0584362460004

58-43-62-46
(141.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Житковы Софьи Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
58-43-62-46	98	21	0	21	14	21	21	X	X

58-43-62-46
(141.4)

1	2	3	4	5	6	...
						...

Чистовик 7-8 класс

98 (девяносто восемь)

1.

Ответ: всего 126 пакетов.

Решение:

Изначально есть один пустой пакет.

~~Будем наполн~~

За одну операцию будем наполнять какой-нибудь пустой пакет пятью пакетами.

С каждой операцией количество пустых пакетов уменьшается на 1 и увеличивается на 5 (т.к. один пустой пакет стал наполненным, и прибавилось 5 пустых пакетов). Итого увеличивается на 4.

Т.к. в итоге стало 101 пустых пакетов, то операций было:

$(101-1):4=25$ (Т.к. изначально был один пустой пакет, и с каждой операцией количество пустых пакетов увеличивалось на 4.

Т.к. операций было 25, значит непустых пакетов 25.

Итого: 101 пустой пакет + 25 непустых пакетов = 126 пакетов.

3.

Ответ: пара $p=3$ и $q=2$ и пара $q=3$ и $p=2$.

Решение:

Т.к. $p>1 \Rightarrow 2^{p-1} \vdots 2$

$3 \not\vdots 2 \Rightarrow p^q-q^p \not\vdots 2 \Rightarrow$ либо p^q, либо q^p чётное, т.к. p и q простые

$\Rightarrow$ ~~либо p, либо q~~ либо $p=2$, либо $q=2$:

если $p=2$:

$p^q-q^p+3=2^q-q^2+3=2^{p-1}=2^{2-1}=2^1=2$

$2^q+1=q^2$

$2^q=q^2-1=(q-1)\cdot(q+1) \Rightarrow$ обе скобки – какие-то степени 2.

Т.к. одна из скобок $(q-1)$ и $(q+1)$ делится на 2, но не делится на 4, то эта скобка равна 2. Если $q+1=2 \Rightarrow q=1$ – противоречие, значит $q-1=2 \Rightarrow q=3 \Rightarrow 2^3-3^2+3=8-9+3=2=2^{2-1}=2$.

Значит пара $p=2$ и $q=3$ подходит.

если $q=2$:

$p^2-2^p+3=2^{p-1} \Longleftrightarrow p^2+3=2^{p-1}+2^p=2^{p-1}(1+2)=2^{p-1}\cdot 3 \vdots 3$

$\Rightarrow p^2+3 \vdots 3 \Rightarrow p^2 \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow$ т.к. p – простое $\Rightarrow p=3$

Проверим: $3^2-2^3+3=9-8+3=4=2^2=2^{3-1}$

Значит пара $p=3$ и $q=2$ подходит.

2 стр.

Чистовик

4.

Ответ: 198 участков можно ремонтировать.

Решение:

Всего перекрёстков: $10 \cdot 23 = 230$.

Значит минимальное количество ~~дорог~~ участков нужное чтобы соединить все перекрёстки — 229 ~~дорог~~ участков, т.к. иначе будет перекрёсток, из которого нельзя будет доехать до какого-нибудь другого перекрёстка (т.к. в графе, где ~~все~~ перекрёстки — вершины, а участки — рёбра минимальное количество рёбер при фиксированном количестве вершин достигается при простом пути).

Всего участков: $22 \cdot 10 + 9 \cdot 23 = 220 + 207 = 427$

Значит максимальное количество участков, которые можно ремонтировать одновременно: $427 - 229 = 198$.

5.

Ответ: $b_{2023} = 2^{2021^2} = 2^{4084441}$

Решение:

~~Докажем~~ по индукции по n: $b_n = 2^{(n-2)^2}$

База: $n=4$: $b_4 = \frac{1 \cdot 2^3}{1^3} = 2^4 = 2^{(4-2)^2}$

~~Переход:~~ $n=5$: $b_5 = \frac{1 \cdot 2^{12}}{2^3} = 2^9 = 2^{(5-2)^2}$

$n=6$: $b_6 = \frac{2 \cdot 2^{27}}{2^{12}} = 2^{16} = 2^{(6-2)^2}$

Переход: $n, n+1, n+2 \longrightarrow n+3$

Индукционное предположение: $b_n = 2^{(n-2)^2}$, и $b_{(n+1)} = 2^{(n-1)^2}$, и $b_{(n+2)} = 2^{(n^2)}$

$$b_{n+3} = \frac{b_n \cdot b_{(n+2)}^3}{b_{(n+1)}^3} = \frac{2^{n^2-4n+4} \cdot 2^{3 \cdot n^2}}{2^{3n^2-6n+3}} = \frac{2^{4n^2-4n+4}}{2^{3n^2-6n+3}} = 2^{(n^2+2n+1)} =$$

$= 2^{(n+1)^2} = 2^{(n+3-2)^2}$ => индукционное предположение верно

=> для $n=2023$: $b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{2021^2}$

6.

Ответ: есть, у Алисы.

Стратегия Алисы:

Всего различных букв: "п" – 1, "о" – 5, "к" – 1, "р" – 3, "и" – 1, "в" – 2, "б" – 1, "ь" – 1, "е" – 1, "ы" – 2, "г" – 1.

Назовём "комплектом" буквы" все незачёркнутые вхождения этой буквы в ~~фразу~~ надпись.

Изначально есть 11 комплектов. Из них "больших" комплектов (комплектов состоящих из 2 и более букв) — 4.

58-43-62-46
(141.4)

Чистовик

Стратегия Алисы:

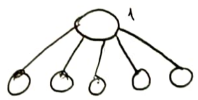
~~...~~
Первым ходом Алиса вычёркивает ~~букву "п"~~ ~~любой не "большой"~~ ~~комплект~~ 1 "о" ~~буквы "п"~~.

Затем:
если Боря зачёркивает не "большой" комплект, то Алиса тоже зачёркивает не "большой" комплект (она всегда может так сделать, т.к. не "больших" комплектов всегда нечётное число после хода Бори, т.е. хотя бы один);
~~если Боря впервые зачёркивает впервые 4 "о", то Алиса зачёркивает 2 "р" => оба этих комплекта становят перестают быть "большими", и не "больших" комплектов по прежнему чётное количество после хода Алисы и наоборот:~~
~~если Боря впервые#1 зачёркивает 2 "р", то Алиса зачёркивает 4 "о" такое количество "о", чтобы осталось 1 "о"~~
если Боря ~~если Боря~~ "~~впервые~~" зачёркивает 1 "в", то Алиса зачёркивает 1 "ы", и наоборот:
если Боря ~~впервые~~ зачёркивает 1 "ы", то Алиса зачёркивает 1 "в";
~~если Боря впервые зачёркивает 3 "о", то Алиса зачёркивает 1 "р" => б~~
~~=> не "больших" комплектов по прежнему чётное количество, "больших" комплектов тоже чётное количество, и наоборот:~~
~~если Боря впервые зачёркивает 1 "р", то Алиса зачёркивает 3 "о";~~
~~если Боря впервые зачёркивает 2 "о" 1 "о" или, то Алиса зачёркивает 1 "о", и ... б~~ 3.
если Боря ~~в~~ зачёркивает какое-либо количество "о" или "р", то Алиса зачёркивает нужное количество нужных букв, так, чтобы количества "о" и "р" сравнялись, но
если ~~в~~ количества "о" и "р" равны, что могло произойти, только если Боря ~~в~~ зачеркнул 2 "о"

Затем:
если Боря ~~впервые~~ вычёркивает какой-нибудь комплект из 1 буквы, то Алиса вычёркивает ~~...~~ ~~"о" или "р" столько, сколько нужно, чтобы количества букв в комплектах "о" и "р" сравнялись, и если Боря после этого будет~~ любой другой комплект из 1 буквы.
если Боря вычёркивает комплект буквы "в", то Алиса ~~...~~ вычёркивает комплект буквы "ы", и наоборот.
если Боря зачёркивает 1 "В", то Алиса – 1 "ы", и наоборот.
если Боря зачёркивает какое-то количество "о" или "р", то Алиса зачёркивает "о" или "р" столько, сколько нужно, чтобы разница между количеством букв в этих ~~наборах~~ комплектах была равна 1.
Таким образом после любого хода Бори будет оставаться хотя бы 1 ~~...~~ комплект, значит у Алисы всегда будет ход.
=> Алиса выиграет.

Черновик

1.



$25\cdot 4+1=101$

$101+25=126$

3.

$p^q-q^p+3=2^{p-1}$

~~$p=1 \Rightarrow 1-q+3=1$~~

$p=2 \Rightarrow 2^q-q^2+3=2 \Rightarrow 2^q=q^2-1 \Rightarrow 2^q=(q-1)(q+1)$

2 4

~~$q=1$~~

$q=3$
$p=2$

$q=2 \Rightarrow p^2-2^p+3=2^{p-1}$

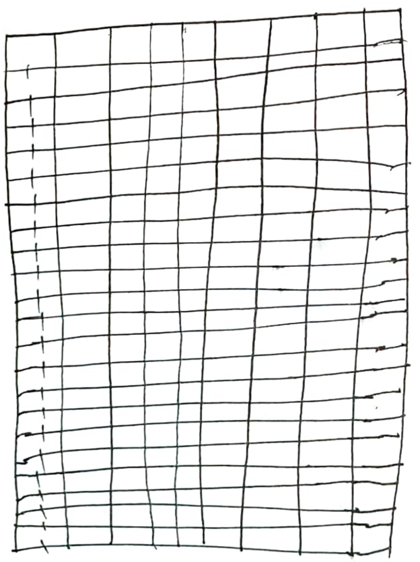
$p^2+3=2^{p-1}+2^p$

$p^2+3=2^{p-1}(1+2)=2^{p-1}\cdot 3$

$p \vdots 3$

$p=3$, $q=2 \Rightarrow 3^2-2^3+3=9-8+3=4=2^{3-1}=2^2$

4.



$22\cdot 9=198$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 9 \\ \hline 198 \end{array}$$

601

~~7~~ 11 13 17 ~~19~~ ~~23~~ ~~29~~

$a \not\vdots\; 1,\ldots,400$

5.

$b_4=\frac{2\cdot 2^3}{1^3}=2^4=2^{(n-2)^2}$

$b_5=\frac{1\cdot 2^{12}}{2^3}=2^9=2^{(n-2)^2}$

$b_6=\frac{2\cdot 2^{27}}{2^{12}}=2^{16}=2^{(n-2)^2}$

$$\begin{array}{r} \times 2021 \\ 2021 \\ \hline 2021 \\ 4042 \\ 4042 \\ \hline 4044441 \end{array}$$

~~$b_{n+2}=$~~