)=(938\cdot 3+1)\cdot 4=2815\cdot 4=\boxed{11260}$

$\sigma(N^3)=(312\cdot 3+1)\cdot 16=937\cdot 16=\boxed{14992}$

$$\begin{array}{r} 937 \\ \times\ 16 \\ \hline 5622 \\ 937 \\ \hline 14992 \end{array}$$

$\sigma(N^3)=(625\cdot 3+1)\cdot 7=1876\cdot 7=\boxed{13132}$

$$\begin{array}{r} 1878 \\ \times\ 3 \\ \hline 5634 \end{array}$$

~~$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N$~~

3) 1879 - простое $\Rightarrow\sigma(N^3)=(3\cdot 1878+1)=\boxed{5635}$ Ответ.

(6)

Черновик.

1) $1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$\cancel{1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$1+2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$\cancel{\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin x^2+\sqrt{2}\cos x^2+\sqrt{2}\sin x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$1+\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\sin x^2+\cos x^2)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\cancel{2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\cos x^2-\sin x^2)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\cancel{2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$\left(2\sqrt{2}-\cos\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x=-\left(\sqrt{2}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$

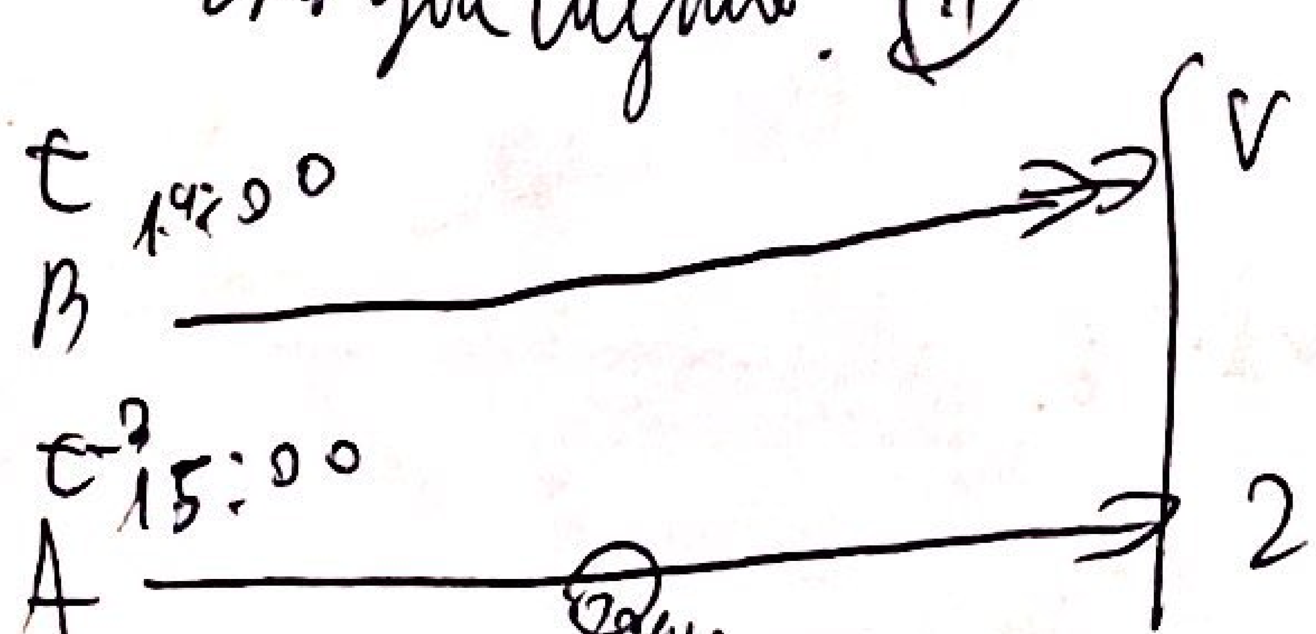
$(4-1)\cos 2x=-(2+1)\sin 2x$

$\operatorname{tg} 2x=-1$

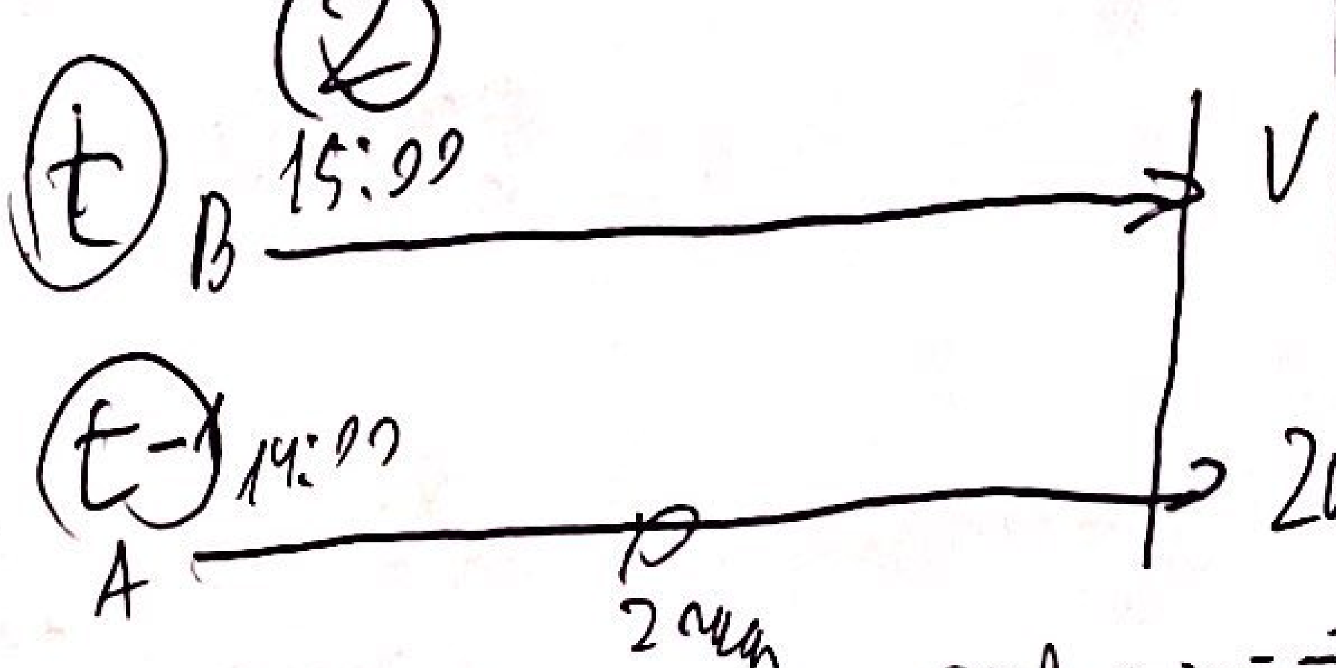
$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$

Велосипедист не мог останавливать т. к. его скорость меньше скорости автомобилиста. Если он остановиться то будет ехать меньшее время и будет в пункте В позже автомобилиста. Есть два случая. ①



②



Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$.

$tV=2V(t-3)$ $\qquad Vt=2V(t-1)$ п. уд.

$t=2t-6$ $\qquad t=2t-2$

$\cancel{t=2t-3}$ $\quad t-3=3$ $\quad t=6\Rightarrow 20:00$ $\qquad t=2\Rightarrow 17:00$

① Ответ: 20.00, 17:00.

Черновик.

3) Дано: x_1, x_2, x_3 корни $x^3-6x^2+7x-1=0$ $\quad x^3+ax^2+bx+c=0$

$x_1+x_2,\ x_2+x_3$ и x_3+x_1.

Теорема Виета для $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=\dfrac{-d}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=1 \end{cases}$$

Для $x^3+ax^2+bx+c=0$ ТВ выглядит так.

$$(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=-a$$

$$2(x_1+x_2+x_3)=-a \Rightarrow a=-12$$

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)=b$$

$$= \cancel{7+7+x+(x_1^2+x_2^2}+x_3^2)= 3\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+$$

$$+x_1^2+x_2^2+x_3^2=b \quad 3\cdot 7+22=b \quad b=43.$$

$$(x_1+x_2+x_3)^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3x_1)=$$

$$=6^2=36$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+14=36.$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=22$$

$-c=$ ~~$x_1x_2x_3$~~ $(6-x_1)(6-x_2)$

$$-c=(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2)$$

Черновик.

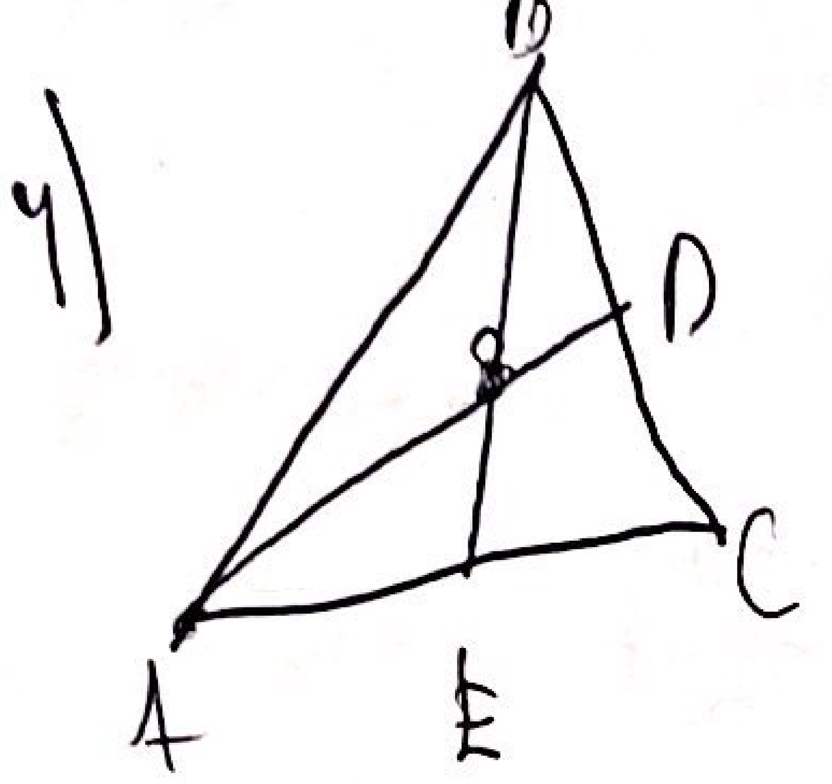
$-c = \cancel{6^3 + 6 \cdot 1(\ldots)}$

$6^3 - 6(6)^2 + 7(6) - 1 = 6^3 - \ldots - 6^3 + 42 - 1 = 41$

$c = -41.$

Ответ: $a = -12$, $b = 43$, $c = -41$.

4)



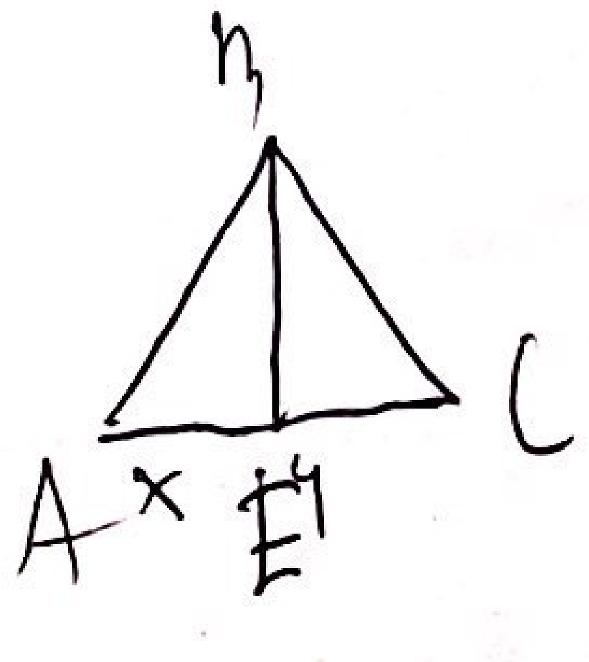
$\angle AOB\ 90^\circ$ $AO = OB$

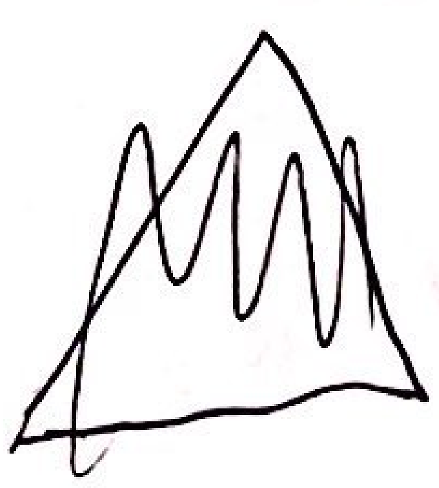
$\angle ABO$ и $\angle OBE$ равн т.к. BE бис

рассмотрим $\triangle ABD$ т.к. BO бис т.к. является

частью BE и $BO \perp AD$ тогда BO высота тоесть

$\triangle ABD$ равнобедренный $AO = OB$

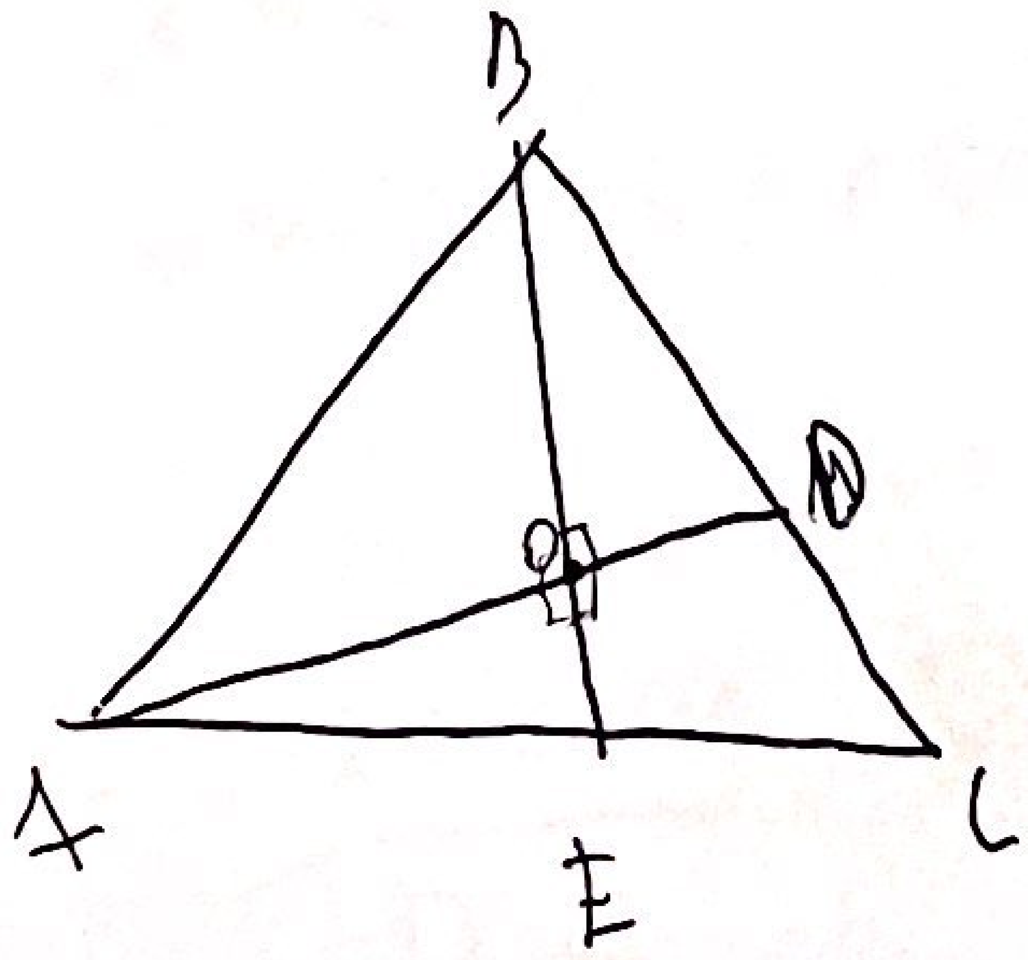




$AB = c$ $BC = a$ $BE = \ell$

$\triangle ABE$, $\triangle BEC$

$\angle ABE$ и $\angle EBC$ равны и значит $\frac{B}{2}$



$S_1 = \frac{1}{2} c \cdot \ell \cdot \sin \frac{B}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} a \cdot \ell \cdot \sin \frac{B}{2}$

тогда площадь всего ABC равна $S_1 + S_2$

$$\frac{1}{2}\ell(a+c)\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\ell = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{B}{2}$$

Черновик.

тогда $l^2 = a \cdot c - x \cdot y$ $\quad BE = \dfrac{2 \cdot AB \cdot BC}{AB + BC \cdot \cos\frac{B}{2}} =$

$BC = 2\,AB = 10\sqrt{13}$

$BE = 2x \quad x = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot \cos B/2$

из ΔABO $x = AB \cdot \sin B/2$.

$\begin{cases} \frac{3}{2}x = AB \cdot \cos B/2 & |^2 \; + \\ x = AB \cdot \sin B/2 & |^2 \end{cases}$

$\frac{9}{4}x^2 + x^2 = AB^2$

$\frac{13}{4}x^2 = AB^2$

$\frac{13}{4}x^2 = 10\sqrt{13}$

$x = \dfrac{10\sqrt{13}}{\frac{13}{4}}$

$x =$

$\cos\frac{B}{2} = \frac{3x}{2AB}$

$\sin\frac{B}{2} = \frac{x}{AB}$

$\sin B = 2\left(\sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{B}{2}\right)$

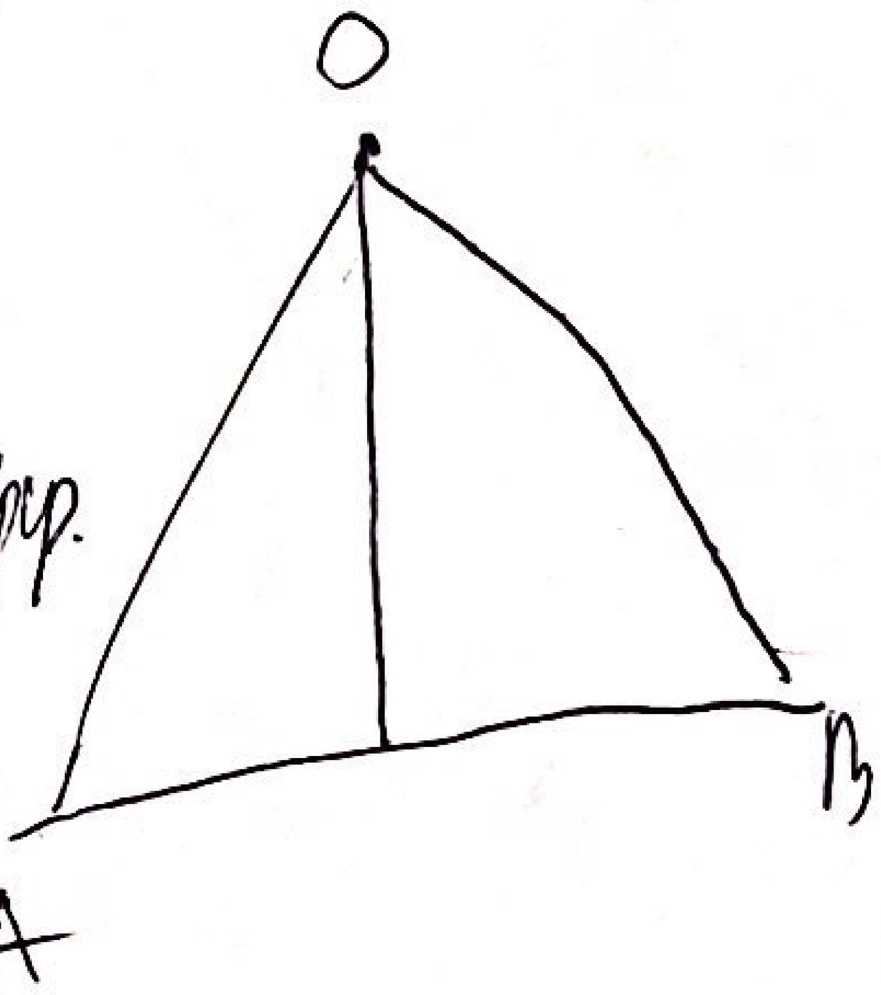
$S_{\Delta ABC}\ \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot BC) \cdot \sin\beta =$

$= \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot BC) \cdot 2AB \cdot \sin\beta$

Черновик.

5) Расстояние между двумя точками по сфере это е о поверхности ... наименьшей дуги проходящей через эти точки окружности с центром в центре этой сферы тогда Г сферы не может быть меньше чем $\frac{AB}{\pi}$, $\frac{BC}{\pi}$, $\frac{AC}{\pi}$ иначе CA ... AB ... BC ... AC не будет границами

расстояния меньшей дуги соединяющие эти точки, но с меньшей границей



Обозначим за R радиус сферы

тогда

Длина AB это $\angle AOB \cdot R$ тогда $\angle AOB$ это угол $\frac{AB}{R}$ и

в т.к $\triangle OAB$ $AO = OB = R$ то высота является медианой и

биссектрисой $\angle AOH = \frac{\cup AB}{2R}$ $AH = R \cdot \sin \angle AOH$ тогда $AB =$

$= 2 \cdot R \sin \frac{\cup AB}{2R}$. Более того так как AB это наименьшая дуга то

угол AOB меньше или равен π тогда угол $OH \leq \frac{\pi}{2}$ поэтому дуга AB

$\leq 2\pi R$