+1 лист [illegible]

40-31-50-69
(123.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

выход 13^{17} – 13^{20}

Вариант С-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Уеденова Артема Кимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
40-31-50-69	95	20	20	20	20	0	15		

~~31~~ 91

95 (девяносто пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

чистовик

40-31-50-69 (123.3)

№1 лист 1

$$1-\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x=$$
$$=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ – ф-ла пониж. степени

$\left.\begin{matrix}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{matrix}\right\}$ ф-лы двойного угла

$$\cancel{1}-\sqrt{2}(2\sin x\cdot\cos x)-2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cancel{1}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{2}\cdot\sin 2x-2\sqrt{2}\cdot\cos 2x=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ /\cdot(-1)$$

$$\sqrt{2}\cdot\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\ /\cdot\sqrt{2}$$

$$2\sin 2x+4\cos 2x=\cos 2x\mp\sin 2x$$

$$3\sin 2x+3\cos 2x=0\ /:3$$

$$\sin 2x+\cos 2x=0\ /:\sqrt{2}$$

$$\cos 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \iff 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$$

$$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$$

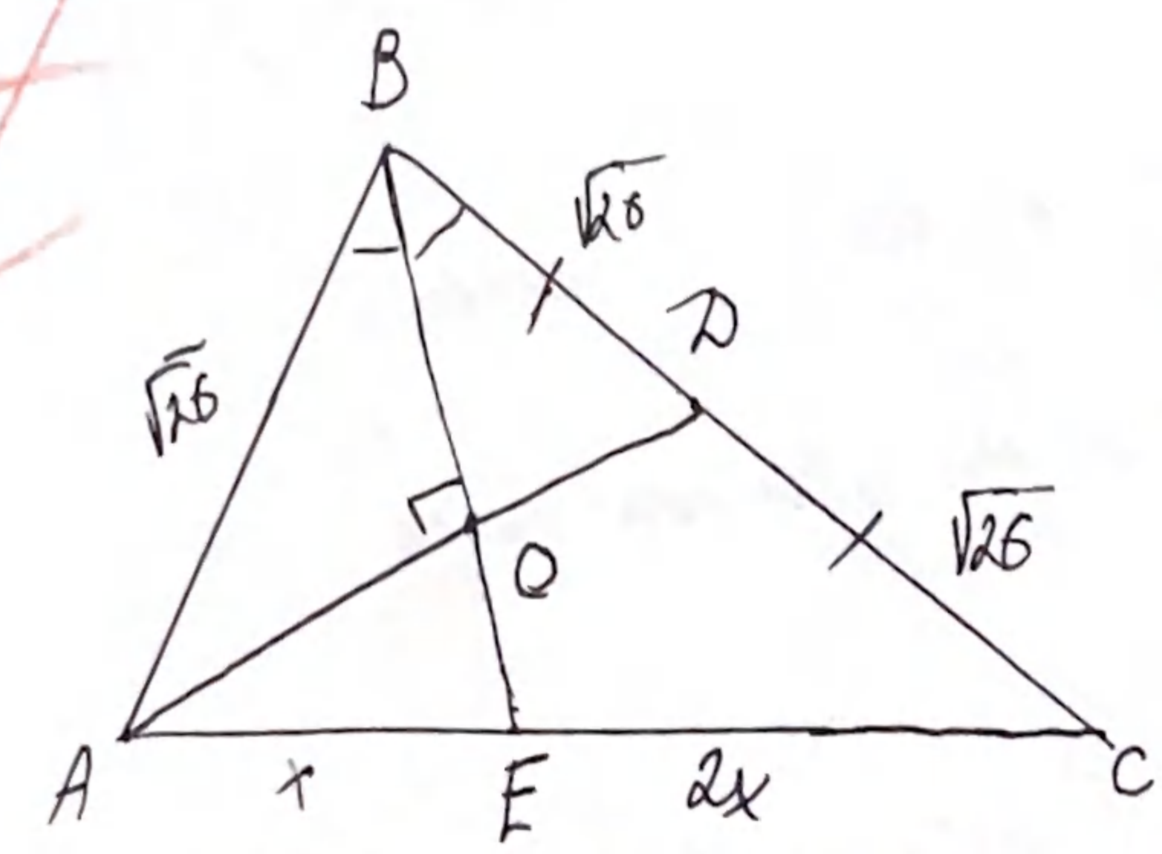
Ответ: $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№4 лист 2

$BE = AD$, $BE \perp AD$, $AB = \sqrt{26}$

S_{ABC} - ?



Решение:

1) рассм. $\triangle ABD$:

Пусть $AD \cap BE = O$

BO - бисс. и выс.

$\downarrow$

$AB = BD = \sqrt{26}$

2) AD - мед $\to$ $BC = 2BD = 2\sqrt{26}$

3) Пусть $AE = x$. Тогда по св-ву бисс: $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

$EC = 2x$

4) по ф-ле длины бисс: $BE^2 = \sqrt{26} \cdot 2\sqrt{26} - 2x^2 =$

$= 52 - 2x^2$

5) достроим $\triangle ABC$ до п-ма $ABCF$; удвоив AD за т. D

~~по св-ву п-ма~~:

т.к. $\angle BAC + \angle FCA = \pi$, то

$\cos\angle BAC = -\cos\angle FCA$

сложим th. cos $\triangle ABC$ и $\triangle ACF$:

и получим св-во п-ма: $AF^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$

$4AD^2 + 4 \cdot 26 = 2 \cdot (9x^2 + 26) / :2$

$2AD^2 + 52 = 9x^2 + 26$, $2AD^2 = 9x^2 - 26$

40-31-50-69 (1333)

т.к. $EB = AD$

$52 - 2x^2 =$

6) th. cos $\triangle$

т.к. $EB=AD$ по усл, то получим: лист 3

$$52-2x^2=\frac{9}{2}x^2-13, \quad 65=\frac{13}{2}x^2, \quad x^2=10$$

6) Т. cos $\triangle ABC$: $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$

$$90=26+4\cdot 26-2\cdot 2\cdot 26\cdot\cos\angle ABC$$

$$4\cdot 26\cdot\cos\angle ABC=5\cdot 26-90$$

$$\cos\angle ABC=\frac{5(26-18)}{4\cdot 26}=\frac{5\cdot\cancel{8}^{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{26}_{13}}=\frac{5}{13}>0\rightarrow\angle ABC<\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\angle ABC=\overset{\angle ABC<\frac{\pi}{2}}{\oplus}\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$$

7) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=26\cdot\frac{12}{13}=24$

Ответ: 24

№3

Т.к. x_1,x_2,x_3 - корни ур-я третьей степени $x^3+6x^2+7x+1=0$ и коэф. при x^3 равен 1, то

$$x^3+6x^2+7x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)x-x_1x_2x_3$$

Тогда

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-6\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7\\ x_1x_2x_3=-1\end{cases}\quad(*)$$

лист 4

Аналогично $x^3+ax^2+bx+c=(x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))\cdot$

$=\cdot(x-(x_3+x_1))$

$x^3-(x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1)x^2+$

$+((x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_2+x_3))x-$

$-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$

Тогда $a=-2x_1-2x_2-2x_3=12$ — из $(*)$

$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_1x_3+x_1^2+x_2x_3+x_1x_2+$

$+x_3x_2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3=$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_1x_3+3x_2x_3=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=$

$=36+7=43$

из $(*)$

$c=-(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_1+x_3)=$

$=-x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2^2-x_1x_2x_3-x_1x_2x_3-x_1x_3^2-$

$-x_2^2x_3-x_2x_3^2=\cancel{-2x_1x_2x_3-x_1^2(x_2+x_3)-x_2^2(x_1+x_3)-x_3^2(x_1+x_2)}$

$=-2(\overset{-1}{x_1x_2x_3}-x_1x$

$=2+x_1x_2(6+$

$x_1+x_2=-6-$

$x_1+x_3=-6-$

$x_2+x_3=-$

$a=$

$b=$

$c=$

40-31-50-69 (123.3)

40-31-50-69 (123.3)

лист 5

$= -2\underbrace{x_1x_2x_3}_{-1} - x_1x_2(x_1+x_2) - x_1x_3(x_1+x_3) - x_2x_3(x_2+x_3) =$

$= 2 + x_1x_2(6+x_3) + x_1x_3(6+x_2) + x_2x_3(6+x_1) =$

$x_1+x_2 = -6-x_3$

$x_1+x_3 = -6-x_2$

$x_2+x_3 = -6-x_1$

$= 2 + 3x_1x_2x_3 + 6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) =$

$= 2 - 3 + 6\cdot 7 = 41$

$a = 12$

$b = 43$

$c = 41$

Все они подходят, т.к.

$x^3+12x^2+43x+41 = (x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))\cdot(x-(x_3+x_1))$

(поскольку соотв. коэф. одинаковы)

Ответ: $a=12$, $b=43$, $c=41$

лист 6

№2

Пусть скор. велосип. v, тогда ск-сть мотоциклиста $2v$. Значит, т.к. они прибыли одновр., то время пути велосип. в 2 раза больше времени пути мотоциклиста.

1°) если велосип. вышел в 12:00, а мот. - в 13:00 то ~~задерживаться~~ остановиться в пути ~~н~~ ~~тот~~ мог только мотоциклист (иначе бы мотоциклист ~~был~~ на 1 час больше находился в пути). Тогда велосип. был в пути на 3 часа больше мотоциклиста →

→ мотоциклист был в пути 3 часа

и они прибыли в ~~12:0~~ 12+3·2 = 18:00

2°) если велосип. вышел в 13:00, мотоциклисть - в 12:00

Тогда, т.к. вр. пути велосип. было больше, то остановился мотоциклист. Получим, что разница во временах пути 1ч → велосип. был 2 часа в пути, а мотоциклисть - 1 час

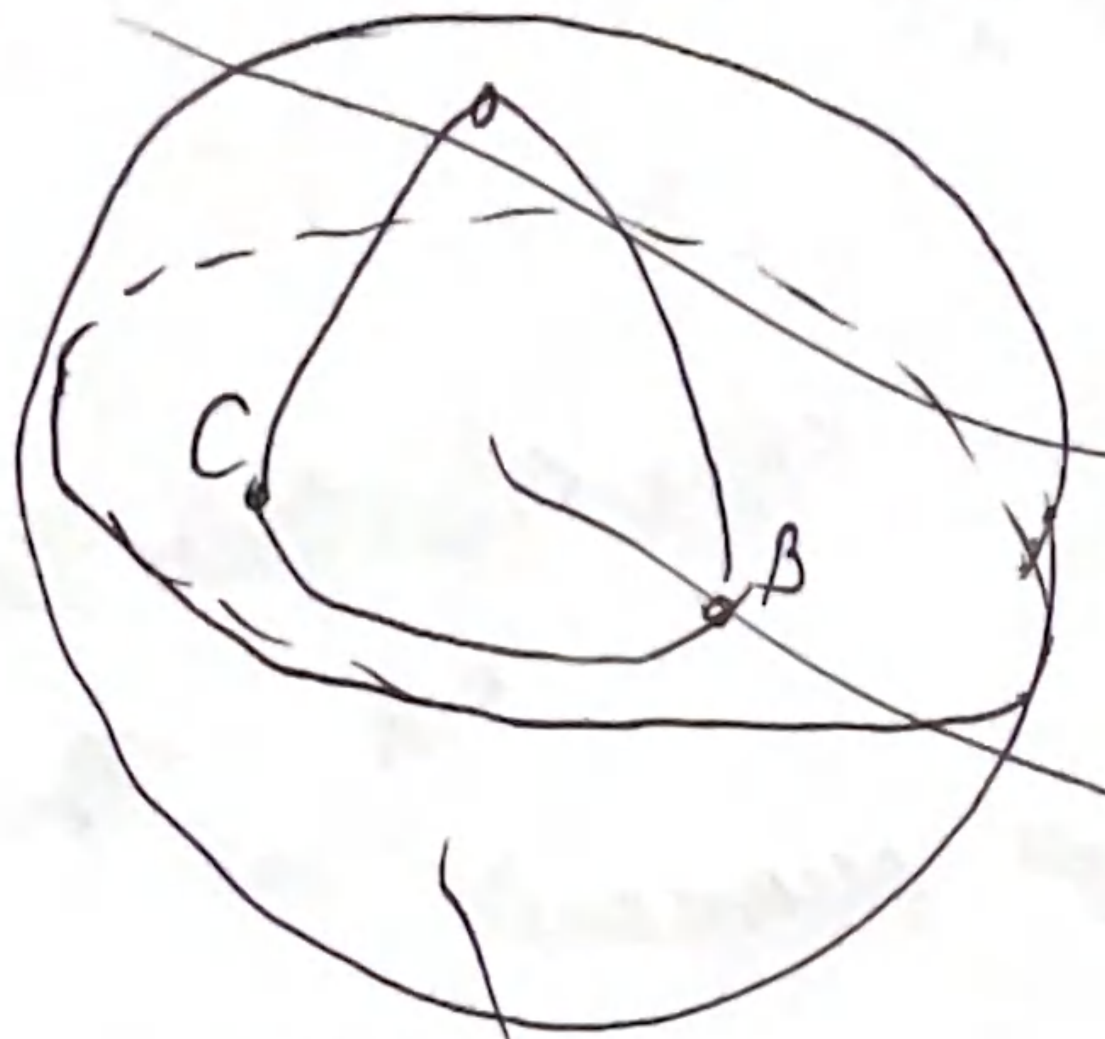
(Это возм., если например мотоциклисть в сер. пути ост. на 2 ч)

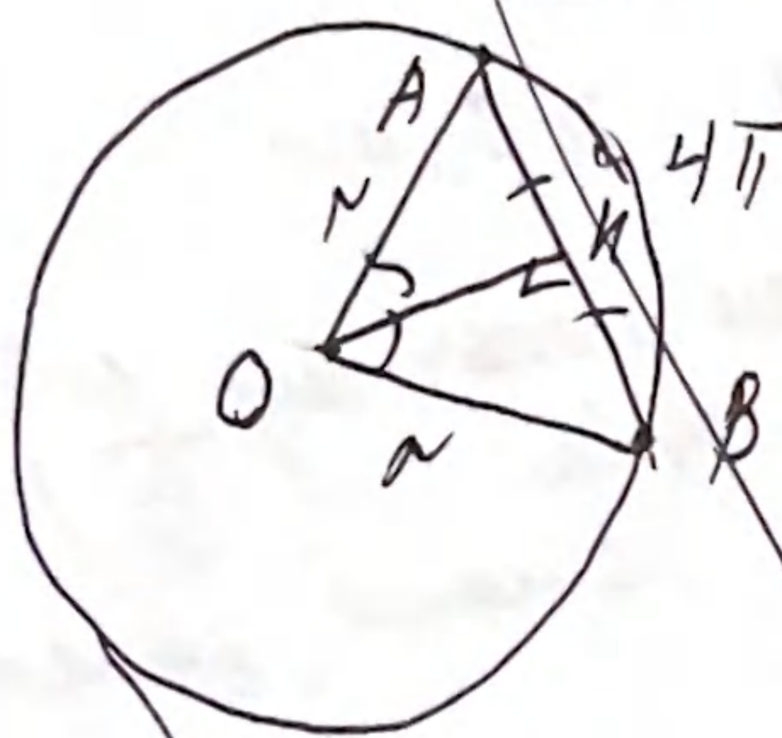
и они прибыли в 13:00+2ч = 15:00

Ответ: в 15:00 или в 18:00

2

N5





Рассм. сечение сферы, которое проходит через мин. расст. между A и B. Пусть радиус этой окр., которая получ. в сечении равна r. O – её центр т.к. 4π – min расст между A и B, то

$4\pi \le \pi r$, $\boxed{r \ge 4}$

$\angle AOB = \frac{4\pi}{r}$. Пусть OH – выс. в р/б $\triangle AOB$:

$HB = r \sin\angle BOH = r\sin\frac{2\pi}{r}$

$\cancel{AB'} = \quad AB = 2HB = f(r)$

$f'(r) = 2\sin\frac{2\pi}{r} + 4\pi\cos\frac{2\pi}{r} > 0$, т.к $r > 0$

Значит для min AB $r = 4 \rightarrow AB = 8$

Аналогично для сечений с наим. расст. между A и C, B и C

$AC \ge 6$, $BC \ge 10$

$P \ge 8 + 6 + 10 = 24$

 гимовик

лист 8

N6 (продолжение) N1

4^0) если $k \geq 1700$:

$$1 < p_2 < p_3 < p_4 \ldots < p_{1696} < p_{1697} < p_{1698} < p_{1699} < \ldots < p_k$$

тогда т.к. от наиб. ~~инде~~ делителя по индексу p_{1697} различаемы на ≥ 3, то

$p_{1697} < \frac{N}{p_3}$ (т.к. каждый делитель имеет вид $\frac{N}{p_j}$ и первые 3 наим. „заняты")

аналог. $p_{1696} < \frac{N}{p_4}$

то $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1697} \cdot p_{1696} < \frac{N^2}{p_3 \cdot p_4} p_3 p_4 = N^2$

что не удовл. условию.

Если N имеет вид $q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \ldots q_n^{\alpha_n}$, где q_i – простые делители N, то кол-во его натуральных делителей равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$, т.к. каждый делитель имеет вид $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_n^{\beta_n}$ где $\beta_i \in \{0, \ldots \alpha_i\}$

т.е. β_i выбрать можно (α_i+1) способами чистовик

№6 лист 7

$1 < P_2 < \dots < P_{1696} < P_{1697} < \dots < P_k = N$

$k \geq 1697$

$P_3 \cdot P_4 \cdot P_{1696} \cdot P_{1697} \geq N^2$

1°) если $k = 1697$, то $P_{1697} = N$ и $P_{1696} = \frac{N}{P_2}$

(т.к. каждый дел. имеет вид $\frac{N}{P_j}$)

и P_2 – наименьш., после $P_1 = 1$

$P_3 \cdot P_4 \cdot \frac{N}{P_2} \cdot N > N^2$, т.к. $P_4 > P_2$

2°) если $k = 1698$, то $P_{1697} = \frac{N}{P_2}$, $P_{1696} = \frac{N}{P_3}$

т.к. каждый дел. имеет вид $\frac{N}{P_j}$, где P_j – др. дел.

а P_3 – наим. после $P_1 = 1, P_2$

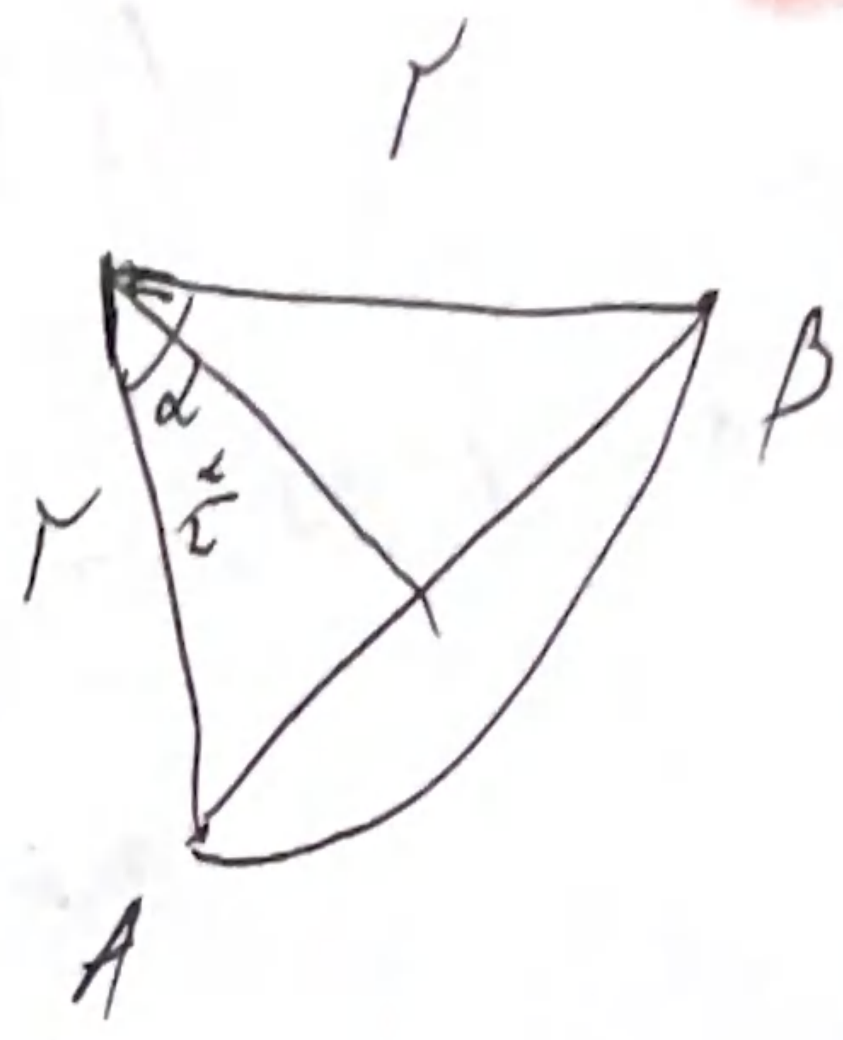
P_2 – наим. после P_1

$P_3 \cdot P_4 \cdot \frac{N}{P_3} \cdot \frac{N}{P_2} = N^2 \cdot \frac{P_4}{P_2} > N^2$ подходит

3°) если $k = 1699$, то $P_{1697} = \frac{N}{P_3}$, $P_{1696} = \frac{N}{P_4}$

($P_{1699} = N$, $P_{1698} = \frac{N}{P_2}$)

$P_3 \cdot P_4 \cdot \frac{N}{P_3} \cdot \frac{N}{P_4} = N^2$ подходит



$\alpha = \frac{2\pi}{n} < 90^\circ$ 4

$AB = 2r\sin\frac{2\pi}{n}$

$n \geq 4$

$1 = p_1 < p_2 \dots < p_k = N$

p_{1697} p_{1698} p_{1699}

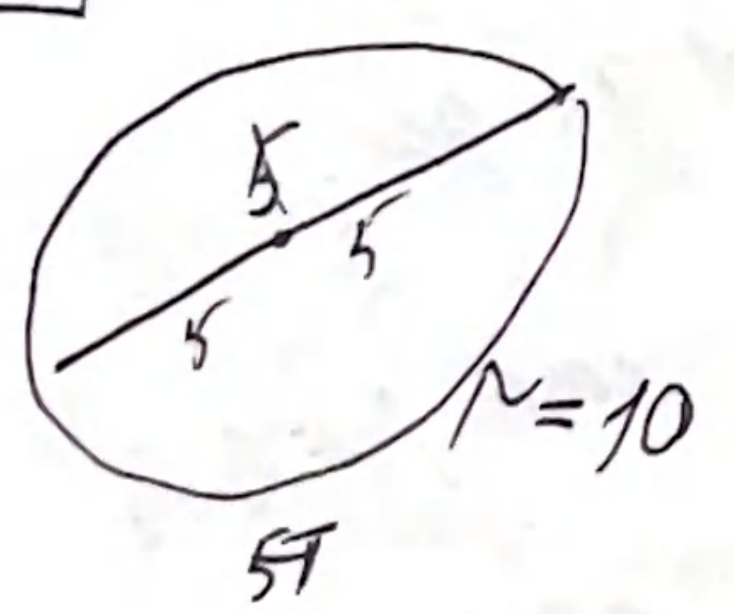
$2\sin\frac{2\pi}{n} + 2n\cdot\frac{2\pi}{n^2}\cdot\cos\frac{2\pi}{n} =$

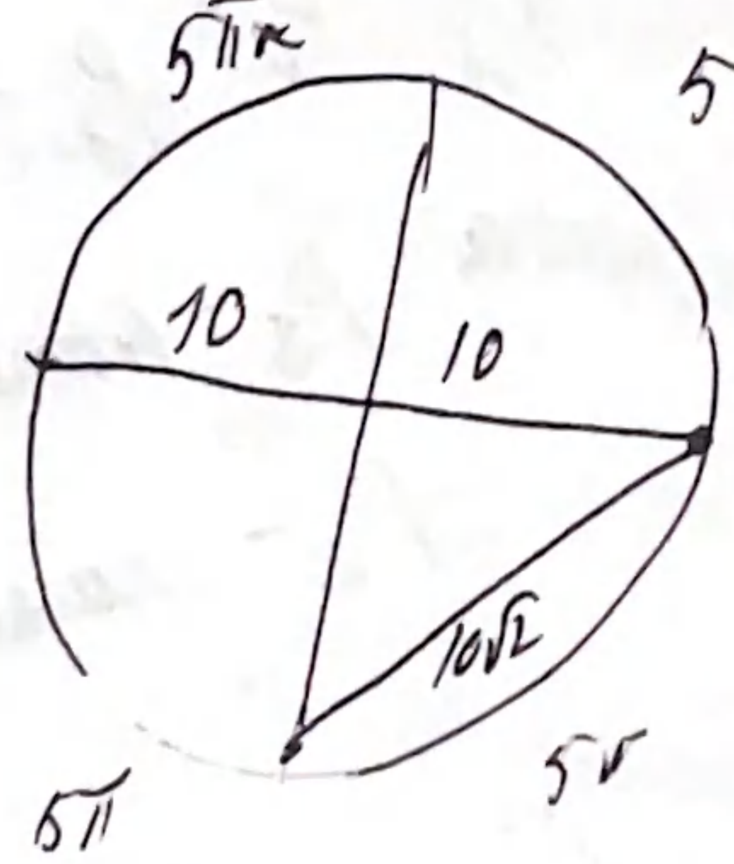
p_2

$= 2\sin\frac{2\pi}{n} + 4\pi\cos\frac{2\pi}{n}$

p_{1696}

$\boxed{n=4}$



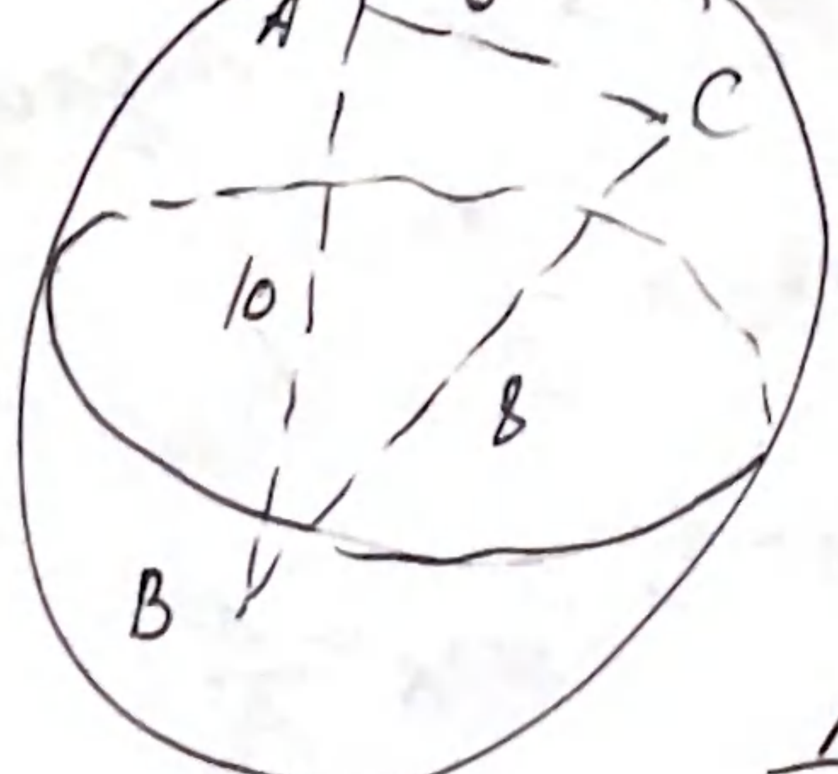


p^2

$\Pi(\alpha_i+1)$

$\Pi(3\alpha+1)$

$10\sqrt{2} > 10$



p_1, p_2, p_3, p_4

$p_{1696} = \frac{N}{p_5}$

p_{1697} p_{1698} p_{1699} $p_{1700} = \frac{N}{p_1}$

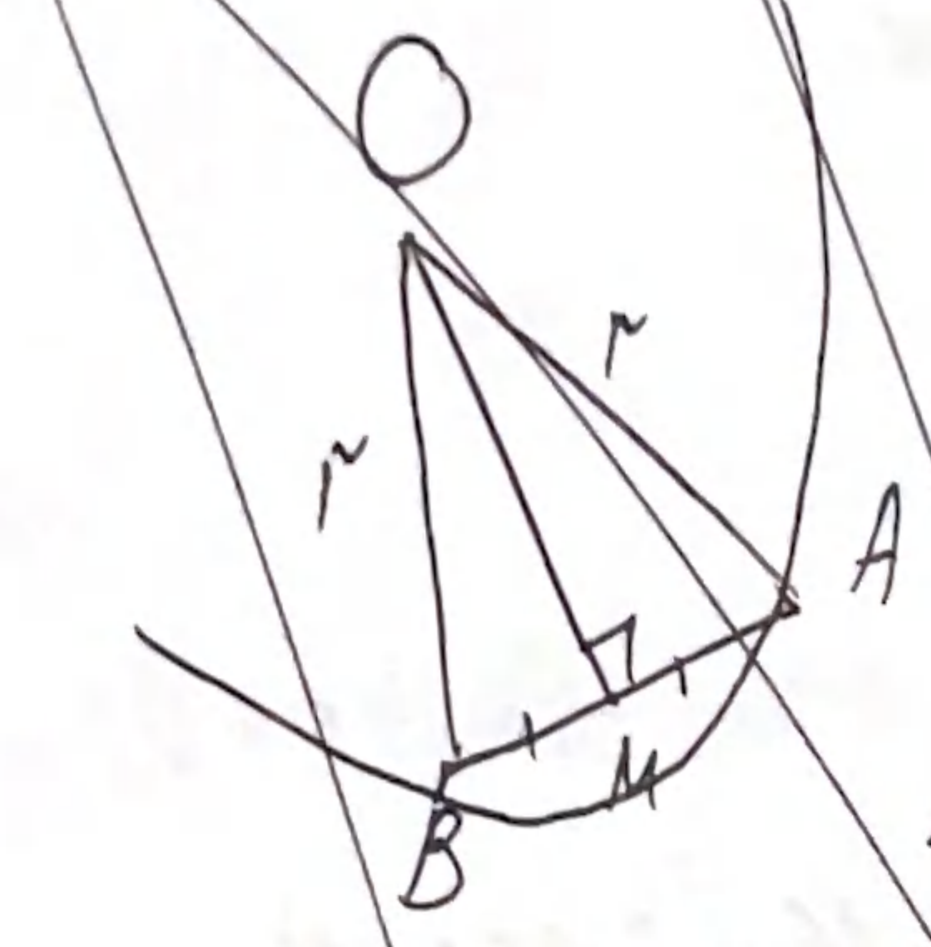
$\frac{N}{p_4}$ $\frac{N}{p_3}$ $\frac{N}{p_2}$

Чистовик

N 5

лист ~~10~~ 9

~~Дан~~ Пусть O – центр сферы. Док, что наименьш. расст. между двумя точками A, B достигается в пл-сти (ABO).



OM – мед. в $\triangle AOB$ ($AO=OB=r$)

$\sin\angle AOM = \frac{AM}{r}$, $\angle AOB = 2\angle AOM$ (св-во р/б $\triangle$-ка)

т.к. r наибольший только в сечении, проход. через центр ~~св~~ сферы, то

$\angle$

N 6 (N2 продолжение)

I) 1697 – простое число (т.к. не дел. на прост. $< \sqrt{1697} < 45$) $\rightarrow N = p^{1696}$, где p – простое

$N^3 = p^{1696\cdot 3}$

$\sigma(N^3) = 1696\cdot 3+1$

II 2) $1698 = 2\cdot 3\cdot 283$, 283 – простое, 2, 3 – простые

Значит ~~...~~ N имеет следующие виды: (исходя из ф-лы для кол-ва дел. N)

1) $N = p\cdot q^2\cdot r^{282}$, p, q, r – простые
2) $N = p^2 q^{565}$
3) $N = p^5\cdot q^{282}$
4) $N = p\cdot q^{848}$
5) $N = p^{1697}$

Тогда $\sigma(N^3)$ равно

~~12~~ $4\cdot 7\cdot(282\cdot 3+1)$; $4\cdot(3\cdot 848+1)$; $7\cdot(3\cdot 565+1)$; $3\cdot 1697+1$; $16\cdot(3\cdot 282+1)$;

№6 (прод. №3)

1699 – простое, значит из формулы для $\sigma(N)$

$N = p^{\cancel{1700}\ 1698}$, где p – простое

$\sigma(N^3) = 3\cdot 1698 + 1$

Ответ: $1698\cdot 3+1$; $4\cdot 7\cdot(282\cdot 3+1)$; $4(3\cdot 848+1)$; $7\cdot(3\cdot 565+1)$; $3\cdot 1697+1$; $16\cdot(3\cdot 282+1)$; $3\cdot 1698+1$

черновик

1697

1

2 17 31

3 19 37

5 21 41

7 23 43

11 29

13

$13^2 \cdot 10 + 7 =$

$= 360 + 7 = 367$

1697 | 19
183 | 71
267
13
137 7

169
26

17 × 9 = 153

70 + 63 = 143

19

$\sqrt{283} \approx 20$

1697 | 17
153 | 9
167

283 × 6 = 1698

283 | 13
26 | 2
23

283 × 3 = 849

90 + 63 = 153

17 × 9

7·6 =

283 | 17
17 | 1
113

1698 | 3
15 | 566
19
18
18

1698 | 3
15 | 566
4
19
18
18
18

283 | 17
17 | 1
113

566 | 2
4 | 283
16
16
06
6
0

283 | 13
26 | 2
23

1697 | 43
129 | 3
407

283 | 19
19 | 1
93

черновик

$1-\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x - 2\sqrt{2}\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x - \sqrt{2}\cdot\sin x\cos x = 2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

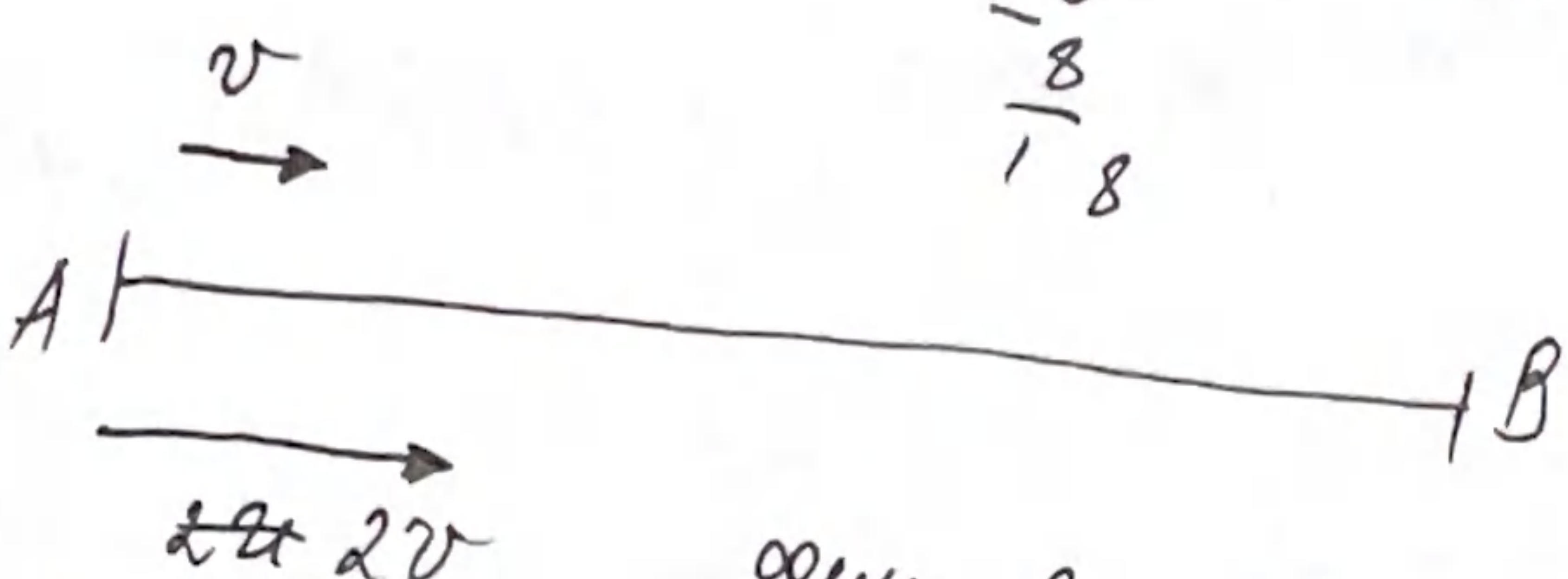
$X - \sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cdot\cos 2x = X - \cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1-\cos 2x$

$13 \times 5 = 65$

$1698 : 42$, -16, 08, -8, 18, 4849



один в 13:00

др. в 12:00

один сделал ост. на 2 ч

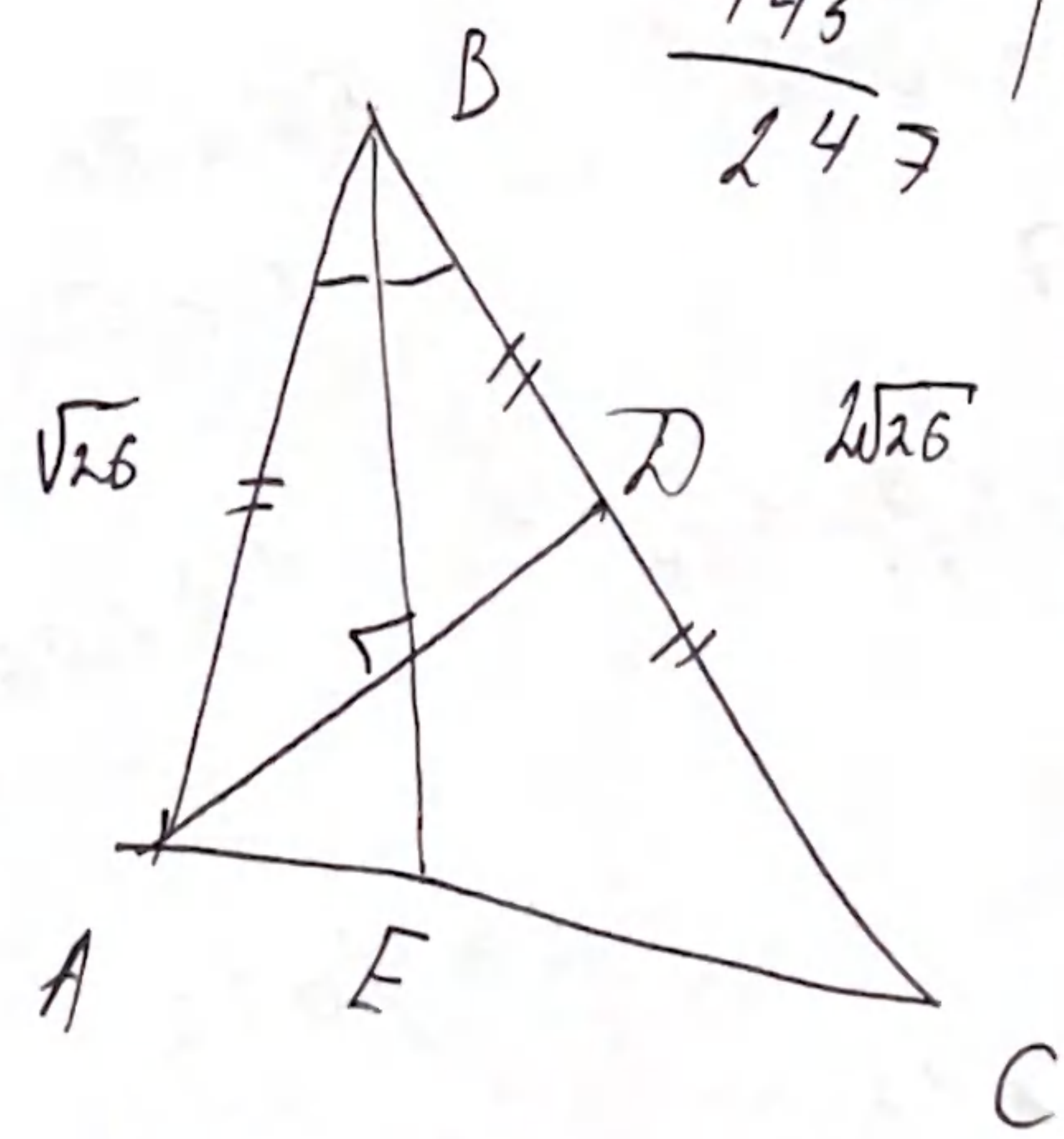
29×8

$2v\cdot t_n' = v\cdot t_n$

$t_n = 2t_n'$

$t_n' = t-3$

$1697 : 29$, -145, 247, 5

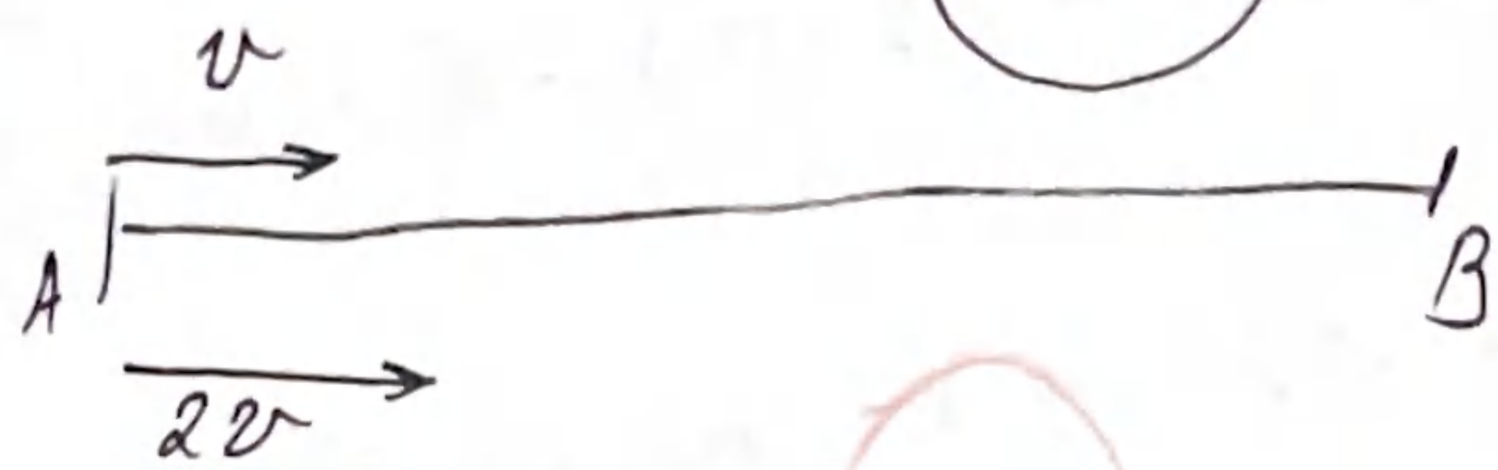


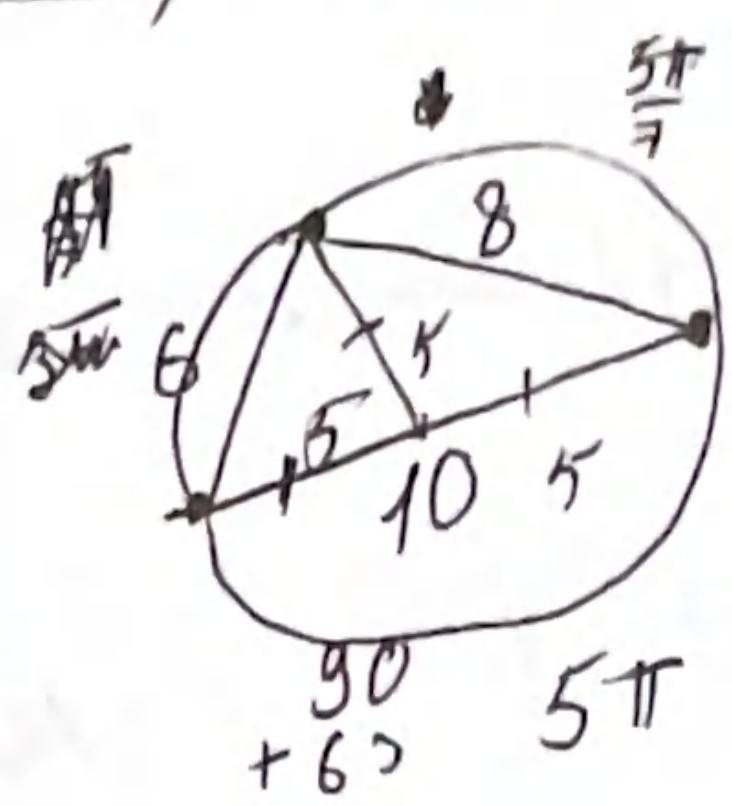
$1657 : 23$, -161, 87, 7

$1697 : 21$, -168, 17, 8

$1697 = 1600+97$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!





один в 13:00

другой в 12:00

один от. на 2 часа

$\sigma(N)$

$$\begin{array}{r|l} 1697 & 17 \\ -153 & 9 \\ \hline 167 & \end{array}$$

1697 дел.

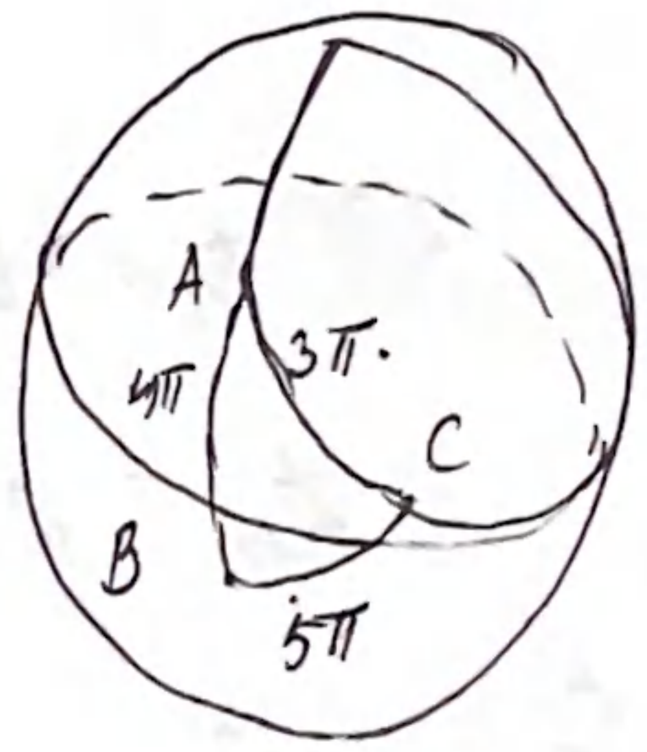
$1697 \,|\, 19$

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < \ldots < P_{1696} < P_{1697} < \ldots < P_k$$

$$P_{k-1} = \frac{N}{P_2} < \frac{N}{P_3} < \frac{N}{P_1} = P_k$$

$$P_{1697} < \frac{N}{P_3}$$

1699



$1^0)$ $k = 1698$?

$5\pi \leq \pi r$

1697

$r \geq 5$

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < \ldots < P_{1696} < P_{1697} < \ldots < P_k$$

$\cancel{P_k < P_{k+1}}$

$\overset{\shortparallel}{\frac{N}{P_3}}$ $\overset{\shortparallel}{\frac{N}{P_2}} < N$

$\cancel{k \geq 1699}$

~~если $k \geq 1700$:~~

$k \geq 1697$

$1^0)$ $k = 1697$:

$$P_3 \cdot P_4 \cdot N \cdot \frac{N}{P_2} > N^2$$

$k = 1698$:

$$P_3 \cdot P_4 \cdot \frac{N^2}{P_2 P_3} > N$$