0 849377 100001

84-93-77-10
(141.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Скаркова Константина Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
84-93-77-10	84	21	0	21	21	0	21	X	X

84 (восемьдесят четыре)

1	2	3	4	5	6	
✓		✓	✓		✓	

лист 1 из 5

Чистовик

(мешки = пакеты)

№1

Конструкцию из ~~мешков~~ пакет, где 101 пакет пустой (любую) можно получить, добавляя по 5 мешков в пустые пакеты и начиная с 1ого пустого пакета (если ~~можно~~ это действие не противоречит этому.)

Изначально 1 пустой мешок

За 1 действие +5 пустых мешков, +1 полный мешок, −1 пустой. Всего: +4 пуст., +1 полн.

Если стало 101 пустых, значит это действие прим. (101 − 1)/4 = 25 раз, а значит прибавилось и изн. 1·25 = 25 полных мешков. 0+25 = 25 - всего п. м.

Всего 101+25 = 126 пакетов

Ответ: всего 126 пакетов.

Чистовик 2 из 5

№3

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

Если p и $q \not\vdots\, 2$, то они нечётные, и

$н^н - н^н + 3 = 2^ч$ – чётность не совпадает.

Значит либо p, либо $q \,\vdots\, 2$, а значит равны 2 т.к. и p, и q – простые.

① Если $p = 2$

$2^q - q^2 + 3 = 2^{2-1} = 2 \Leftrightarrow 2^q - q^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2^q = q^2 - 1 \Leftrightarrow 2^q = (q-1)(q+1)$. Разница между двумя степенями двоек $(q-1, q+1)$ равна $2 \Rightarrow$ эти степени 2 – 2 и 4 $\Rightarrow q = 3$

при $q = 3$ равенство верно.

$q = 3$ $p = 2$ подходит

② Если $q = 2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1} \Leftrightarrow p^2 + 3 = 2^{p-1}(2+1) \Leftrightarrow$

$\underset{\vdots 3}{p^2 + 3} = 2^{p-1} \cdot \underset{\vdots 3}{3}$ ~~Два слаг.~~: сумма и слаг. $\vdots\, 3 \Rightarrow$ ост. слаг $\vdots\, 3 \Rightarrow p^2 \vdots\, 3 \Rightarrow p = 3$

$3^2 + 3 = 2^2 \cdot 3$ – ист., значит $p = 3$ подходит.

Ответ: 1 пара – $p = 2$, $q = 3$

2 пара – $q = 2$, $p = 3$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

84-93-77-10
(141.4)

Чистовик 3 из 5

№4

Если в городе остались циклы (замкнутые пути), то можно убрать 1 участок дороги, и цикла не будет, но все ещё от любой его точки можно будет дойти до любой другой.

В итоге циклов не будет → получится граф-дерево. Всего $23 \cdot 10 = 230$ вершин, а рёбер в дереве на 1 меньше, чем вершин, значит рёбер $230 - 1 = 229$ (Это так, так как есть вершины с 1 ребром (только одним), иначе можно не вечно переходить из одной вершины в другую по рёбрам → это не дерево.) Тогда удалим такую вершину и её ребро → граф ост. деревом, повторим. и т.д. В итоге получится просто ~~только~~ 1 а вершина. Всего уд. од. к. в. и р. ⇒ вершины на 1 у больше)

Всего $23 \cdot 9 + 10 \cdot 22 = 427$ рёбер, станет 229 ⇒ убрали

$$\begin{array}{r} -\,427 \\ 229 \\ \hline 198 \end{array}$$

$= 198$ ~~вершин~~ участков

Пример:

удаляем все гор. участки дорог, кроме улицы №23. Пол. связный граф, убрали ~~10~~ $9 \cdot 22 = 198$ уч.

Ответ: можно ремонтировать 198 участков одновременно

№6 Чистовик 4 из 5

Покори Воробьевы горы

о×5
п
к
р×3
и
в×2
б
ь
е
в
ы×2
г

Всего 7 букв по 1, 2 по 2, 1 по 3 и 1 по 5

7 , ×2, ×2, ×3, ×5

1) Если осталось ×2, ×2, чёт. , и это

1 случай — год. б., год. б., чёт. разн. б. — все разн.

передаётся игроку, то этот игрок проиграл. Он обязан чёт превр. в нечёт (иначе второй игрок уберёт из ×2 1 или 2 буквы так, чтобы чётность подходила под него (его победу)). Со вторым то-же, он делает из неч. ч. В итоге получается ×2, ×2, 0 ⇒ и ход 1ого игрока → тот победил.

Если осталось ×2, ×2, неч, то этот игрок — победил, т.к. он убирает 1 из неч, у другого игрока случай №1 ⇒ он проиграл.

Алиса победит, играем за неё. 1ым ходом она убирает 3 буквы из ×5 ⇒

Черновик. 5 из 5 8

№6

⇒ получ. ×7, ×2, ×2, ×3, ×2

3) Если кто-то уберёт 1у из куч с > 1 од. эл. (сделает так, чтобы в этой куче стал 1 или 0 элемент), то он — проиграл, второй игрок убирает кучу из 3 (или кучу из 2, если кучи из 3 уже нет) так, чтобы беспарных элементов осталось чёт (либо убирает полн., либо ост. 1).

Тогда по 1ому случаю другой проиграл.

Если Боря убирает 1 из ×3, то теперь они по-очереди убирают по 1 букве из беспарных, ~~зака~~ они зак., наст. ход Бори → он убирает кучу → по сл. 3. проигрывает

Если Боря берет из ×7, Алиса убирает из ×3 1 букву, они по очереди убирают буквы из ×7 → посл. ход — Алисы ⇒ Боря обязан убрать кучу → он проиграл по сл. 3.

Во всех сл. Боря проиграл.

Ответ: есть, у Алисы.

Черновик 1 из 5

$\frac{14}{18}$

$b_5 = \cancel{(b_2^3 \cdot b_1}\ \frac{b_4^3 \cdot b_2}{b_3^3}$

$\frac{n+3}{n-1}$ $\quad$ $n+3$

$\frac{2n-1}{3 \cdot n}$

$b_6 = \frac{b_5^3 \cdot b_3}{b_4^3}$ $\quad$ 6

$\frac{37}{60}$

$b_8 = \frac{b_7^3 \cdot b_5}{b_6^3}$ $\quad$ $(\quad)^3 \cdot$

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{7}{12}$ $\quad$ $\frac{1}{12}$

$\cancel{n-4}$

$\frac{\cancel{(n+6)}\ (n+3)}{n\,(n+7)}$ $\quad$ $\frac{\cancel{(n+2)}}{n \cdot (n+1) \cdot 2}$

$\frac{n+3}{(n+8)}$ $\quad$ 1 $\quad$ $\frac{4}{9}$ $\quad$ 2

$\frac{(n+3)}{(n-1)}$ $\quad$ 2

$\frac{7}{12} + \frac{1}{30}$ $\quad$ 35 $\quad$ $\frac{37}{60}$

Черновик. Гиз 5

601 =

№2

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{339}-\frac{1}{400}$

594

601

10

23

$$\begin{array}{r|l} 601 & 7 \\ \underline{56} & \\ 41 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 601 & 11 \\ \underline{594} & \\ 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 601 & 17 \\ \underline{51} & \\ 91 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 601 & 13 \\ \underline{52} & \\ 81 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 601 & 19 \\ \underline{57} & \\ 31 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 601 & 23 \\ \cancel{37} & \\ \underline{46} & \\ 141 & \end{array}$$

17

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}\ldots\frac{1}{399\cdot400}$

$\overline{1\cdot2\ldots400}$ $3\cdot4\ldots400$ $1\cdot2\cdot56\ldots400$

×2

×2

7 ×2 ×2 ×3 ×5

×3	×2	неч	– пор.
×3	×2	чёт	– поб.
×2	×2	чёт	– пор.

×2 …	поб.
×3 …	поб

×2	×2	неч	– поб

Черновик 3 из 5

Покорители Воробьёвы горы Алиса

п
о ×5
к
р ×3
и
в
б
ь
ё
в
ы ×2
г

$$b_n = \frac{b_{n-3}\cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$$

$$b_4 = \frac{b_3^3\cdot b_1}{b_2^3} = \cancel{16}\ 2^4$$

$$b_5 = \left(\frac{b_3^3\cdot b_1}{b_2^3}\right)^3 \frac{b_2}{b_{\cancel{n-2}\,3}^3}$$

$$b_6 = \left(\frac{b_3^6\cdot b_1^3}{b_2^8}\right)^3 \cdot \frac{b_3}{b_4^3} =$$

ы ×2 р ×3 о ×5 ×3 .... ← победа

×3 | ×2 | .... ~~победа~~

~~нечёт~~ ~~нечёт~~

чёт

п к и в б ь ё в г д

8 9 A ×2 B ×3 C ×5 Алиса!

9 A ×2 B ×3 C ×5

.... ×2 ← победа

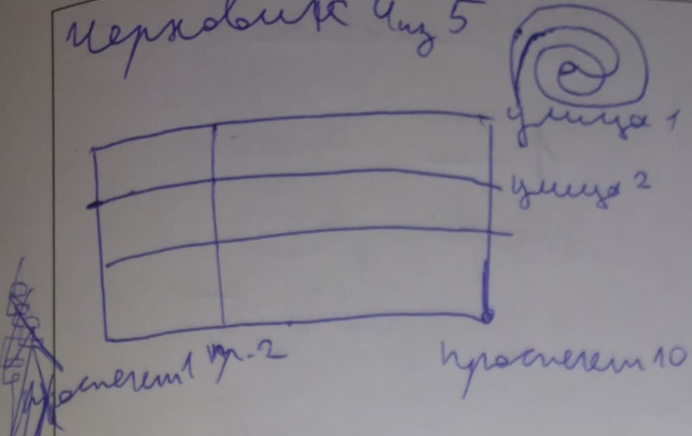
×2 ×2 | чёт

поражение ←

.... ×2 ×2

победа → ×2 ×2 | нечёт

Черновик 4 из 5



$9\cdot 23 + 22\cdot 10$

У дерева тут.

$10\cdot 23$ вершины

230 в. $\Rightarrow 229$ рёбер

$220 + 9\cdot 23$

$207 = 427$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 9 \\ \hline 207 \end{array} \qquad 427$$

$427 - 229 =$

$$\begin{array}{r} 427 \\ -\ 229 \\ \hline 198 \end{array}$$

198 удалят $\qquad 9\cdot 22 = 198$

№5

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3}\cdot b_{n-1}^3$

$$b_n = \frac{b_{n-3}\cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$$

4

1

~~4 4~~ $\qquad$ 2 1 2 16

$5 \qquad \dfrac{b_2\cdot b_4^3}{b_3^3} \qquad \dfrac{1\cdot 16^3}{2^3} \qquad \dfrac{2\cdot 2^3}{1^3} = 16$

2^4

$$b_{2023} = \frac{b_{2020}\cdot b_{2022}^3}{b_{2021}^3} \Rightarrow \left(\frac{b_{2019}\cdot b_{2021}^3}{b_{2020}^3}\right)^3 \frac{b_{2020}}{b_{2021}^3}$$

$$\frac{b_{2019}^3\cdot b_{2021}^6}{b_{2020}^8}$$

~~Черновик~~

Черновик 5 из 5

101

71

пуст полн

~~+4 +1~~

пуст полн

-1 $+1$

$+5$

$+4$ $+1$

1 цел ~~полн~~ 0 полн.

$+25\cdot 4$ $+25$

отв 125

а при цел нач 601

№2

$$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{400}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\ldots$$

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\ldots$$

$(n+2)(n+3)\ldots$

$2^x-1\,⋮\,3$

2^x

255

$$p^q-q^p+3=2^{p-1}$$

неч неч неч чёт.

чет

неч

~~$2^{p-1}-1\,⋮\,p$~~

$$2^{p-1}=p^q-q^p+3$$

p-чёт, $=2$

$$2^q-q^2+3=2$$

$$2^q+1=q^2$$

$$2^q=(q-1)(q+1)$$

при q-чёт, $=2$

$$p^2-2^p+3=2^{p-1}$$

$$p^2+3=2^{p-1}\cdot 3$$

$⋮3$ $⋮3$ $⋮3$

(если $\neq 3$)

$$3^2+3=2^2\cdot 3$$

$$12=12$$

$q=3$, $p=2$

$q=2$, $p=3$