0 707781 190004

70-77-81-19
(123.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лагерь Майи Борисовна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
70-77-81-19 123.5	85	20	20	20	20	0	5		

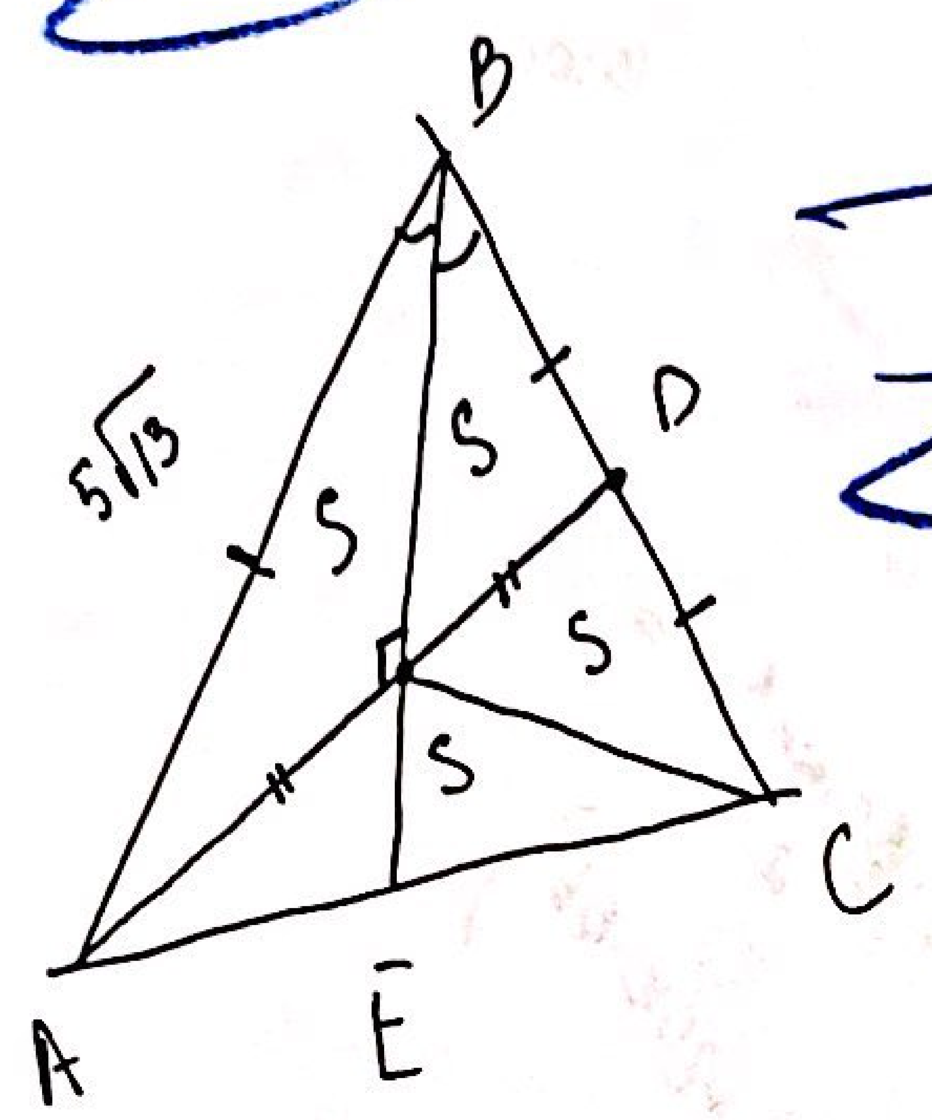
70-77-81-19 (123.5)

Черновик

$1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$1+2\sqrt{2}(\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$1+2\sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}+1-2\sin^2 x\right)=2($



$\cos x-2\sin x$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $1-\cos^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right.$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}=$

$2\sqrt{2}\,(\quad)=$

$\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x-\sin 2x)$

$x^3-6x^2+7x-1=0$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$x_1x_2x_3=1$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$

$x_1+x_2+x_3=6$

$x^3+ax^2+bx+c=0$

$-a=2x_1+2x_2+2x_3=12$

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)$

$+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=x_2^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+\dots+x_2x_3)=$

$=36+7$

$x_1^2x_2+x_2^2x_1=x_2x_1(x_1+x_2)$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=$

$=x_1^2x_2$

$-c=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)=$

$=(x_1^2+x_2x_1+x_1x_3+x_2x_3)(x_2+x_3)=$

$=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+2x_1x_2x_3$

$+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_3^2x_2=$

$=2x_1x_2x_3+x_1x_2x_3($

$x^3-6x^2+7x-1=0$

$f(0)=-1$

$f(1)=1$

$6\cdot16 \quad 6\cdot25$

$f(2)=8+14-24-1=-3$

$f(5)=125-120-30+35-1$

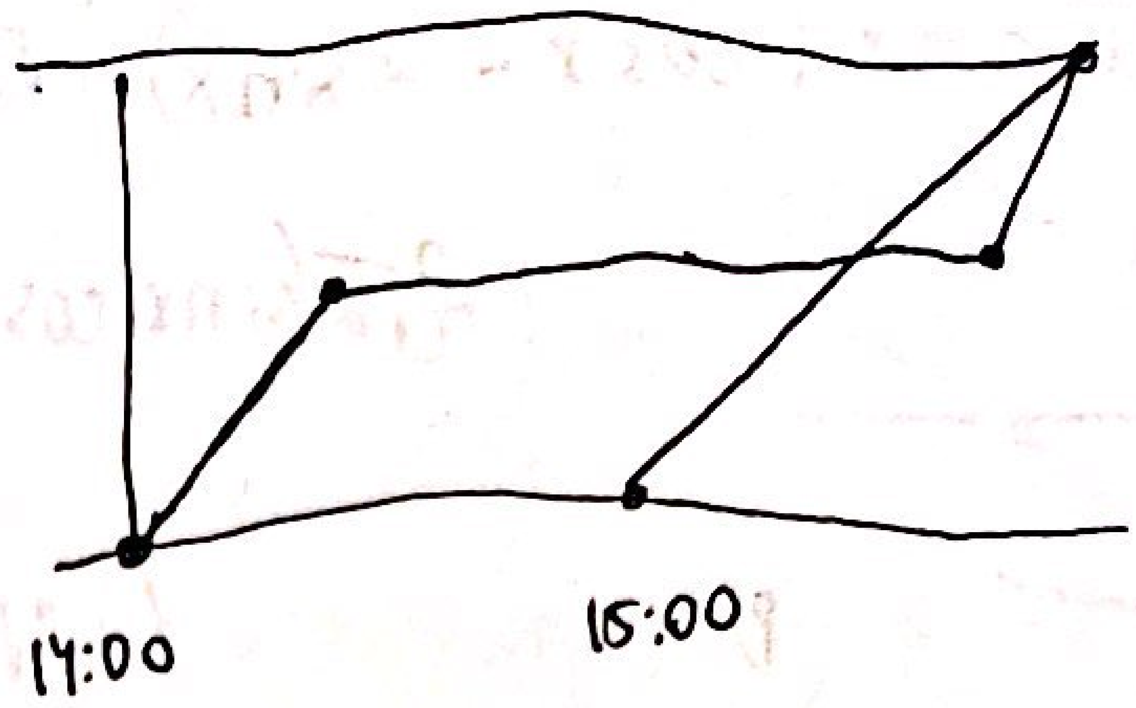
$f(3)=\cancel{27-54}+21$

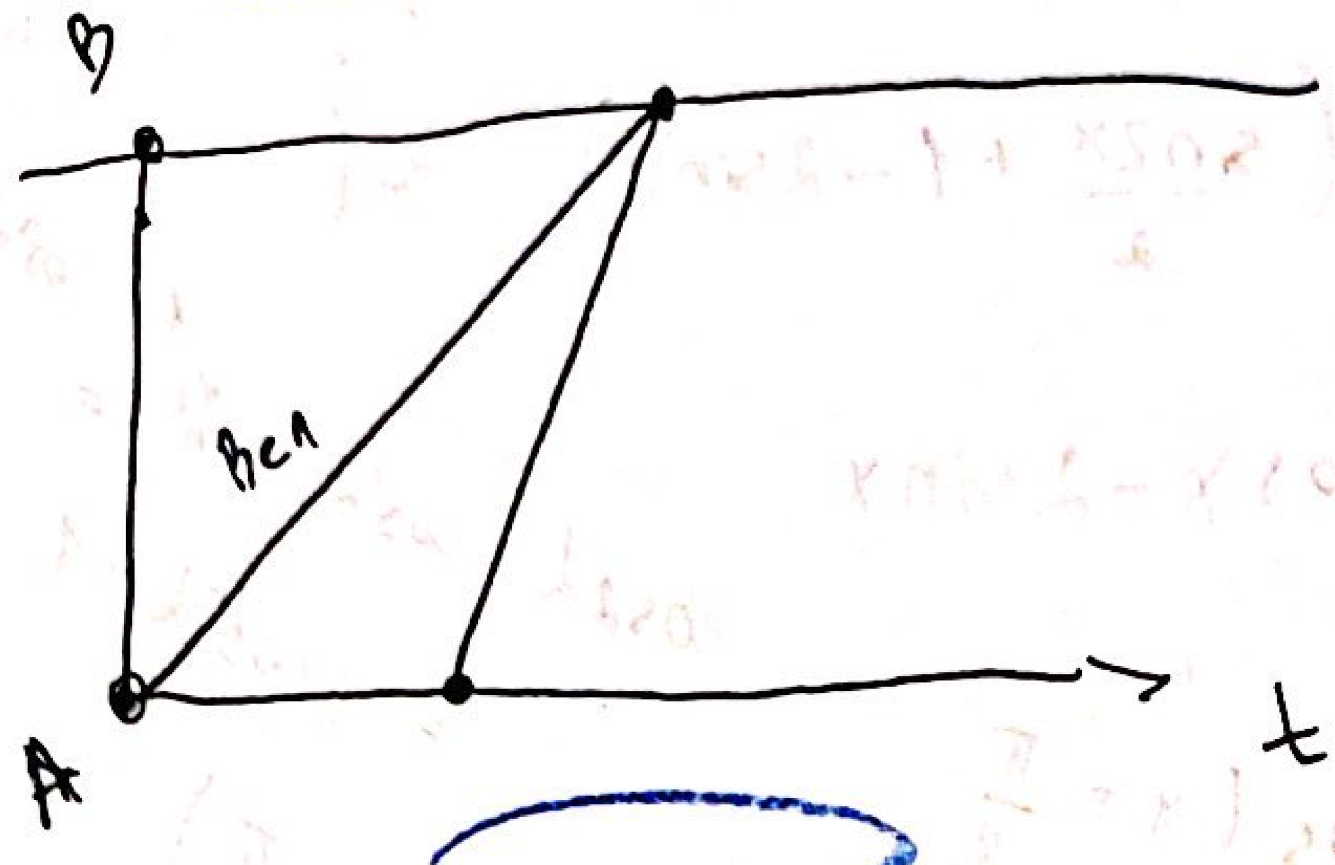
$f(4)=64-60-36+28$

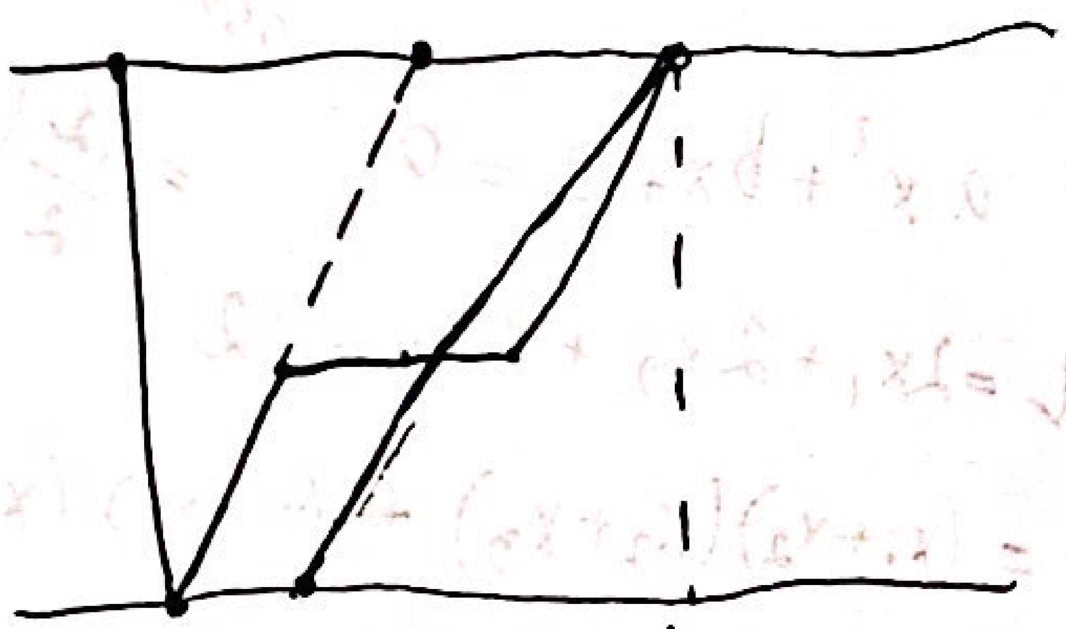
$4\left(\frac{\sin 2x}{2}+\cos 2x\right)=\cos 2x-\sin 2x$

$3\sin 2x+5\cos 2x=0.$

Черновик

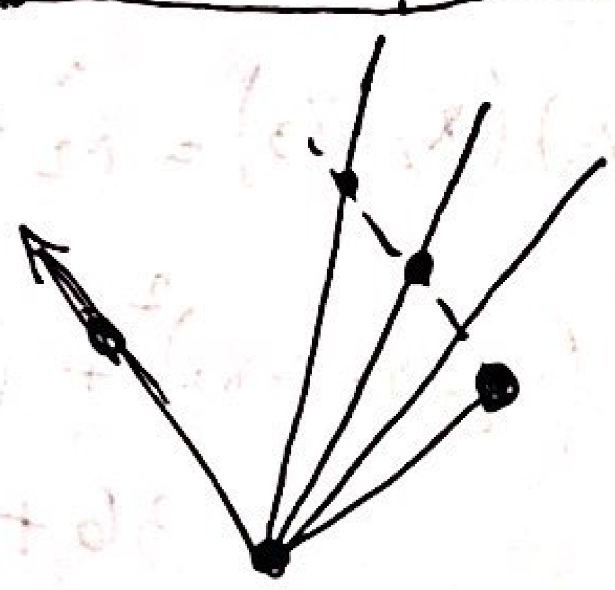


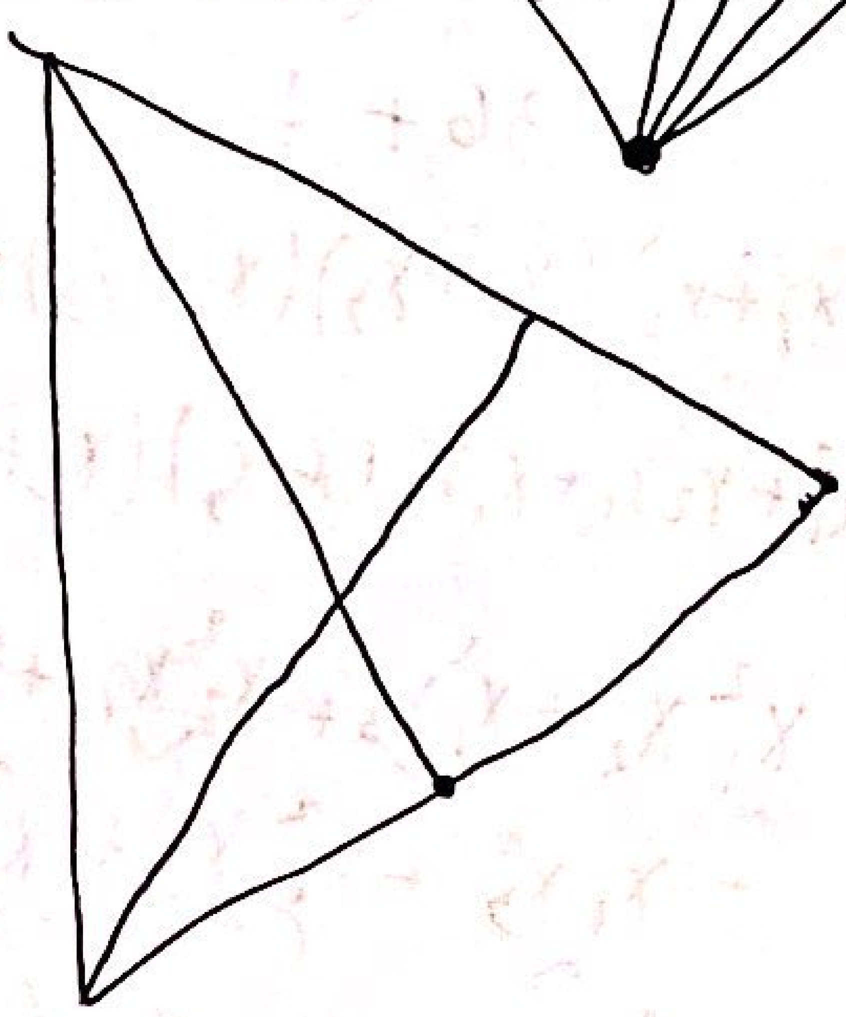


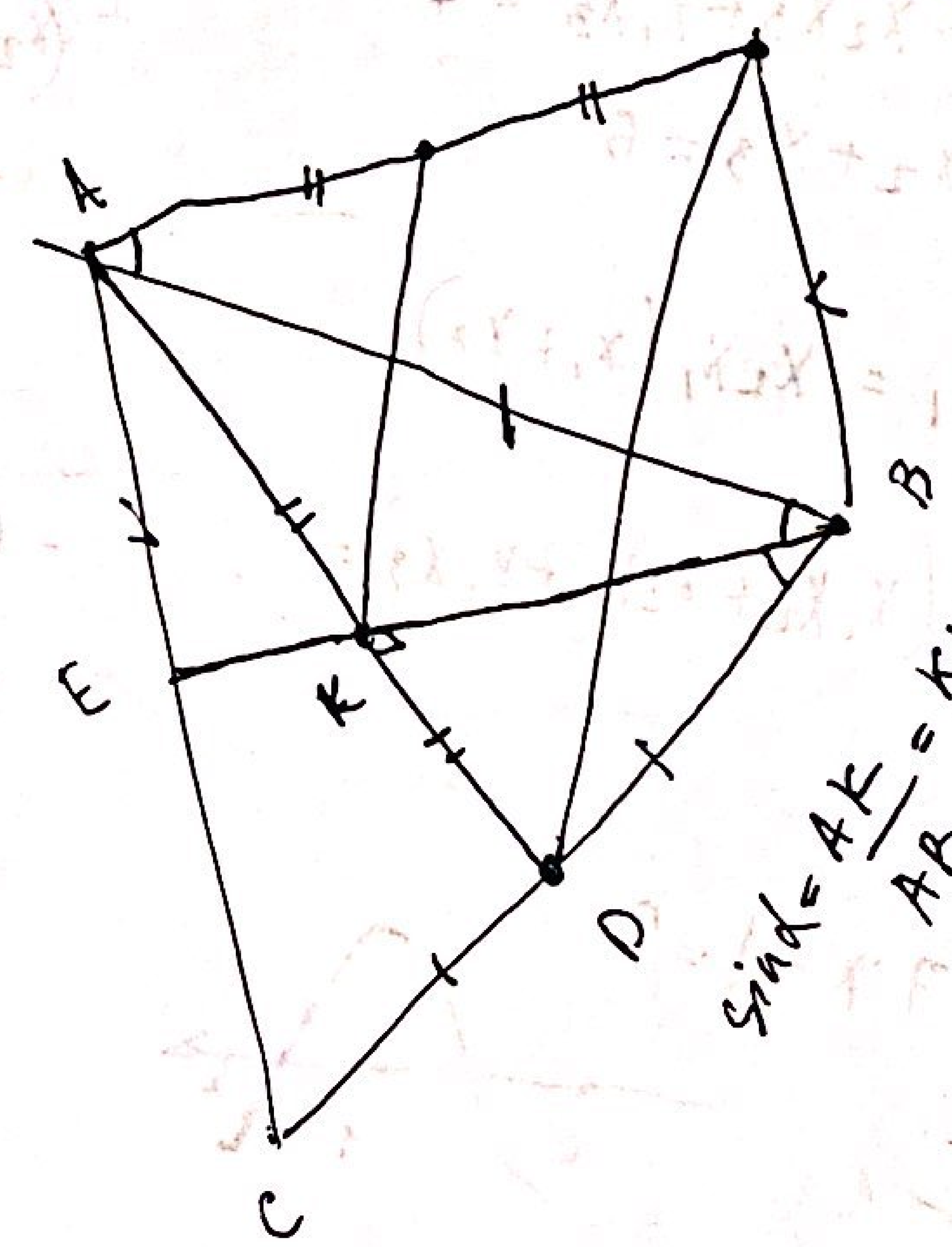


$S=\frac{AB\cdot BE\sin\alpha}{2}+\frac{BE\cdot BC\sin\alpha}{2}=$

$=\frac{1}{2}\left(AK\cdot BE+2DK\cdot BE\right)$







$\sin\alpha=\frac{AK}{AB}=\frac{KD}{BC}$ 2

$p_1<\ldots<p_k$

$p_i p_{k-i}=N$

$p_3\cdot p_{k-3}=N$

$p_4\cdot p_{k-4}=N$

$p_1^{3\alpha}\ldots p_k^{3\alpha}$

$(\alpha+1)\ldots(\alpha+1)$

$(3\alpha+1)\ldots(3\alpha+1)$

Чистовик

Задача 3.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 1$

$f(0) = -1$
$f(1) = 1$
$f(2) = -3$
$f(5) = 9$

По лемме о промежуточном значении $\Rightarrow$ в силу непрерывности $f(x)$, есть корень между 0 и 1, 1 и 2, 2 и 5.

Тогда эти корни и будут x_1, x_2, x_3

По Th Виета для $f(x)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_2 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

~~$x^3 + ax$~~

$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Если $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$ - его корни

$\Rightarrow$ по Th Виета:

$$-a = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 12$$

$$b = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_1 + x_3) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 6^2 + 7 =$$
$$= 43$$

$$-c = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3) = 2x_1x_2x_3 +$$
$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3 =$$
$$= 7 \cdot 6 - 1 = 41$$

$g(x) = x^3 - 12x^2 + 43x - 41$

Ответ: $a = -12$, $b = 43$, $c = -41$.

Чистовик.

Задача 1.

$1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$2\sqrt{2}\left(\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-1$

$2\sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}+\cos 2x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$2\sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}+\cos 2x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos 2x-\sin 2x\right)$

$3\sin 2x+3\cos 2x=0$

$\sin 2x+\cos 2x=0$

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}\right)=0$

$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$2x+\frac{\pi}{4}=\pi k,\ k\in Z$

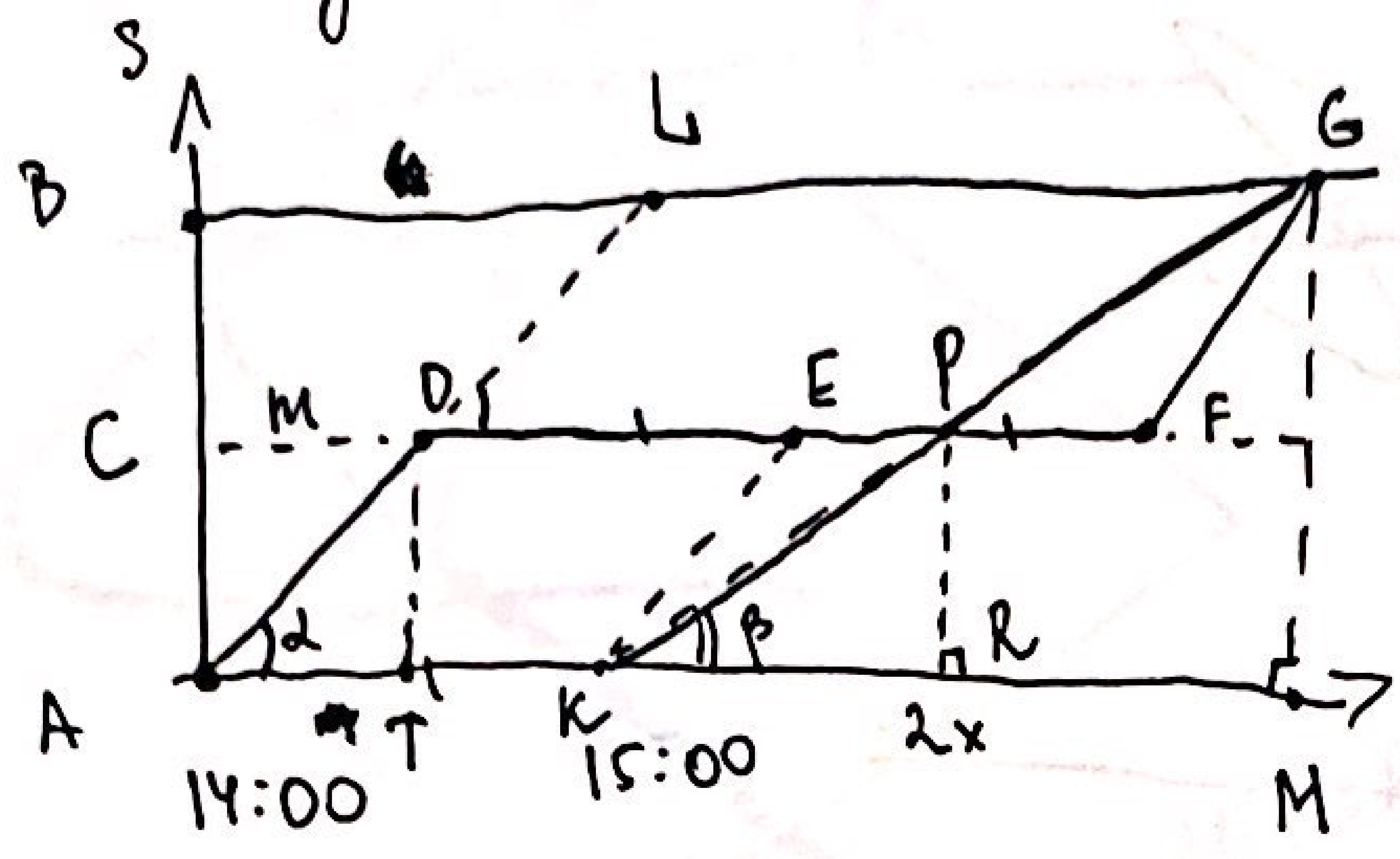
$x=\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{8}$

Ответ: $x=\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{8}$, $k\in Z$.

Чистовик

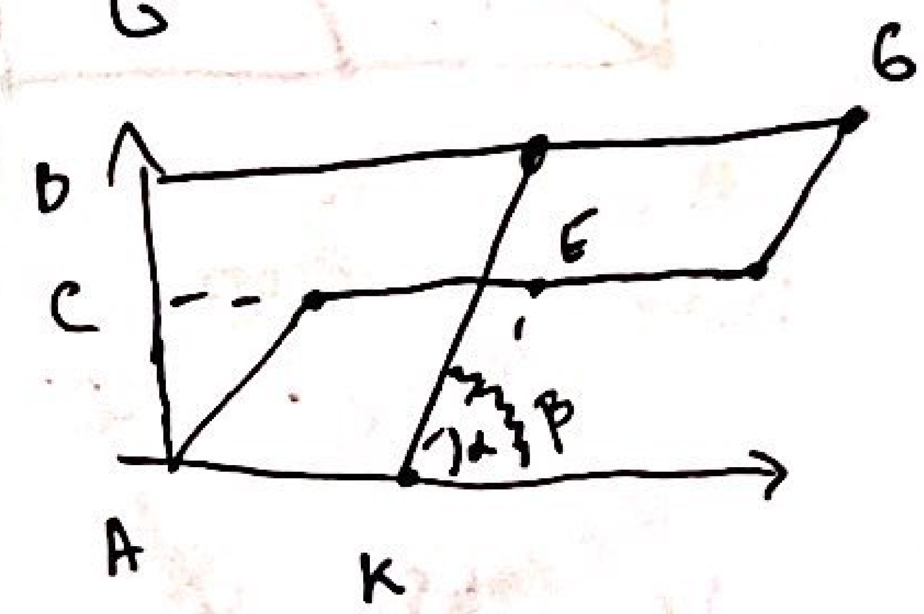
Задача 2. Решим графическим методом

Рассмотрим вариант, когда выехавший в 14:00 сделал остановку. В точке C произошла остановка.



$AK = DE = EF$

Заметим, что если бы у второго скорость была больше чем у первого, то его линия движения была наклонена под большим углом, чем α, но тогда они бы не встретились в G



⇒ в этом случае,

$V_2 = V, \; V_1 = 2V$

$$\frac{AB}{BL} = V_1 = 2V$$

$$\frac{AB}{KM} = V_2 = V \quad \Rightarrow 2BL = KM$$

$$\cancel{\frac{CD}{BL} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{KE}{GF}}$$

Пусть
$$\begin{cases} AT = m \\ KR = 2m \\ BL = km \end{cases}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{KR}{KM} = \frac{PR}{GM} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BL} = \frac{AT}{BL} = \frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow KM = 2km$$

$$AM = AK + KM = 1 + 2km = BG = BL + LG = km + 2$$

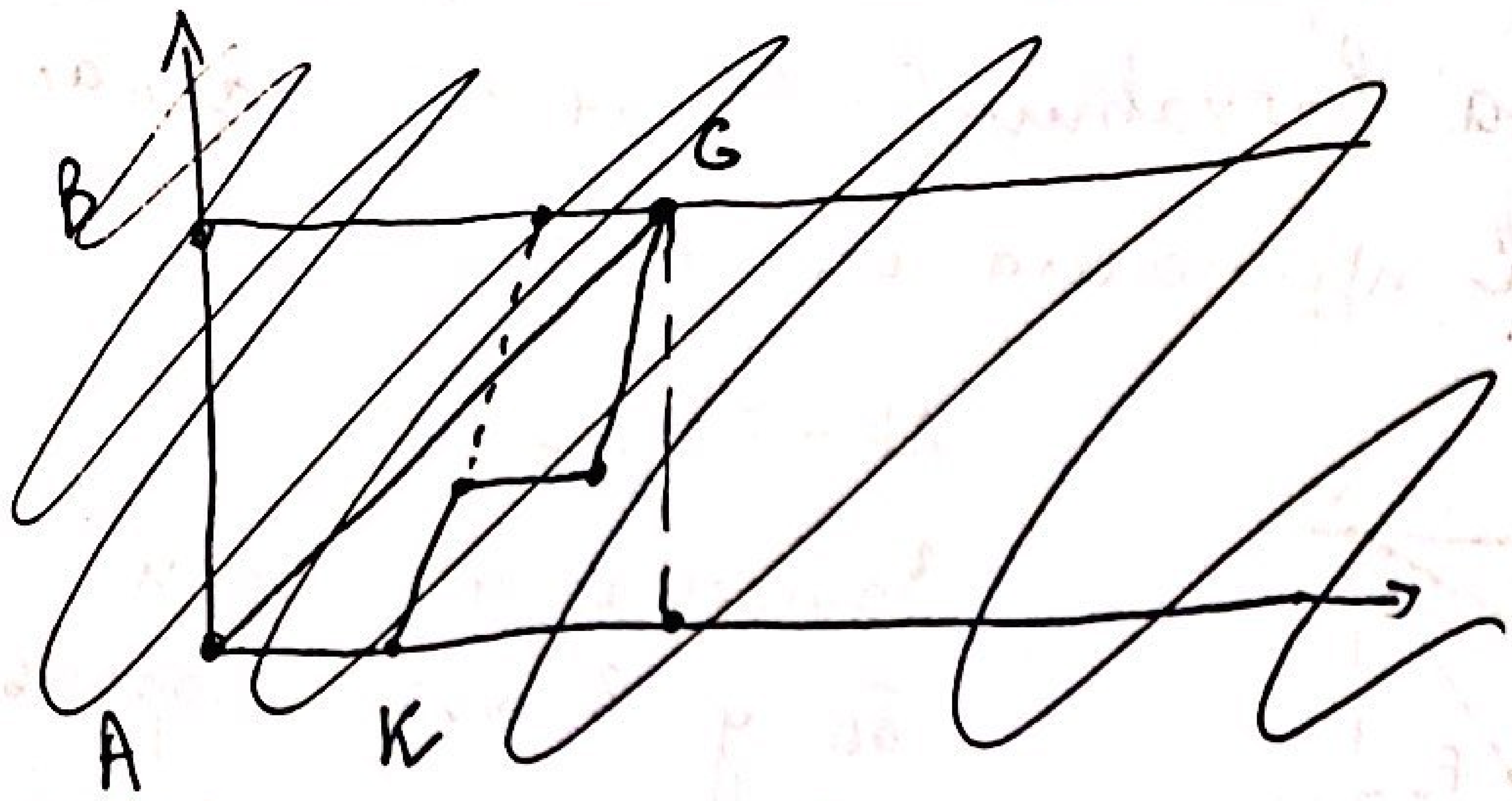
$$\Rightarrow km = 1$$

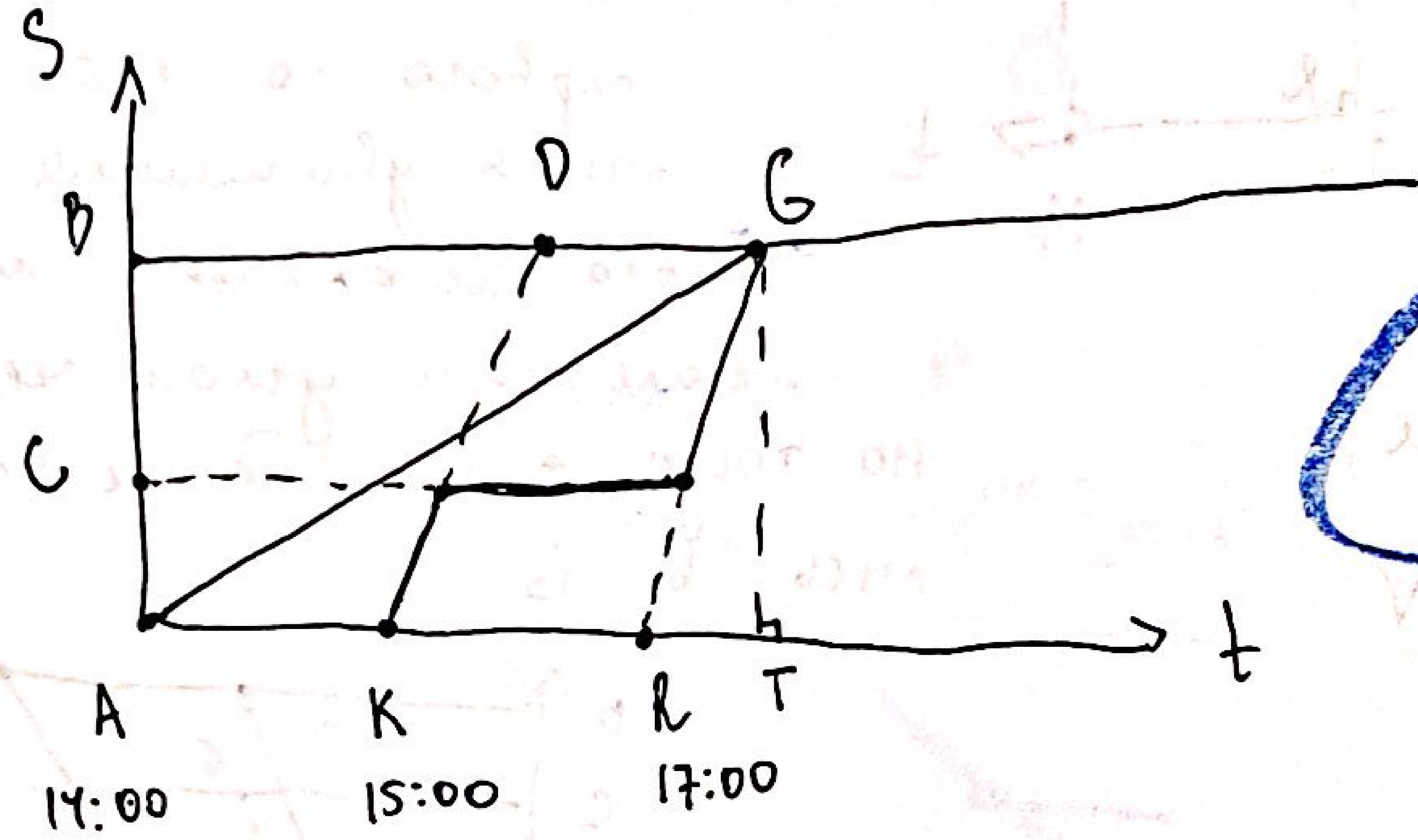
$\Rightarrow AM = 3$ В этом случае они прибыли в B в 17:00.

Чистовик

Задача 2.

Рассмотрим вариант, когда второй сделал остановку в C. Тогда скорость второго больше первого.





$V_1 = \frac{AB}{AT} = V$

$\Rightarrow 2RT = AT \Rightarrow AR = RT$

$V_2 = \frac{AB}{RT} = 2V$

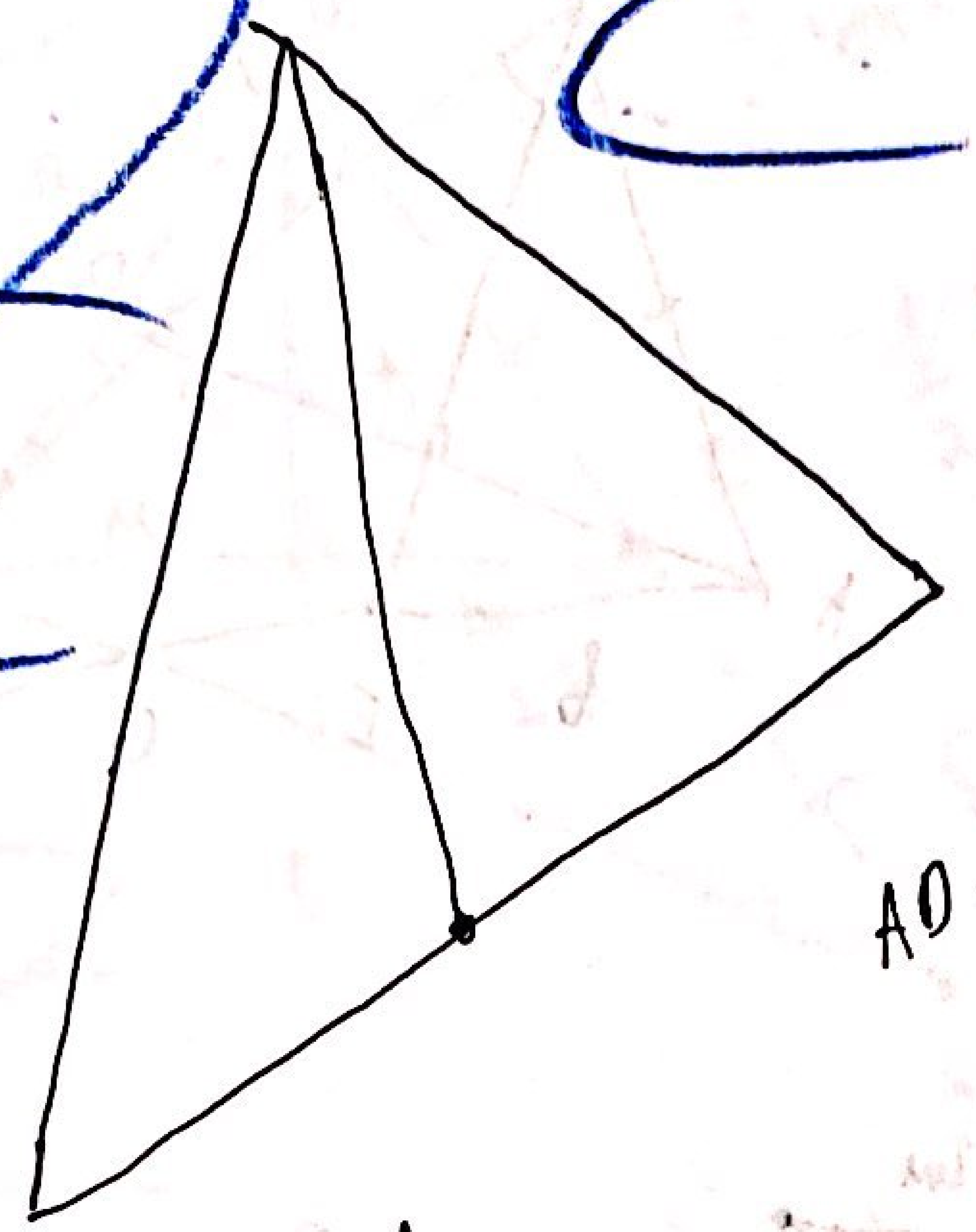
$AR = 3 \Rightarrow AT = 6.$

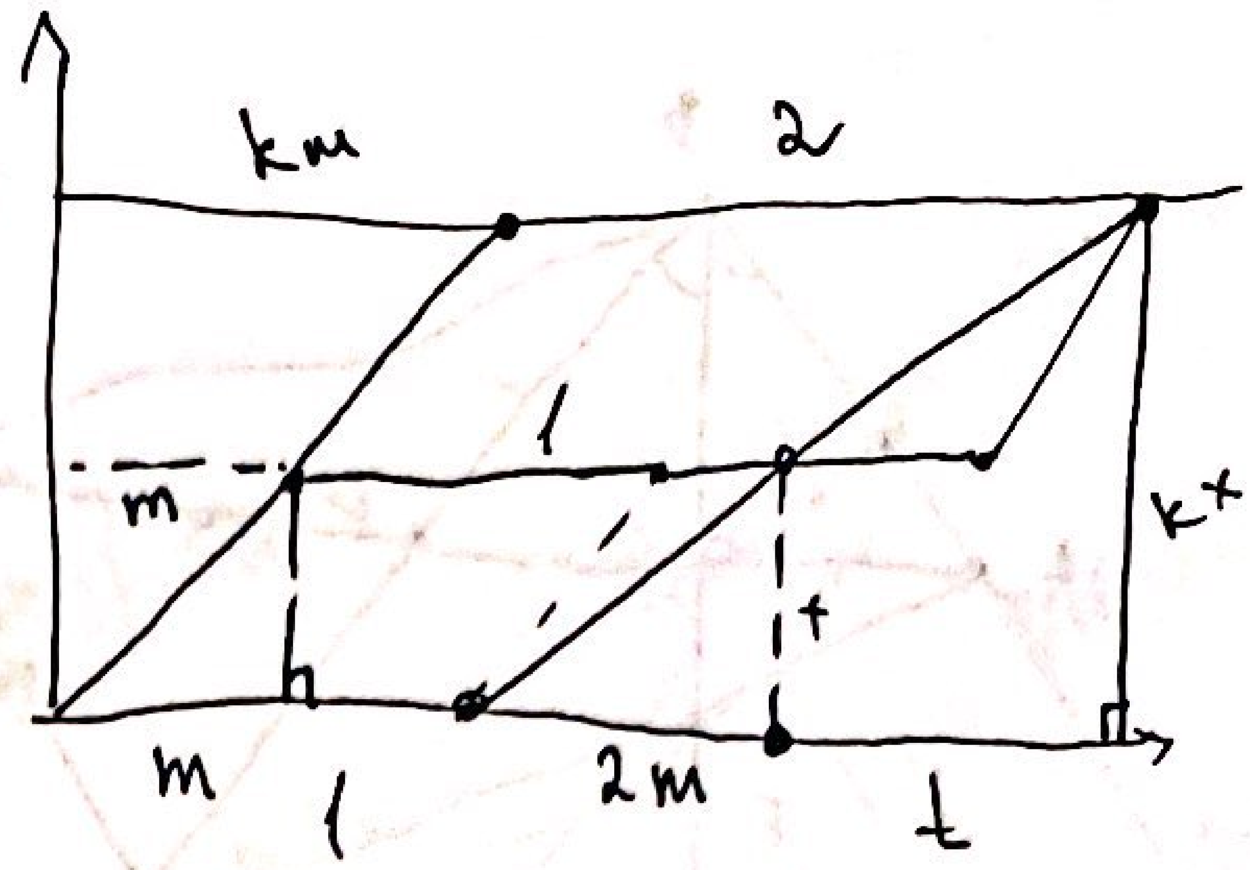
В этом случае они прибыли бы в 20:00.

Ответ: 17:00, 20:00.

Черновик

Задача 4.

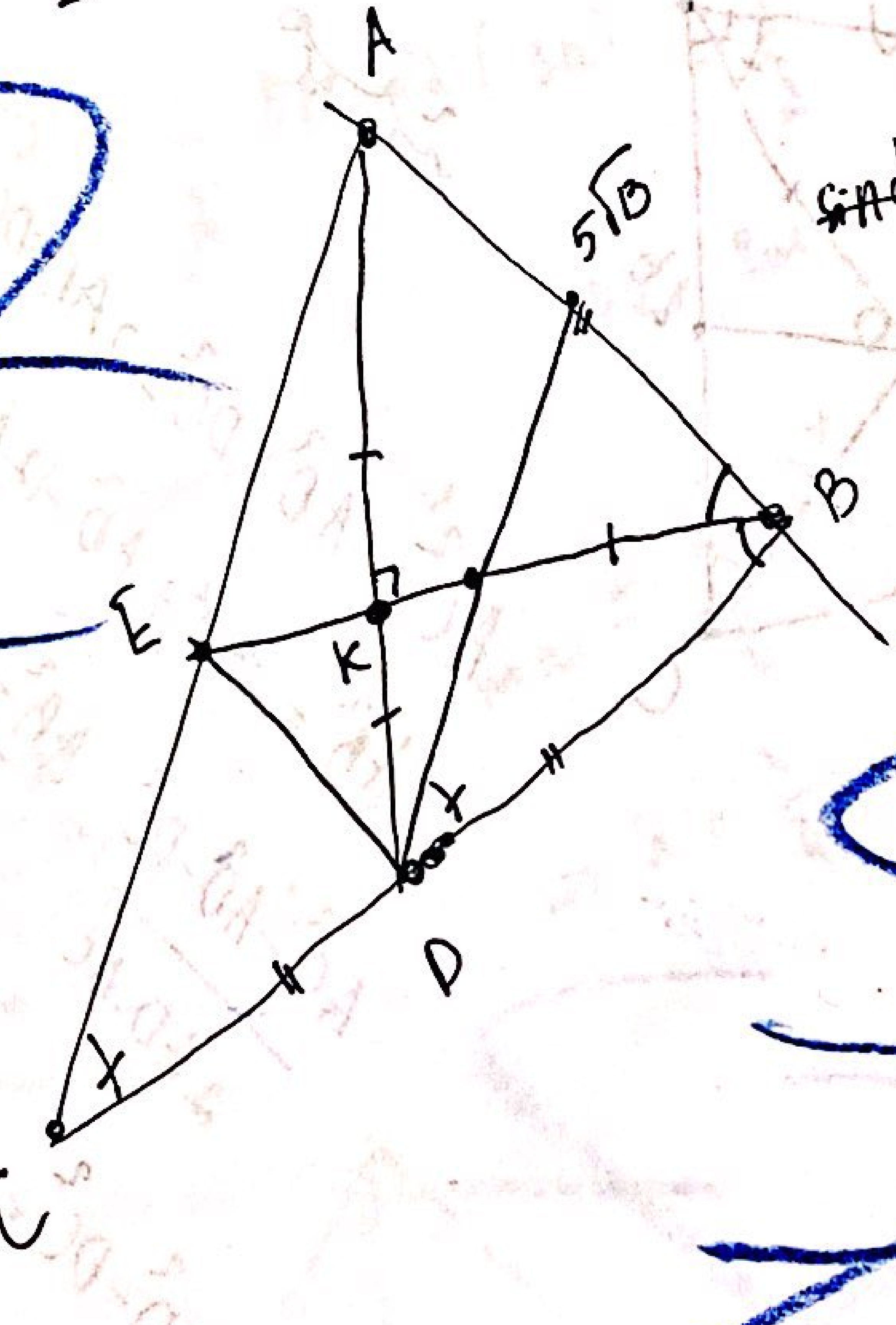




$AD = BE$

$\frac{2m}{2m+t} = \frac{1}{k}$

$2km = 2m + t$



$\cancel{\sin\alpha = BL}$

$\cos\alpha = BK$

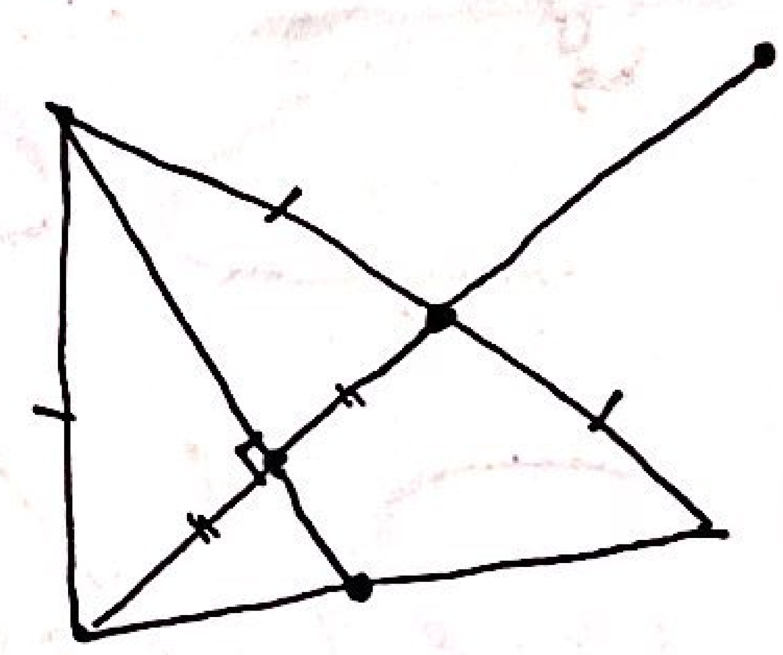
$\cancel{2 + 2m + t}$

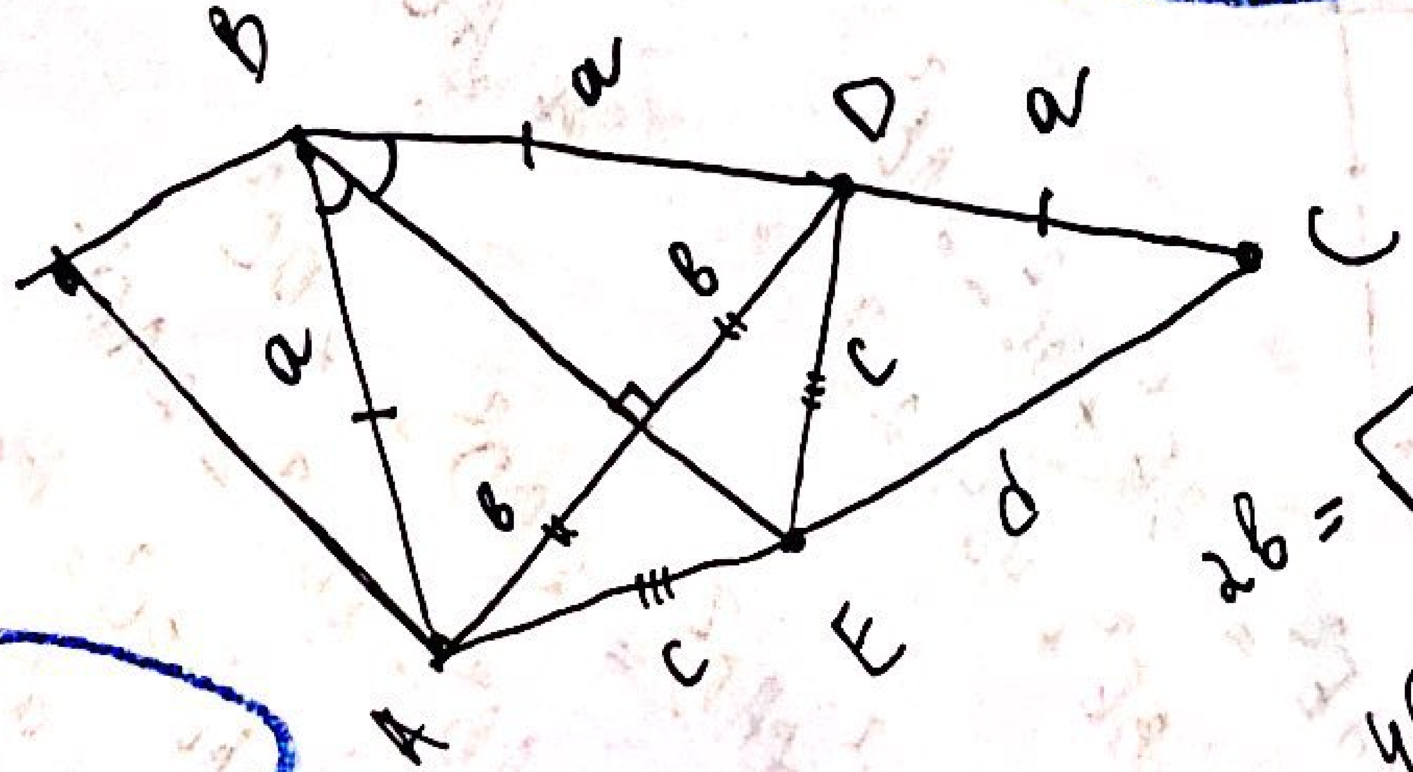
$\cancel{1} + 2km = km + 2$

$km = 0$

$km + 2 = 1 + 2mk$

$mk = 1$





$2b = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{c^2 - b^2}$

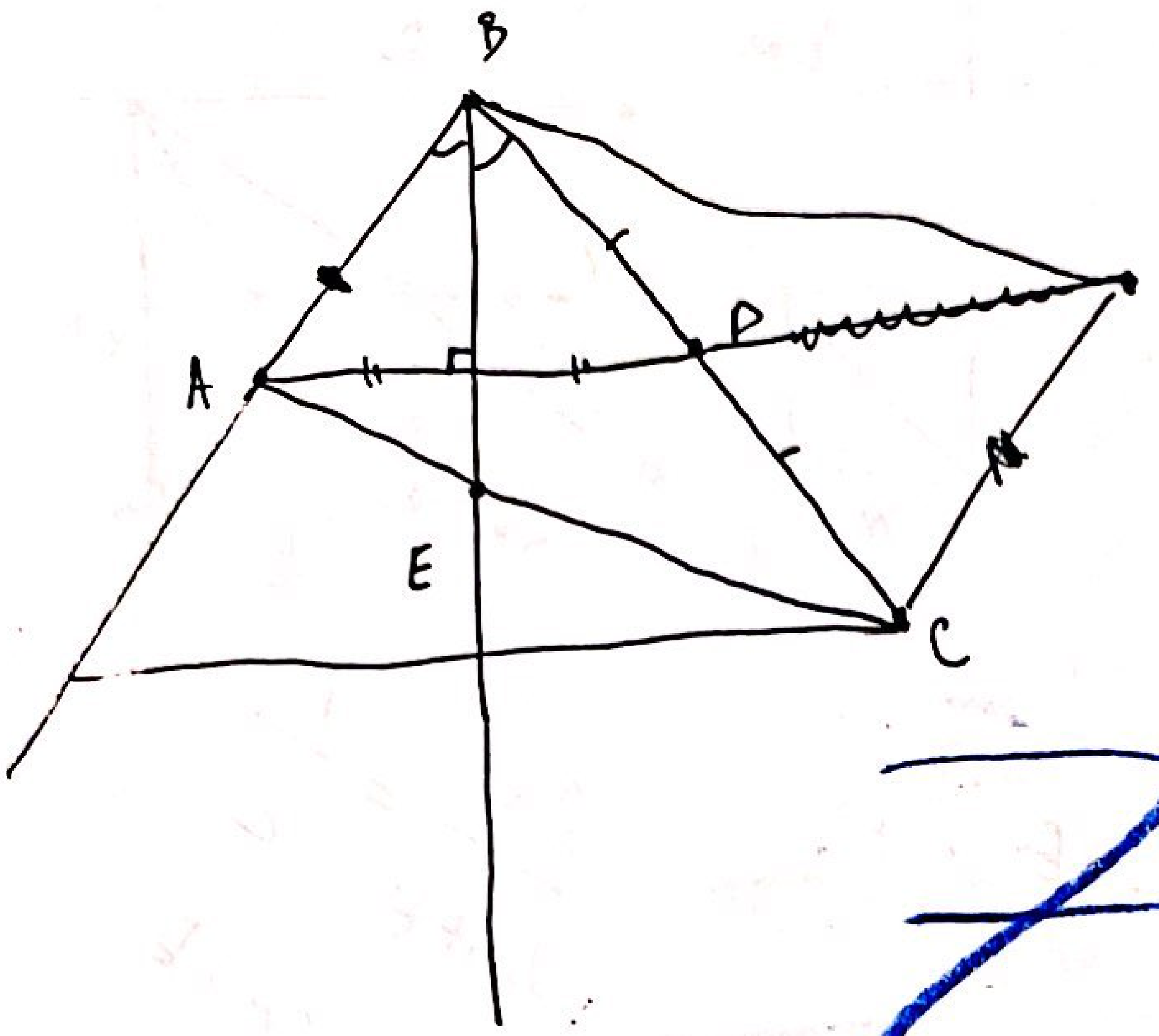
$4b^2 = a^2 - b^2 + c^2 - b^2 + 2\sqrt{}$

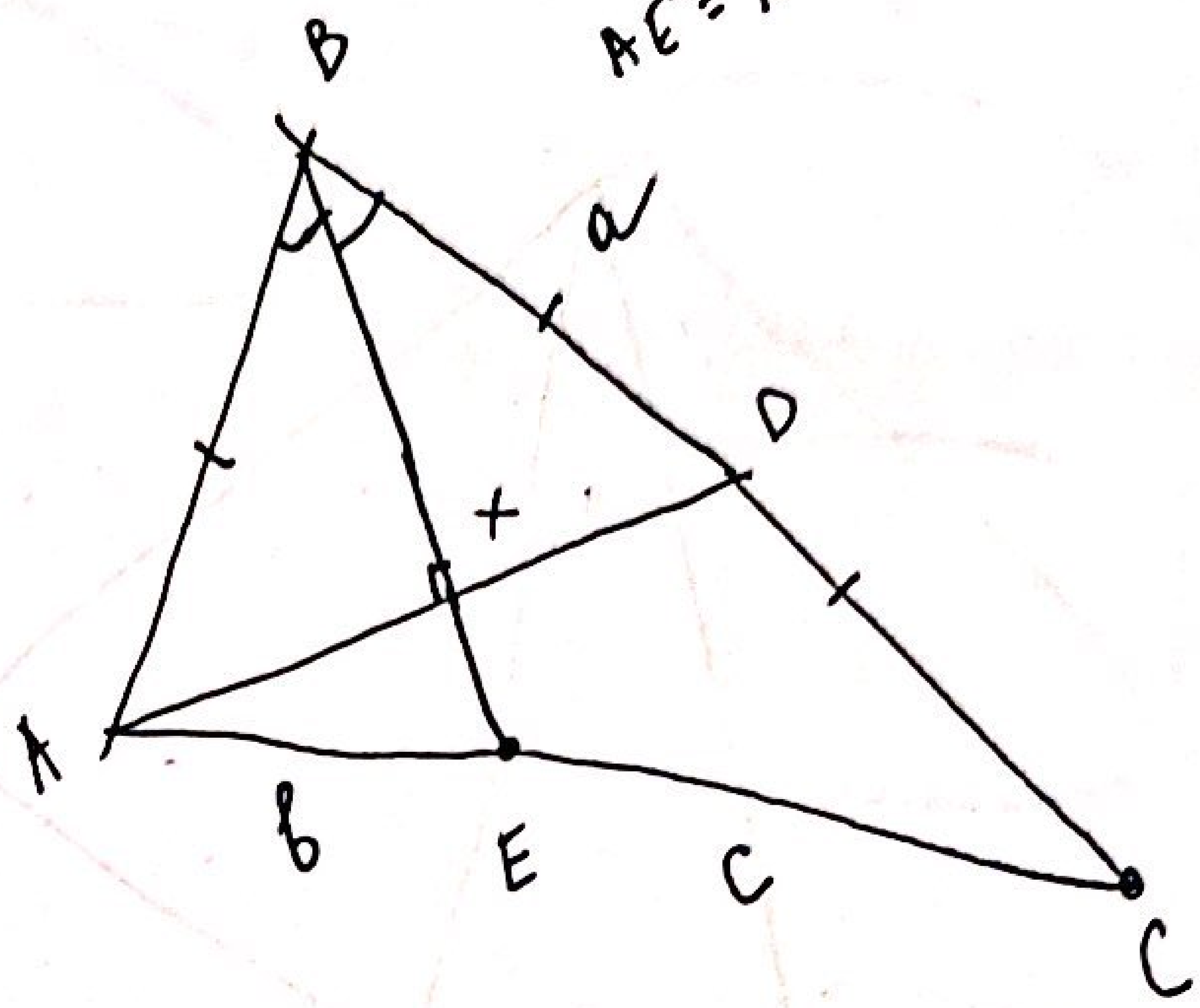
Черновик

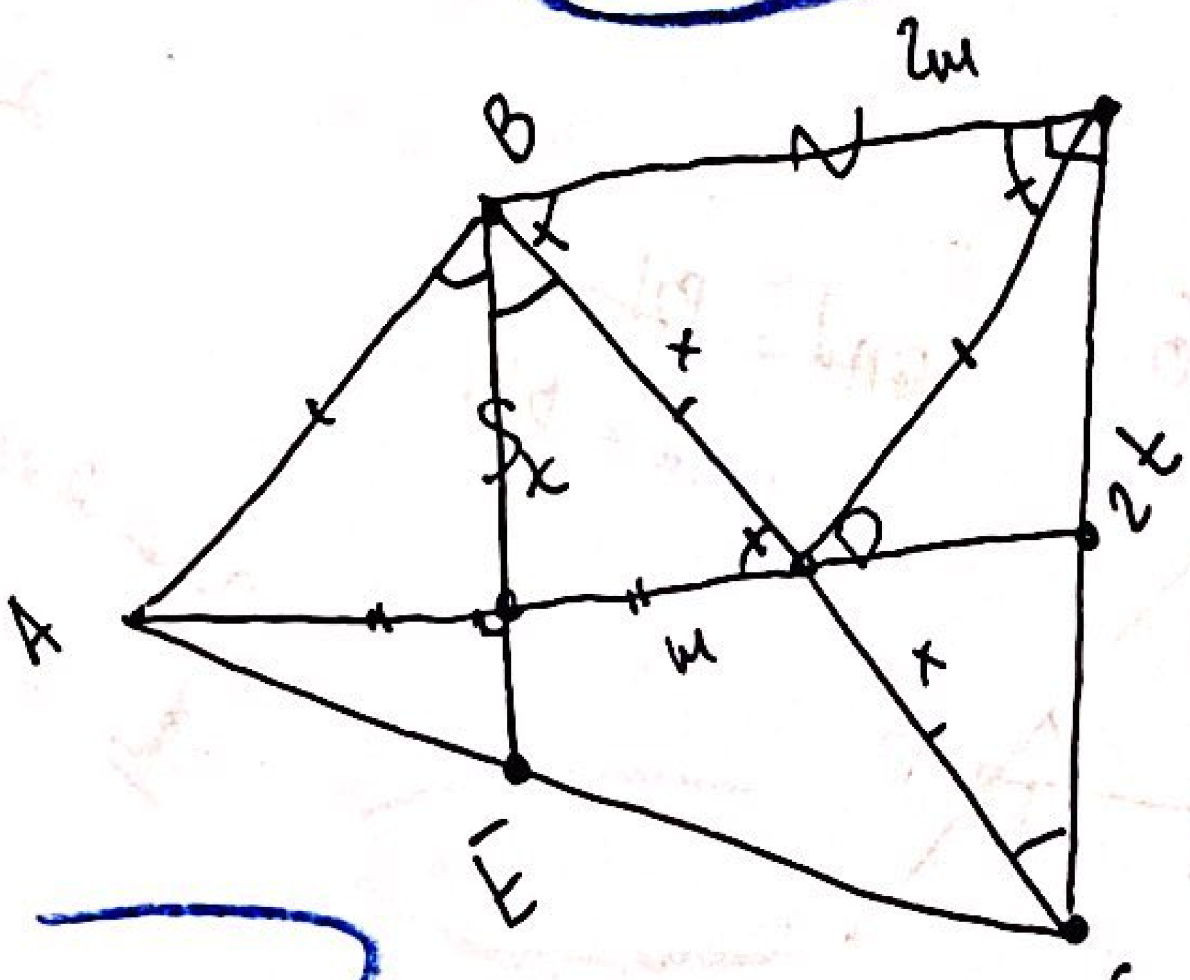
$BE = AD$

$EC^2 = BE^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE \cdot \cos$

$AE^2 = AD^2 + BE^2 - 2BE \cdot BC \cos$







$3a^2 + AB^2 - c^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2$

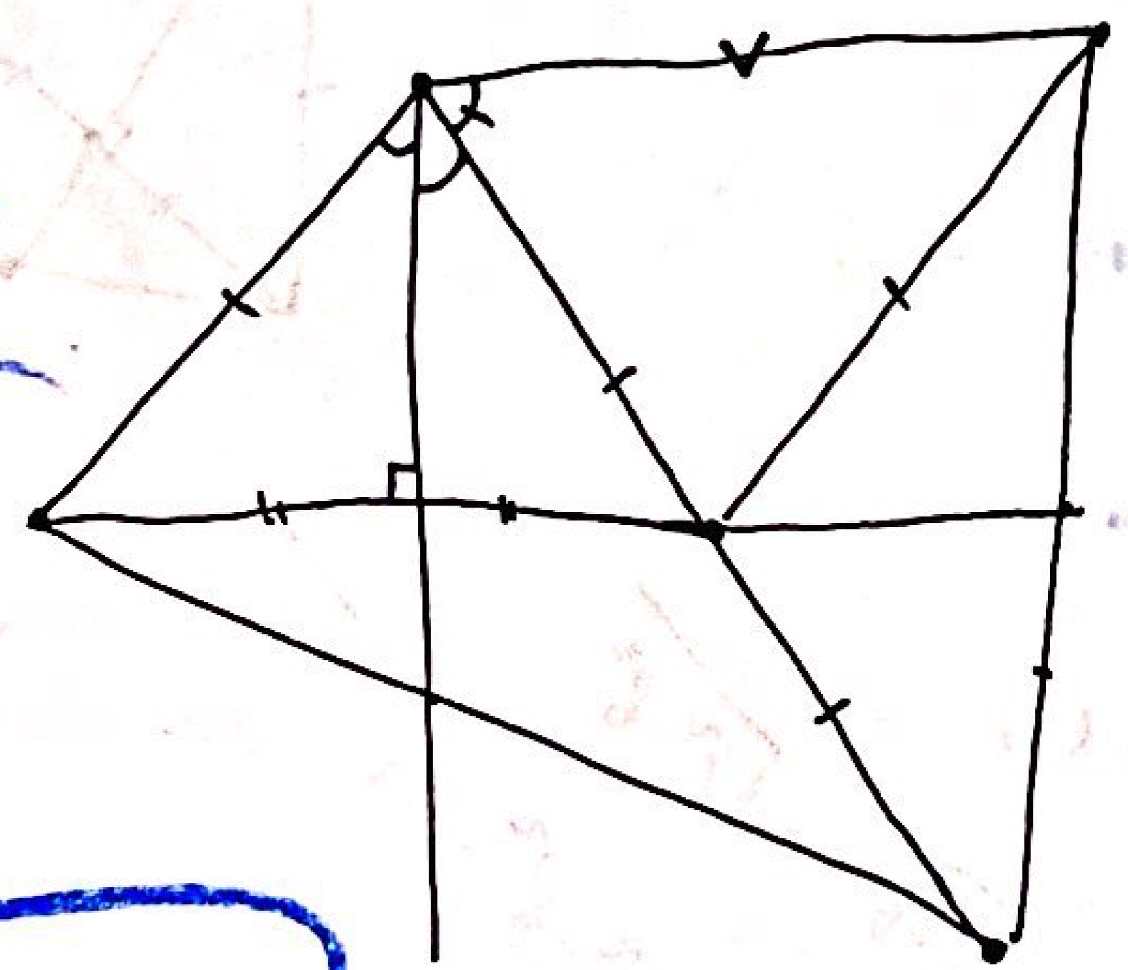
$7a^2$

$x^2 + AC^2$

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \sin\angle$

$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD$

$\frac{AC^2 - AD^2 - DC^2}{2AD \cdot DC} = \frac{AB^2 - \cancel{DC^2} - AD^2}{2AD \cdot \cancel{BD}}$



$AC^2 - AD^2 - DC^2 = AB^2 - DC^2 - AD^2$

$EC^2 - 2AE^2 = -BE^2 + BC^2 - 2AB^2 =$

$= -BE^2 + 4a^2 - 2a^2$

$AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + 2DC^2$

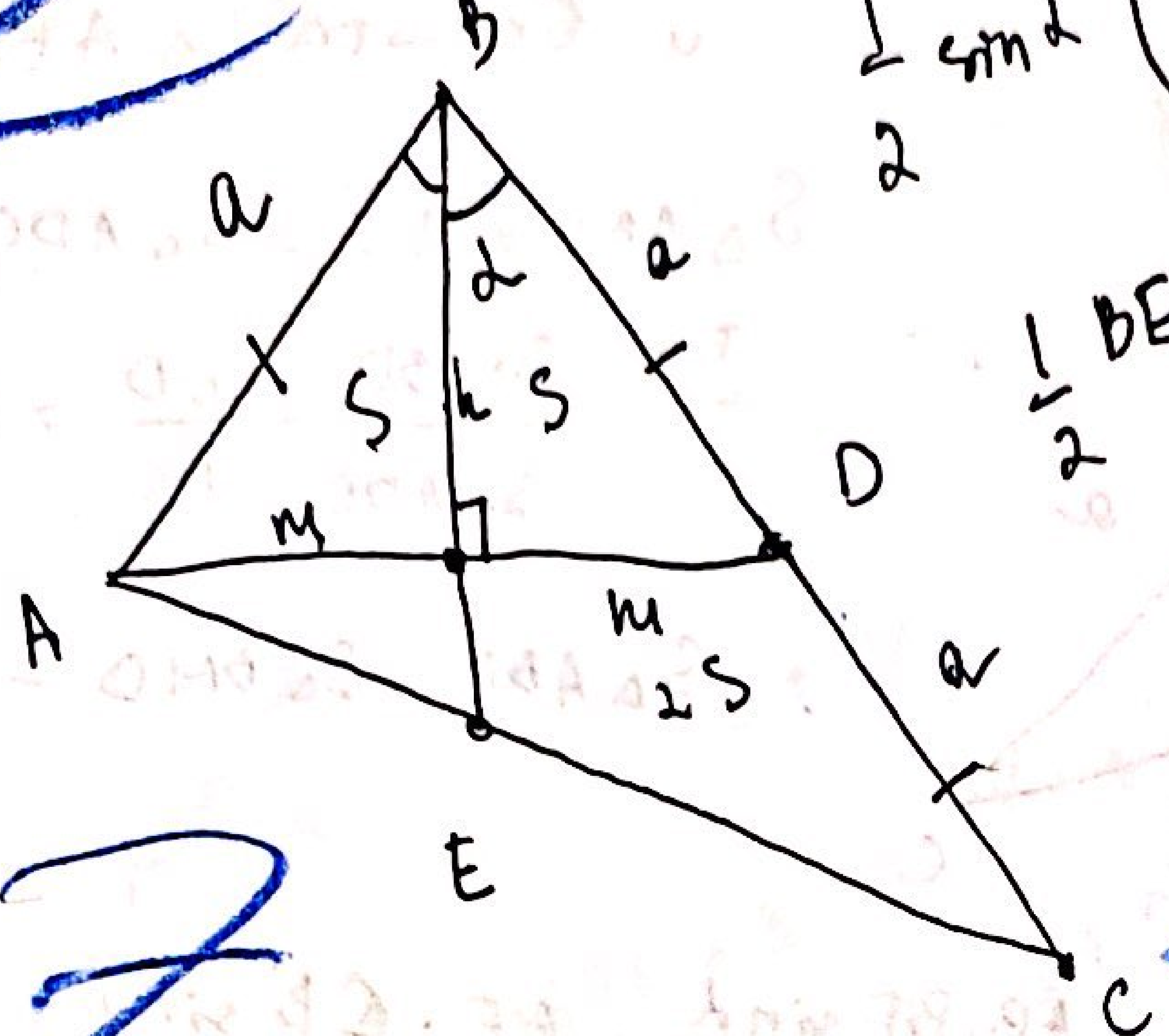
$AC^2 + AB^2 - 2DC^2 = 2AD^2$

$4a^2 - 2a^2 + 2AE^2 - EC^2 =$

$AC^2 + \frac{a^2 - 2a^2}{2}$

Черновик

$a = 5\sqrt{13}$



$\frac{1}{2} \sin\alpha \, (BE$

$\frac{1}{2} BE \sin\alpha \, (3a)$

$p_3 p_4 \ldots p_{1876} p_{1877}$

$p_{1876} p_{1877}$

$p_3 p_4$

$p_{1876} p_{1877}$

$p_3 p_4$

$S = \frac{1}{2} BE \sin\alpha \, (3a) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{a} (3a) = 3m^2$

$BE = 2m$

$N = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$

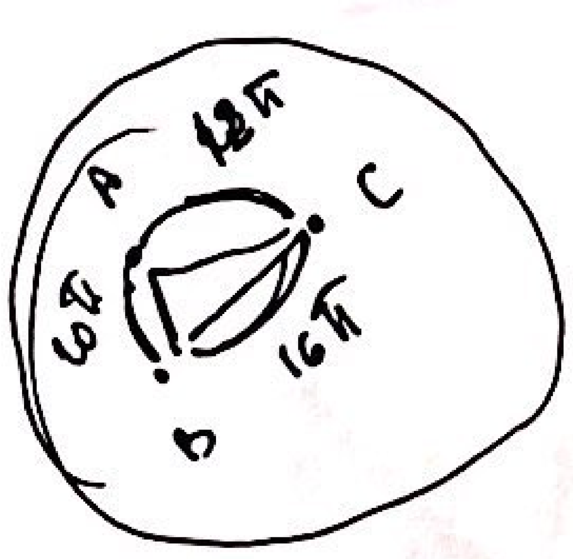
$(\alpha_1+1) \ldots (\alpha_k+1)$

$(3\alpha_1+1) \ldots (3\alpha_k+1)$

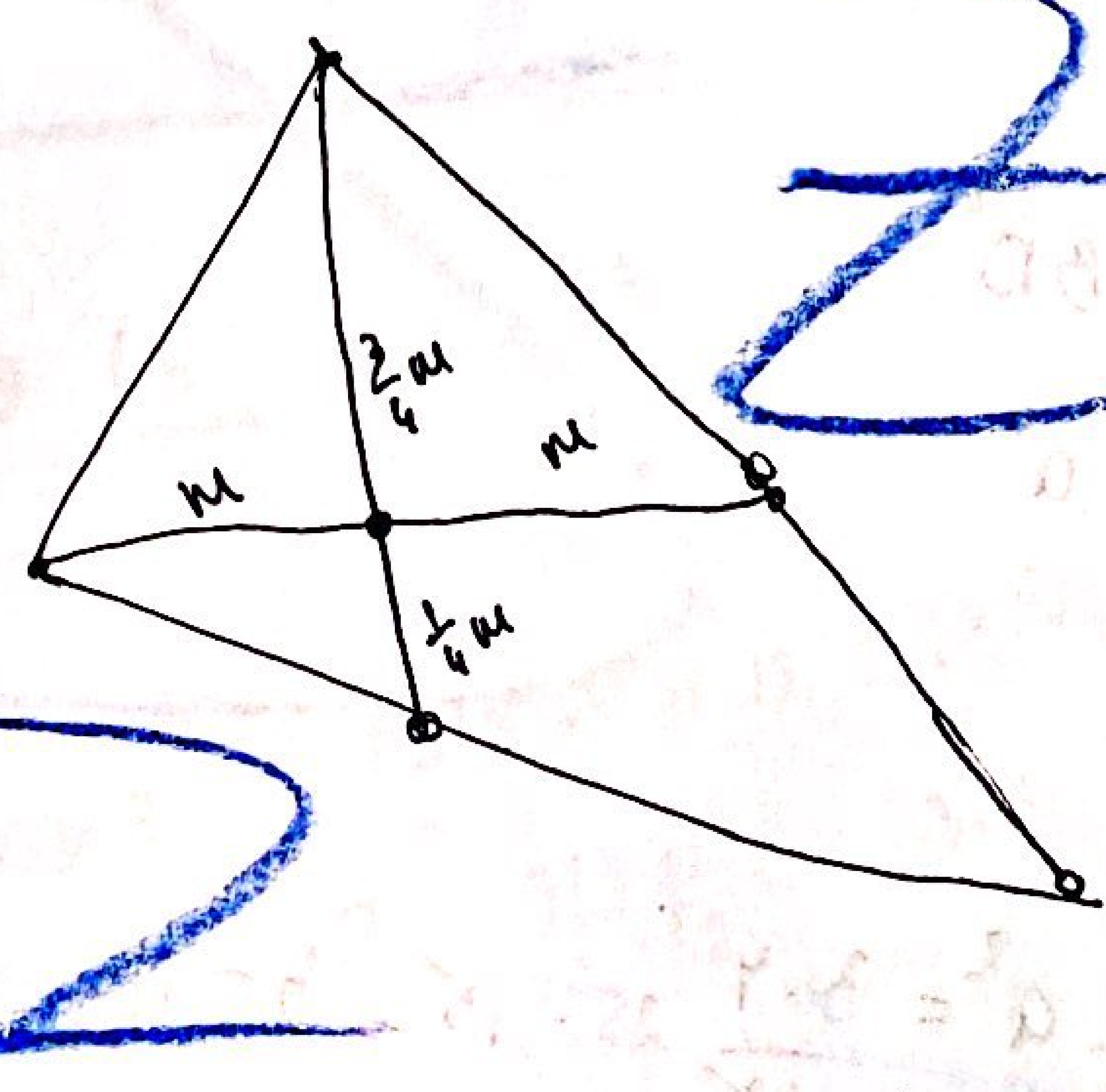
$\sin\alpha = \frac{m}{a}$

$mh = \frac{3}{4} m^2$

$\Rightarrow h = \frac{3}{4} m$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 25 \\ \times 12 \\ \hline 50 \\ 25 \\ \hline 300 \end{array}$$



$p_3 p_{1876} = N$

$p_4 p_{1876} = N$

$p_{1876} p_{1877} p_{1888} p_{1889}$

p_{1876}

$p \, p_i \, p_j$

$p_1 p_2 \; p_3 p_4$

$p_1 p_2 \; p_3 p_4$

Чистовик

Задача 4.

$AB = a = 5\sqrt{13}$

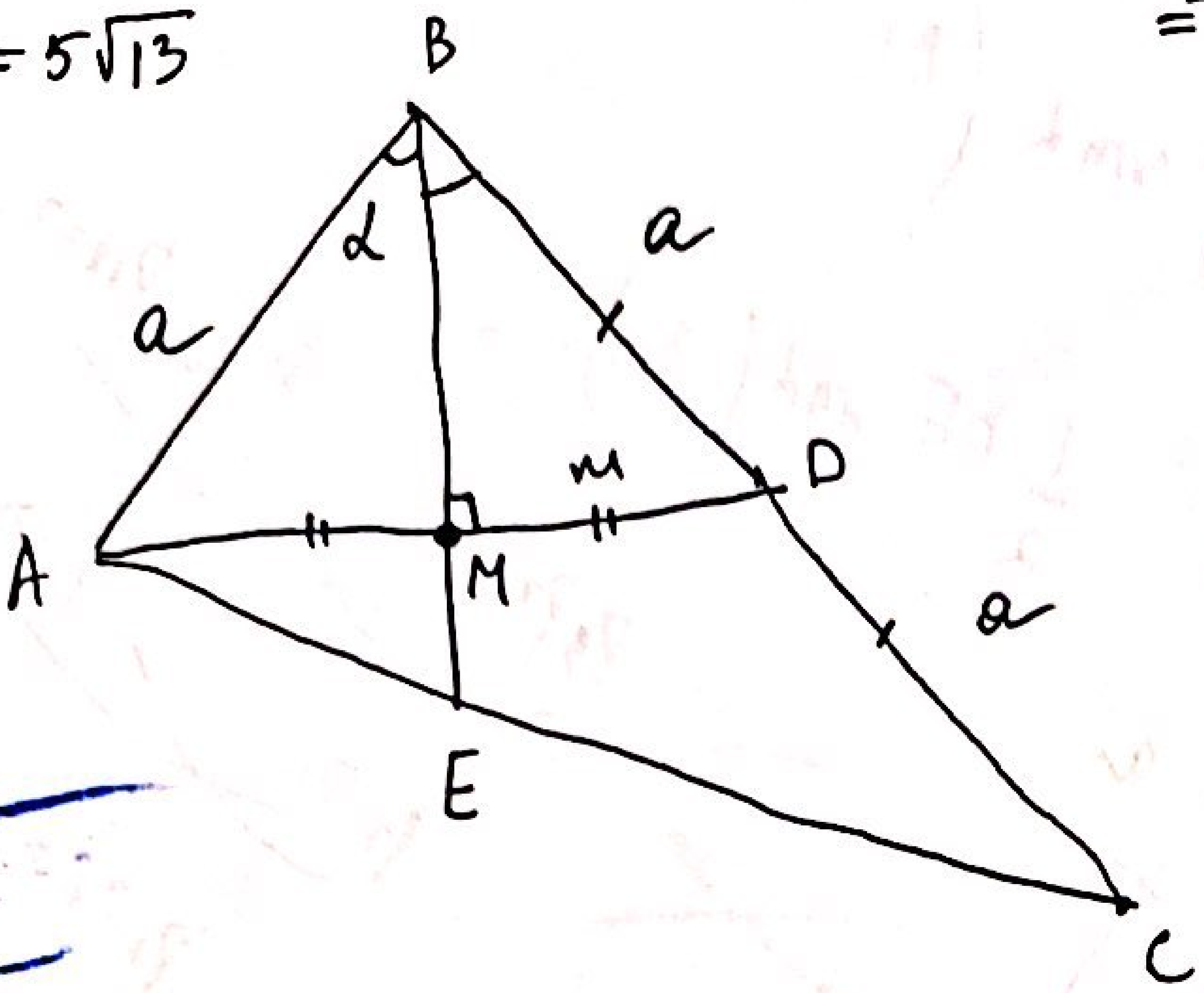
Пусть $BD = DC = a$, $AD = 2m$
$BM = h$

$\Rightarrow AB = a$, т.к. BE – бисс и высота $\triangle ABD$

$S_{\triangle ABD} = 2S = S_{\triangle ADC}$,

т.к. $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \dfrac{BD}{DC} = 1.$

$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMD} = S.$



$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle EBC} = \dfrac{AB \cdot BE \sin\alpha}{2} + \dfrac{BE \cdot CB \sin\alpha}{2} =$

$\sin\alpha = \dfrac{m}{a}$ $\qquad = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{a}(3a)\,2m = 3m^2 = 4S$

$BE = AD = 2m$

$\Rightarrow S_{\triangle BMD} = \dfrac{h \cdot m}{2} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4} 3m^2$

$4h\cancel{m} = 6m^{\cancel{2}}$

$h = \dfrac{3}{2} m$

Из $\triangle BMD$: $BM^2 + MD^2 = BD^2$

$\dfrac{9}{4}m^2 + \dfrac{4}{4}m^2 = a^2$

$m^2 = \dfrac{4}{13}a^2$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3m^2 = 3 \cdot \dfrac{4}{13}a^2 = \dfrac{3 \cdot 4}{\cancel{13}} 25 \cdot \cancel{13} = 25 \cdot 12 = 300$

Ответ: 300

Черновик

$N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_1+1) \ldots (\alpha_n+1) \geq 1878$

$N^3 = q_1^{3\alpha_1} \ldots q_n^{3\alpha_n}$

$p_3 p_4$ p_{1876} p_{1877} p_{1888} p_{1889}

p_1 p_n

$3 + N$

$1876 + 3 \geq N + 1$

$d \leq 1878$

939 | 3, 313

1878 | 2, 939

1 2 3 4

1876 1877 1878 1879 ~~1880~~

~~1881~~ ~~1882~~

$2 \cdot 3 \cdot 313$

1 2 3 4 ✓ 1874 1875 1876 1877

1 2 3 4 ✓ 1875 1876 1877 1878

$p_1 p_2 p_3 p_4$ p_{2000}

1 2 3 4 1876 1877 1878 1879

17, 17, 289 2000 133 1900 23

1879 | 3, 62

1879

1880 − 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

1877

313 | 7, 4

313 | 13, 2

313

1877 | 7, 26

28

Чистовик

Задача 6.

Заметим, что кол-во делителей у N хотя бы 1877.

С другой стороны чтобы выполнялось, что $p_3 p_4 p_{1876} p_{1877} \geq N^2$

должно быть $3+1876 \geq d$, где d - кол-во делителей у N

$\Rightarrow d \leq 1879$ Т.к. $p_i \cdot p_{d-i+1} = N$, где $i \in \{1, \dots \sqrt{d}\}$

≥ 1877.

$\Rightarrow$ 1 вар: $d = 1877$

$N = q_1^{\alpha_1} \dots q_n^{\alpha_n}$

$\Rightarrow d = (\alpha_1+1) \dots (\alpha_n+1) = 1877$

$N^3 = q_1^{3\alpha_1} \dots q_N^{3\alpha_n} \Rightarrow \gamma = (3\alpha_1+1) \dots (3\alpha_n+1)$

2 вар: $d = 1878 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 313^1$, 313 - простое число

$N = q_1^{\alpha_1} \dots q_N^{\alpha_N}$

$d = (\alpha_1+1) \dots (\alpha_n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 313$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1 \; \alpha_2 = 2 \; \alpha_3 = 312$

$\cancel{\gamma = 4^3 = \boxed{64.}}$

$\gamma = 4 \cdot 7 \cdot 937$

3 вар: $d = 1879$

$\alpha_1 \cdot$