0 057883 570007

05-78-83-57
(123.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Григорьевой Марины Алексеевной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
05-78-83-57 123.6.	80	20	20	20	10	0	10	0	0

 80 (~~восемьдесят~~)

~~90 (девяносто)~~

Исправлено по апелляции

05-78-83-57 (123.6)

Чистовик

№1.

$$1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x\cdot(2\sin x+\cos x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1+\sqrt{2}\cdot(\cos x\sin x+\sin x\cos x)-2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{1}+\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=\cancel{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin 2x=\cos 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$ – ответ.

№2. Пусть скорость автомобилиста – $2v$ км/ч, тогда у велосипедиста – v км/ч. Если в В они приехали в ~~[illegible]~~ некоторое время, то k – разница между временем прибытия и 12:00 в часах. Рассмотрим 4 случая:

1) Велосипедист выехал на час раньше, и сделал остановку на 2 часа. Тогда, т.к. оба проехали одно и то же расстояние:

$$(k+1-2)\cdot v=k\cdot 2v$$

$-v=kv$ – т.к. $v>0$, можем поделить на v.

$-1=k$ – противоречит по смыслу

Чистовик

2) Автомобилист выехал на час раньше, велосипедист сделал остановку на 2 часа:

$$(k-2)\cdot v = (k+1)\cdot 2v$$

$$-4v = kv$$

$$k = -4 < 0$$ — противоречие по смыслу

3) Автомобилист сделал остановку на 2 часа, велосипедист выехал на час раньше:

$$(k-2)\cdot 2v = (k+1)\cdot v$$

$$kv = 5v$$

$k = 5$ часов

4) Автомобилист выехал на час раньше и сделал остановку на 2 часа:

$$(k+1-2)\cdot 2v = kv$$

$$kv = 2v$$

$k = 2$ часа

Значит, они могли приехать либо в 14 часов (14:00), либо в 17 часов (17:00)

Ответ: 14 и 17.

<u>N3</u>. По т. Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -b \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

а также:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_2+x_3) = -a \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)\cdot(x_1+x_3)+(x_1+x_3)\cdot(x_2+x_3) = b \\ (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) = -c \end{cases}$$

05-78-83-57 (123,6)

Чистовик.

Заметим, что

$$-a = 2\cdot(x_1+x_2+x_3) = -12 \Rightarrow \underline{a=12}$$

$$b = x_1^2+x_2^2+x_3^2+3\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) =$$

$$= \left((x_1+x_2+x_3)^2 - 2\cdot 7\right) + 3\cdot 7 = 36+7 = \underline{43}$$

комментарий $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3))$

$$c = -(-6-x_3)(-6-x_2)(-6-x_1) =$$

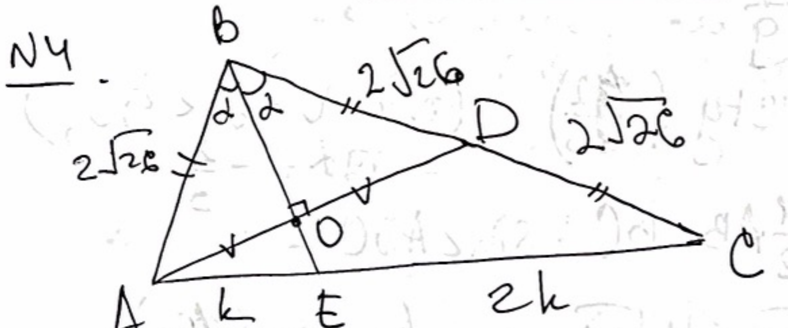
$$= (x_1+6)(x_2+6)(x_3+6) = x_1x_2x_3+6\cdot(x_1x_2+$$

$$+x_2x_3+x_1x_3)+36\cdot(x_1+x_2+x_3)+216 =$$

$$= -1+6\cdot 7-216+216 = \underline{41}$$

Значит, $a=12$, $b=43$, $c=41$ — ответ.

№4.



O – (·) пер-я AD и BE. $\alpha = \angle ABO = \angle OBD$.

В $\triangle ABD$ BO и медиана, и высота $\Rightarrow \begin{cases} AO = OD \\ BD = AB = 2\sqrt{26} \end{cases}$

Тогда $BC = 2BD = 4\sqrt{26}$.

$k = AE$. По св-ву биссектрисы $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow EC = 2k$.

По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$9k^2 = 4\cdot 26+16\cdot 26-2\cdot 8\cdot 26\cdot \cos 2\alpha \Rightarrow$$

Чистовик

$k^2 = \frac{4 \cdot 26}{9} \cdot (5 - 4\cos 2\alpha)$

Также по св-ву биссектрисы:

$BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot EC = 8 \cdot 26 - 2k^2 =$

$= 8 \cdot 26 - \frac{8 \cdot 26}{9} \cdot (5 - 4\cos 2\alpha) =$

$= \frac{8 \cdot 26}{9} \cdot 4 \cdot (1 + \cos 2\alpha) = \frac{32 \cdot 26}{9} \cdot (1 + \cos 2\alpha) =$

$= \frac{32 \cdot 26}{9} \cdot 2 \cos^2 \alpha$

$AD = 2AO = 2 \cdot 2\sqrt{26} \cdot \sin \alpha = 4\sqrt{26} \sin \alpha$

т.к. $AD^2 = BE^2$:

$\cancel{16 \cdot 26} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\cancel{32 \cdot 26}^{2}}{9} \cdot 2 \cos^2 \alpha$

Т.к. $0 < \alpha < 90^\circ$, $\cos^2 \alpha \neq 0$:

$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4}{9}$

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$ (т.к. $0 < \alpha < 90^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha \neq -\frac{2}{3}$)

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{26} \cdot 4\sqrt{26} \cdot \sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)\right) =$

$= 104 \sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ — ответ.

05-78-83-57 (123.6)

№6. $\forall i \in \{1, \dots, k\}: p_i \cdot p_{k-i+1} = N$ (Чистовик

Т.к. $p_4 > p_3$ и $p_{1697} > p_{1696}$,

$(p_4 \cdot p_{1697})^2 > p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_4 \cdot p_{1697} > N$

Т.к. $p_4 \cdot p_{k-3} = N$, $p_{1697} > p_{k-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1697 > k-3 \Leftrightarrow k < 1700$.

Но при этом $k \geq 1697$.

Значит, $k \in \{1697; 1698; 1699\}$.

Разложим N на простые множители:

$N = a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n}$.

Тогда $k = \sigma(N) = (p_1+1)(p_2+1) \cdot \ldots \cdot (p_n+1)$

1) $k = 1697$

Т.к. 1697 – простое число, $N = a_1^{1696}$, где a_1 – некое простое число. проверка – 1.1

Тогда $N^3 = a_1^{3 \cdot 1696} = a_1^{5088} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = 5089$

2) $k = 1699$

Т.к. 1699 – тоже простое число, то аналогично $\sigma(N^3) = 3 \cdot 1698 + 1 = 5095$.

3) $k = 1698$

$1698 = 2 \cdot 3 \cdot 283$ проверка 1.0

I. $N = a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^{282}$

$\sigma(N^3) = (3+1) \cdot (6+1) \cdot (282 \cdot 3+1) =$

$= 4 \cdot 7 \cdot 847 = 23716$ проверка – 1.2

Чистовик

II. $N = a_1^2 \cdot a_2^{283 \cdot 2 - 1} = a_1^2 \cdot a_2^{565}$

$\sigma(N^3) = (6+1) \cdot (1695+1) = 7 \cdot 1696 = 11872$

1.2 проверка 1.2

III. $N = a_1 \cdot a_2^{283 \cdot 3 - 1} = a_1 \cdot a_2^{848}$

$\sigma(N^3) = (3+1) \cdot (2544+1) = 4 \cdot 2545 = 10180$

IV. $N = a_1^{282} \cdot a_2^{5}$

$\sigma(N^3) = 283 \cdot 6 = 1698$

V. $N = a_1^{1697}$

1.2 проверка 1.2

$\sigma(N^3) = 1697 \cdot 3 + 1 = 5092$

Проверка: 1.1. $p_3 = a_1^2$; $p_4 = a_1^3$; $p_{1696} = a_1^{1695}$; $p_{1697} = a_1^{1696}$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} = a_1^{1695+1696+2+3} > a_1^{1696 \cdot 2} = N^2$

5089 подходит

1.0

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} = a_1^{1695+1696+5} = a_1^{1698 \cdot 2} = N^2$

5095 подходит

1.2 т.к. $k = 1698$, $p_{1696} = \frac{N}{p_3}$; $p_{1697} = \frac{N}{p_2}$.

Тогда $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_4}{p_3} \cdot N^2 > N^2$

~~23716, 11872, 10180, 1698 и 5091 подходят~~

23716, 11872, 10180, 1698 и 5091 подходят

Ответ: $\sigma(N^3) \in \{5089; 5095; 5092; 1698; 10180; 11872; 23716\}$

N5.

Чистовик

X_{AB}, X_{BC} и X_{AC} — расст-я между A и B, B и C, A и C по сфере соотв., т.е. 15π, 9π, 12π

Заметим, что $X_{AB}^2 = X_{BC}^2 + X_{AC}^2$.

Значит, из X_{AB}, X_{BC} и X_{AC} можно собрать прямоуг. тр-к по обратной теореме пифагора

O — центр сферы, R-радиус сферы.

$\alpha_{AB} = \angle AOB$, $\alpha_{BC} = \angle BOC$, $\alpha_{AC} = \angle AOC$.

$X_{AB} = \frac{\alpha_{AB}}{2\pi} \cdot 2\pi R = \alpha_{AB} \cdot R$, $X_{BC} = \alpha_{BC} \cdot R$,

$X_{AC} = \alpha_{AC} \cdot R$

$AB = 2R \cdot \sin\frac{\alpha_{AB}}{2} = R \cdot \sqrt{2 - 2\cos\alpha_{AB}}$

аналогично с BC и AC

$P_{ABC} = AB + BC + AC = 2R \cdot \left(\sin\frac{\alpha_{AB}}{2} + \sin\frac{\alpha_{AC}}{2} + \sin\frac{\alpha_{BC}}{2}\right)$.

Т.к. $X_{AB} = \alpha_{AB} \cdot R$, $\alpha_{AB} = \frac{X_{AB}}{R} = \frac{15\pi}{R}$.

Тогда $P_{ABC} = 2R \cdot \left(\sin\frac{15\pi}{2R} + \sin\frac{12\pi}{2R} + \sin\frac{9\pi}{2R}\right) =$

$= 2R \cdot \left(2\sin\frac{24\pi}{4R} \cdot \cos\frac{6\pi}{4R} + \sin\frac{12\pi}{2R}\right) =$

$= 2R \cdot \sin\frac{6\pi}{R} \cdot \left(2\cos\frac{3\pi}{2R} + 1\right) =$

Черновик.

$1697 \le l-1 \le 1700$ $\cancel{3}\ \cancel{5}\ \cancel{7}\ \cancel{11}\ \cancel{13}\ \cancel{17}\ \cancel{19}\ \cancel{23}\ \cancel{29}\ \cancel{31}\ 37\ 41$

$l-1=1697$,

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} =$

$l-1=1698$ $p_{1697}=\frac{N}{p_3}$ $N=a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}$

p_{1699} $l-1=(p_1+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)$

$1697=$

$1698=2\cdot849=2\cdot3\cdot283$

$1699=$

$1700=2^2\cdot5^2\cdot17$

$50^2=2500$ 1600 40^2

45×45: 225, 180

41×41: 41, 164, 1681

$19 \times 8 = 152$

1697 | 11: 11, 59, 55, 47, 3; 1

1697 | 13: 13, 39, 7; 1

1697 | 19: 152, 177, 171, 6

$\cancel{1699}$

1697 | 23: 164, 87, 69, 18; 73; $\times 23$

1697 | 29: 145, 247, 232, 15; 58

$k+7$

1697 | 31: 155, 147, 124, 23; 54

$283 \times 6 = 1698$

1697 | 37: 148, 217, 185, 32; 45

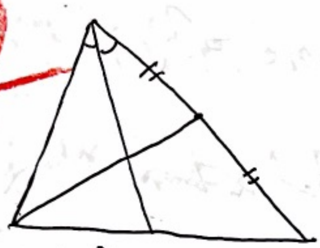
1697 | 41: 124, 57; 13

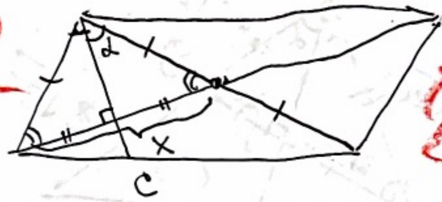
283 $\cancel{11}$ $\cancel{13}$ 17

$p_{1698}=\frac{N}{p_1}$ $\frac{N}{p_3}\cdot\frac{N}{p_4}$

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}=\frac{p_3}{p_2}\cdot N\cdot\frac{p_4}{p_3}\cdot N$

Черновик





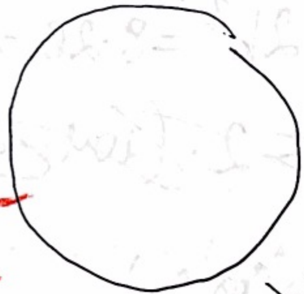
$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$S=(2\sqrt{26})^2\cdot\sin 2\alpha =$

$= 2\sqrt{26}\cdot x\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{26}\cdot 2\sin\alpha\cancel{\cos\alpha} = x\cancel{\cos\alpha}$

$4\sqrt{26}\sin\alpha = x.$



$\sin\alpha+\sin\beta =$

$=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+$

$+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$

$\breve{AB}=\alpha R$

$AB = R\cdot\sqrt{1-2\cos\alpha}$

$R\cdot\left(\sqrt{1-2\cos\alpha_1}+\sqrt{1-2\cos\alpha_2}+\sqrt{1-2\cos\alpha_3}\right)$

$\alpha_1 R = 15\pi$

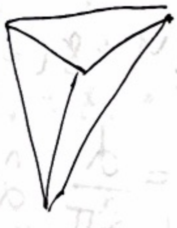
$\alpha_2 R = 9\pi$

$\alpha_3 R = 12\pi$

$\alpha_2^2+\alpha_3^2=\alpha_1^2.$

$\alpha_1=\frac{5}{3}\cancel{\alpha_2}=\frac{15\pi}{R}\quad \alpha_3=\frac{4}{3}\alpha_1.$

$\frac{15\pi}{R}\quad \frac{9\pi}{R}\quad \frac{12\pi}{R}.$



$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\geq N^2$

$\sigma(N^3)$ $\quad N=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}\cdot\ldots\cdot p_\ell$

1234

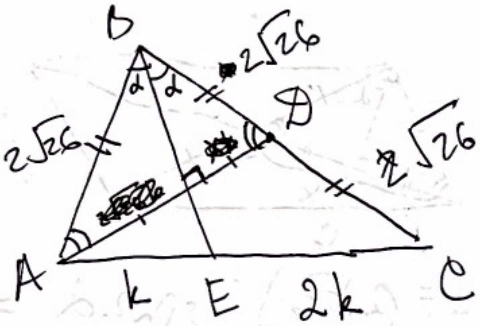
$p_4\cdot p_{1697}\geq N$

$p_4\cdot p_{\ell-4}=N$

$1697\geq \ell-4$

$1700\geq \ell-1$

Черновик



$S_{ABC} = ?$

$x\begin{matrix}13\\8\end{matrix}$
104

$AD^2 = BE^2 = 2\sqrt{26}\cdot 4\sqrt{26} - 2k^2 = 8\cdot 26 - 2k^2 =$

$= 2\cdot(104 - k^2)$

$9k^2 = 4\cdot 26 + 16\cdot 26 - 2\cdot 8\cdot 26\cdot \cos 2\alpha$

$AD^2 = 4\cdot(2\sqrt{26}\cdot\sin\alpha)^2 =$

$= 16\cdot 26\cdot\sin^2\alpha = 2\cdot(104 - k^2)$

$8\cdot 26\cdot\sin^2\alpha = 104 - k^2$

$2\cdot 104\sin^2\alpha = 104 - k^2$

$k^2 = 104\cdot(1 - 2\sin^2\alpha) =$

$= (2\sqrt{26})^2\cdot(1 - 2\sin^2\alpha) =$

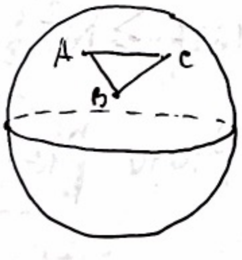
$= (2\sqrt{26})^2\cdot\cos 2\alpha$

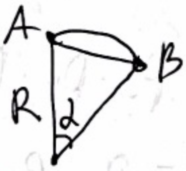
$9k^2 = 4\cdot 26$

15π 9π 12π

225 81 144

$144 + 81 = 225$





$AB = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot 2\pi R = \alpha R$

$AB = \sqrt{R^2 - 2R^2\cos\alpha} =$

$= R\cdot\sqrt{1 - 2\cos\alpha}$

Черновик

$x^3+6x^2+7x+8=0 \qquad x_1, x_2, x_3.$

$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_1+x_3$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7 \\ x_1x_2x_3=8 \end{cases}$$

$2x_1+2x_2+2x_3=-12.$

$2^3=8$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+$

$+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2+2\underbrace{x_1x_2x_3}_{2}$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$

$=\cancel{x_2^2+x_1x_3+x_2x_1}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3)$

$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1$

$-(-6-x_1)(-6-x_2)(-6-x_3)=$

$=(x_1+6)(x_2+6)(x_3+6)=$

$=x_1x$

черновик.

$1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x+\cos x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{2}$

$1+\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$\cancel{4}\ 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x$

A B

$v,\ 2v$

12:00 велосип. автомоб.

~~k~~ ~~k~~ k+1

2 часа

1) в: ~~т~~ раньше, 2 часа

$k\cdot 2v=(k+1-2)\cdot v$

$2kv=kv-v$

$kv=-v$

$k=-1$ – нет.

2) в: 2 часа, авт: раньше

$(k+1)\cdot 2v=(k-2)\cdot v$

$kv=-4v$

3) в: раньше, авт: 2 часа

$(k+1)\cdot v=(k-2)\cdot 2v$

$kv+v=2kv-4v$

$kv=5v$

$k=5$

4) авт: раньше, 1 часа

$k\cdot v=(k-1)\cdot 2v$

$kv=2kv-2v$

$kv=2v$

$k=2$

$\begin{array}{r}\times\ 36\\ 6\\ \hline 216\end{array}$

Повысить оценку на 10 баллов (старая оценка — 80 баллов, новая оценка — 90 баллов).

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» и
Ректору МГУ имени М.В.Ломоносова академику В.А. Садовничему
ученицы 11 класса
ГБОУ школы № 179
г. Москвы
Григорьевой Марины Алексеевной

апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (80) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что:

1) В №4 приведен правильный ответ $\left(104\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 96\right.$, как в итогах) и полное решение (по критериям это оценивается в 20 баллов); ошибок арифметических нет.

2) В решении задачи №5 присутствует существенное продвижение: выведена зависимость периметра от радиуса сферы.

20.04.2023

М. Григ