0 099543 670009

**09-95-43-67**
**(123.5)**

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Максимова Тимофея Степановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 09-95-43-67 123.5 | 85 | 20 | 20 | 20 | 20 | 5 | 0 | | |

09-95-43-67 (123.5)

ЧЕРНОВИК

$\sqrt{3}$ и 1 $\to$ 2

№1

$$1+\sqrt{2}\sin x\cdot(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x) = 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos x-2\sin x=\sqrt{5}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\cos\alpha}\cos x-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\sin\alpha}\sin x\right)=\sqrt{5}\cos(\alpha+x)$$

$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$

$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$2\cos x+\sin x=\sqrt{5}\left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\sin\alpha}\cos x+\sin x\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\cos\alpha}\right)=\sqrt{5}\sin(\alpha+x)$$

$$1+\sqrt{10}\left(\sin x\cdot\cos(\alpha+x)+\cos x\cdot\sin(\alpha+x)\right)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{10}\left(\sin(x+\alpha+x)\right)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-1$$

$$\sqrt{10}\left(\sin(2x+\alpha)\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

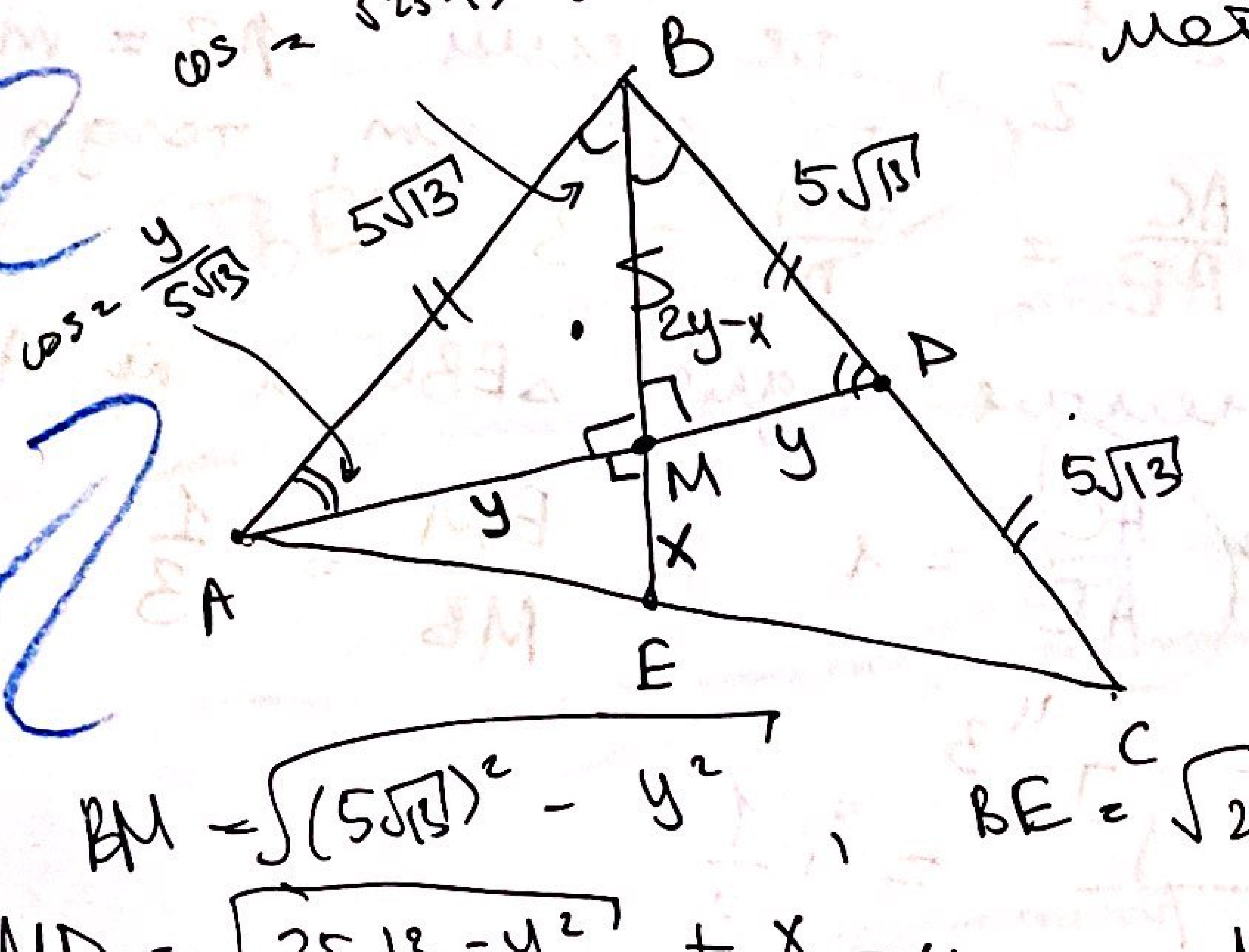
$$\sqrt{10}\cdot\sin(2x+\alpha)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{10}\sin(2x+\alpha)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

сторона доп. угол.

$\cos=\sqrt{25\cdot13-y^2}$

метод координат??




$S_{ABC}$ – ?

$AB=5\sqrt{13}$

$BE=AD$

AD

$BM=\sqrt{(5\sqrt{13})^2-y^2}$, $BE=\sqrt{25\cdot13-y^2}+x$

$MD=\sqrt{25\cdot13-y^2}+x-y$

МЕНЕЛАЙ ?

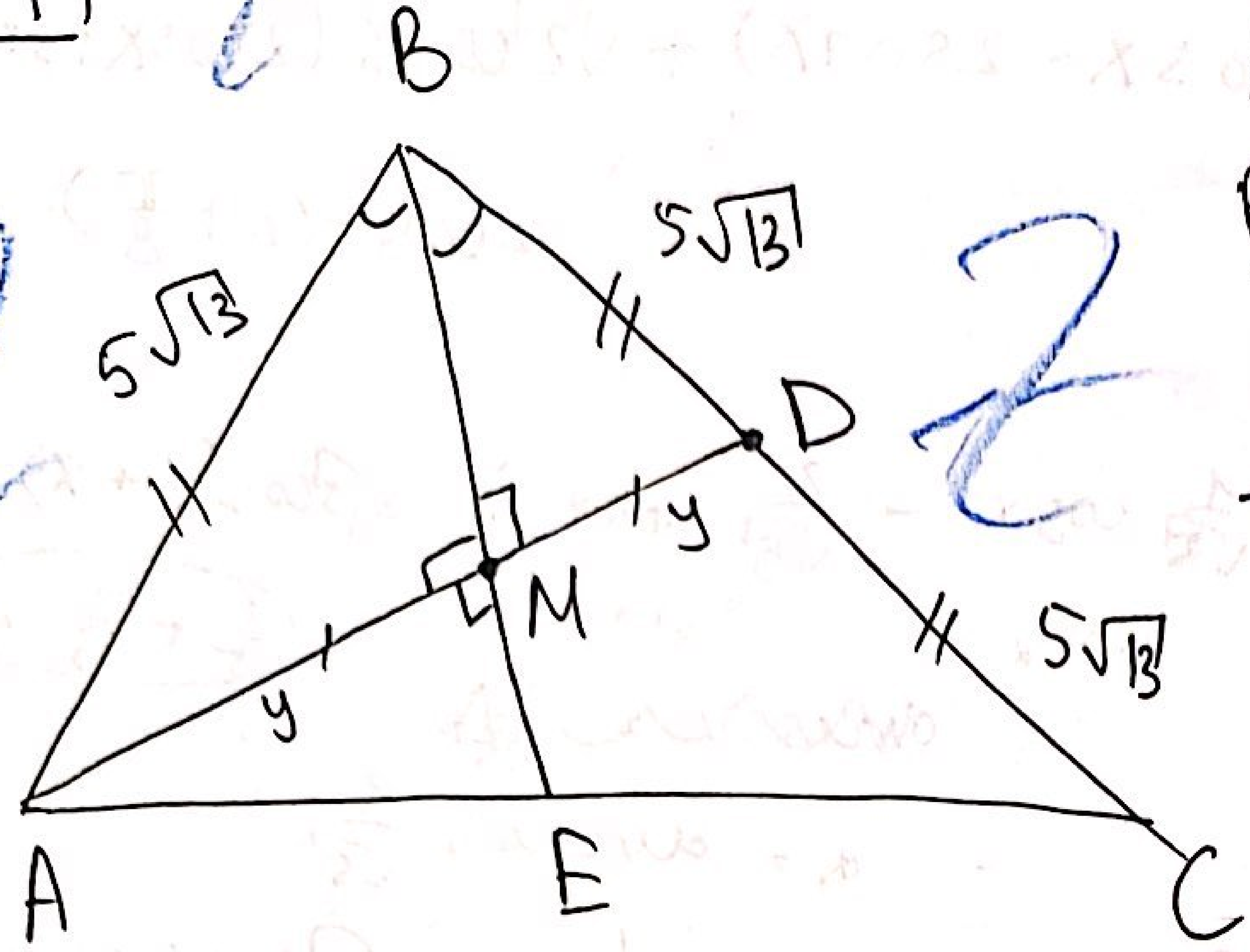
$ME=2y-\sqrt{25\cdot13-y^2}$

ЧИСТОВИК

№4

$BE = AD$; $BE \perp AD$,

$AB = 5\sqrt{13}$




Решение:

Пусть $AD \cap BE =$ т. M

Тогда BM – биссектр. и ~~медиана~~ высота одновременно, значит

$\triangle ABD$ – равноб., т.е. $BD = AB = 5\sqrt{13}$, $DC = BD = 5\sqrt{13}$, а также BM – еще и медиана, т.е. $AM = MD = y$ $y>0$, тогда $AD = 2AM = 2y$, а по условию $BE = AD = 2y$. По Т Пифагора для $\triangle ABM$:

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{25 \cdot 13 - y^2}$$

$$ME = BE - BM = 2y - \sqrt{25 \cdot 13 - y^2}$$

Т.к. BE – биссектриса, то $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{5\sqrt{13}}{10\sqrt{13}} = \dfrac{1}{2}$, т.е. если $AE = m$, то $EC = 2m$, тогда $AC = 3m$, $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{3m}{m} = 3$

По Т Менелая для $\triangle EBC$ и пр. AD:

$$\frac{EM}{MB} \cdot \underbrace{\frac{BD}{DC}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{AC}{AE}}_{=3} = 1 \quad ; \quad \frac{EM}{MB} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2y - \sqrt{25 \cdot 13 - y^2}}{\sqrt{25 \cdot 13 - y^2}} = \frac{1}{3}$$

Чистовик

№4 продолжение

$$\frac{2y}{\sqrt{25\cdot 13-y^2}} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cancel{2}y}{\sqrt{25\cdot 13-y^2}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{3}$$

$$3y = 2\cdot\sqrt{25\cdot 13-y^2}$$

$$9y^2 = 4\cdot(25\cdot 13-y^2)$$

$$9y^2 = 1300 - 4y^2$$

$$13y^2 = 1300$$

$$y^2 = 100, \quad y = 10$$

Тогда $BM = \sqrt{25\cdot 13 - 25\cdot 4} = \sqrt{25\cdot 9} = 15$,

зн $\sin\angle ABM = \frac{AM}{AB} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$,

$\cos\angle ABM = \frac{BM}{AB} = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$,

$\sin\angle ABC = \sin(2\angle ABM) = 2\cdot\sin\angle ABM\cdot\cos\angle ABM$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sin\angle ABM\cdot\cos\angle ABM\cdot AB\cdot$

$\cdot BC = \frac{2}{\cancel{\sqrt{13}}}\cdot\frac{3}{\cancel{\sqrt{13}}}\cdot 5\cancel{\sqrt{13}}\cdot 10\cancel{\sqrt{13}} = 6\cdot 50 = 300$

ОТВЕТ: 300

ЧЕРНОВИК

№2

! графика
Вел. — В
Авт. — А


Пусть скорость автом. = $2x$, скр. вел = $x$,
а расстояние из А в В, ~~которое~~ нужно преодолеть — $S$

в 14:00, а др. в 15:00,
еще один сделал остановку
в 2 часа

сделал остановку
выехал позже
лев.
} рассматриваем все варианты

BB — не подходит
BA
AB — ? вроде бы
здесь мы не можем сказать точно,
тк $\frac{S}{x} + 1 = \frac{S}{2x} + 2$

$a$, $\frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a = 1$, $a = 2$

AA: $\frac{S}{x} = \frac{S}{2x} + 2 + 1$

$t$, $\frac{1}{2}t$

$\frac{1}{2}t = 3$, $t = 6$

$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$ $\quad x^3 = 6x^2 - 7x + 1$
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ $\quad x^3 = (x-1) \ldots$

$-x_1 - x_2 - x_3 = -6$,
$x_1x_2 + x_3x_2 + x_3x_1 = 7$,
$-x_1x_2x_3 = -1$
$x_1x_2x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_3x_2 + x_3x_1 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

ЧЕРНОВИК

$\cancel{x^3+ax^2+bx+c=0}$ , $x_1+x_2$ , $x_2+x_3$, $x_3+x_1$

$-a = x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1 = 2(x_1+x_2+x_3) = 26$
$\quad 12$

$a=-12$

$b = (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_3+x_2)(x_3+x_1)+(x_1+x_2)(x_1+x_3) =$

$= x_1x_2 + \cancel{x_2x_2}\ x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 +$

$+ x_1x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 =$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 =$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 + 3\underbrace{(x_1x_2+x_7x_3+x_2x_3)}_{7} =$

$-c = (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$ ⑤

$x_1+x_2 = 6-x_3$

$(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2) = \cancel{...}(6-x_2).$

⑤ $(6-x_3)(6-x_1)(6-x_2) =$

$(36-6x_1-6x_3+x_1x_3)(6-x_2) =$ $(36 - 6x_1 - 6x_3 + \cancel{...}6x_1x_2 - 36x_3 + 6x_2x_3$

$= 216 - 36x_2 - 36x_1 + \cancel{...} 6x_1x_2\ 36x_3 + 6x_2x_3$

$+6x_1x_3 - x_1x_2x_3 = 216 - 36(x_2+x_1+x_3) +$

$+6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) - x_1x_2x_3$

# ЧИСТОВИК

$\boxed{№3}$ Корнями уравнения $x^3-6x^2+7x-1=0$ являются числа $x_1, x_2, x_3$

По обобщённой теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7 \\ x_1x_2x_3=1 \end{cases}$$

$a, b, c$ - ?, корнями ур-я $x^3+ax^2+bx+c=0$ являются числа $x_1+x_2$, $x_2+x_3$, $x_3+x_1$?

По обобщённой теореме Виета:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=-a \quad (1) \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_3+x_1)(x_2+x_3)=b \quad (2) \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-c \quad (3) \end{cases}$$

(1) $-a = 2(x_1+x_2+x_3)=2\cdot 6=12$, $a=-12$

(2) $b = x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3 =$
$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3(x_1x_2+$
$+x_2x_3+x_1x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=$
$=36+7=43$, $b=43$

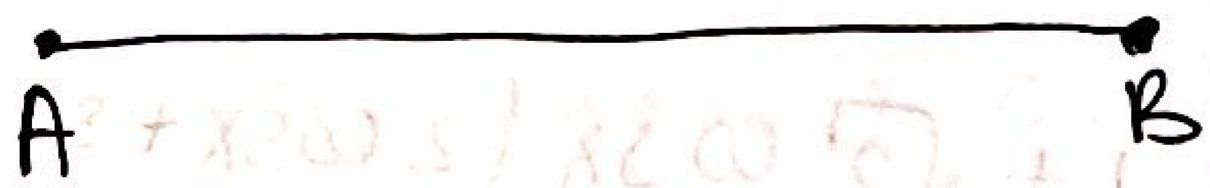
(3) $x_1+x_2+x_3=6$, $\quad x_1+x_2=6-x_3$, $x_1+x_3=6-x_2$, $x_2+x_3=6-x_1$

$-c=(6-x_3)(6-x_2)(6-x_1)=(6-x_1)(36-6x_2-6x_3+x_2x_3)=$
$=216-36x_2-36x_3+6x_2x_3-36x_1+6x_2x_1+6x_3x_1-x_1x_2x_3=$
$=216-36(x_2+x_3+x_1)+6\cdot(x_2x_3+x_2x_1+x_3x_1)-x_1x_2x_3=$
$=\cancel{216}-\cancel{216}+6\cdot 7-1=42-1=41$, $c=-41$

ОТВЕТ: $a=-12$, $b=43$, $c=-41$

ЧИСТОВИК

№2




Пусть велосипедист проезжает весь путь без остановок за $(2a)$ч., тогда т.к. скорость автомобилиста в 2 раза больше, то он преодолеет его в 2 раза быстрее, а т.е. за $a$ч. Обозначим X - автомоб., Y - велосипедист. Рассмотрим случаи кто выехал на час позже, кто сделал остановку. $a > 0$

| случаи | сделал остановку | выехал на час позже |
|---|---|---|
| 1 | Y ~~X~~ | X |
| 2 | Y | Y |
| 3 | X | Y |
| 4 | X | X |

С учетом того, что прибыли они одновременно, то можем высчитывать время от начала 14:00, до ~~конца~~ встречи и приравнивать ~~этих прибытия~~ ~~оба одновременно~~ → а т.е. конец пути

1.) $2 + 2a = a + 1$
$a = -1$, также невозможно

2.) $2 + 2a + 1 = a$
$a = -3$, также невозможно

3.) $2a + 1 = a + 2$, тогда приедут они через 3 часа, а т.е. в 17:00
$a = 1$

4.) $2a = a + 2 + 1$, тогда приедут они через 6 часов, а т.е. в 20:00
$a = 3$

ОТВЕТ: в 17:00 или в 20:00

ЧИСТОВИК

$\boxed{№1}$

$$1+\sqrt{2}\sin x\cdot(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x) = 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos x-2\sin x=\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos x-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\right) \ominus$$

Пусть $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, а $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда существует такое $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, что выполняется основное тригономет. тождество

$$\ominus\ \sqrt{5}\cdot(\cos\alpha\cdot\cos x-\sin\alpha\cdot\sin x)=\sqrt{5}\cos(x+\alpha)$$

$$2\cos x+\sin x=\sqrt{5}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right)=\sqrt{5}\cdot(\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\cdot\sin x)=\sqrt{5}\cdot\sin(\alpha+x)$$, имеем:

$$1+\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(x+\alpha)+\sqrt{2}\cdot\cos x\cdot\sqrt{5}\cdot\sin(\alpha+x) = 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{10}\left(\sin x\cdot\cos(x+\alpha)+\cos x\cdot\sin(\alpha+x)\right)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-1$$

$$\sqrt{10}\cdot\sin(x+x+\alpha)=\cos\left(2\cdot\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\sqrt{10}\cdot\sin(\alpha+2x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(\alpha+2x)=\sin 2x\cdot\cos\alpha+\cos 2x\cdot\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2x+\cos 2x\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x\right)$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x-\sin 2x)$$

ЧИСТОВИК

№1 продолжение

$\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{2}\sin 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x - \sin 2x) \Big| \cdot \sqrt{2}$

$2\sin 2x + 4\cos 2x = \cos 2x - \sin 2x$

$3\sin 2x = -3\cos 2x$

$\sin 2x = -\cos 2x$

$tg 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

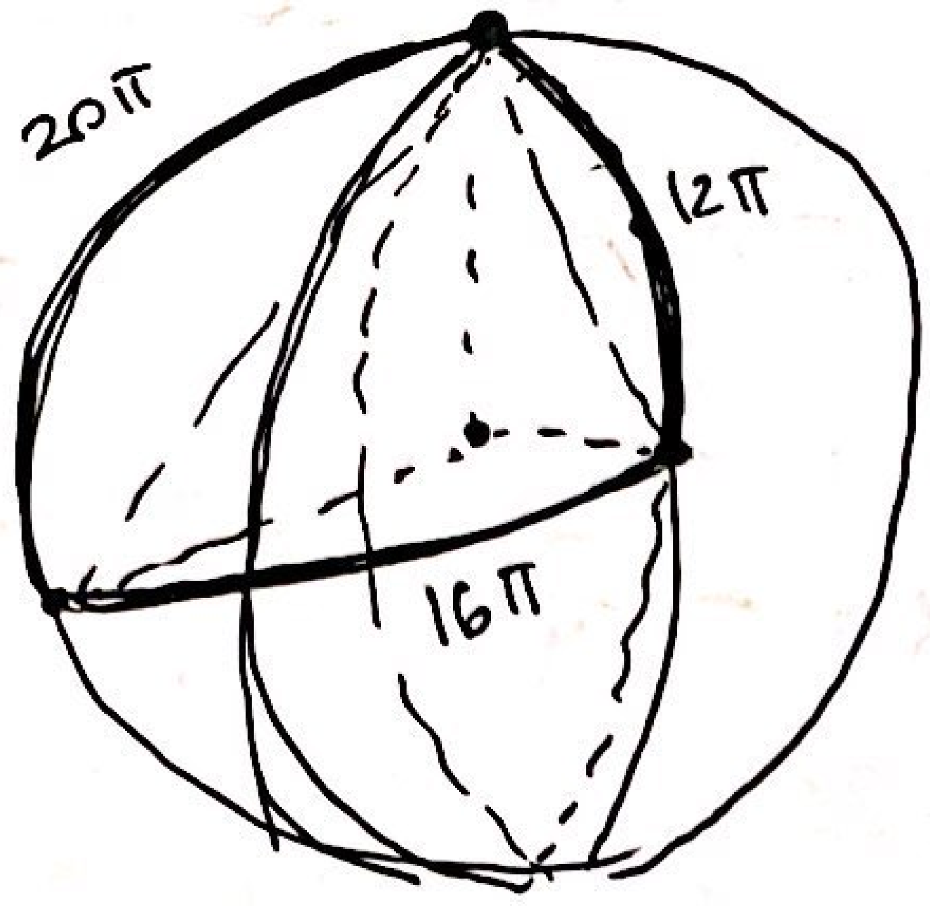
$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

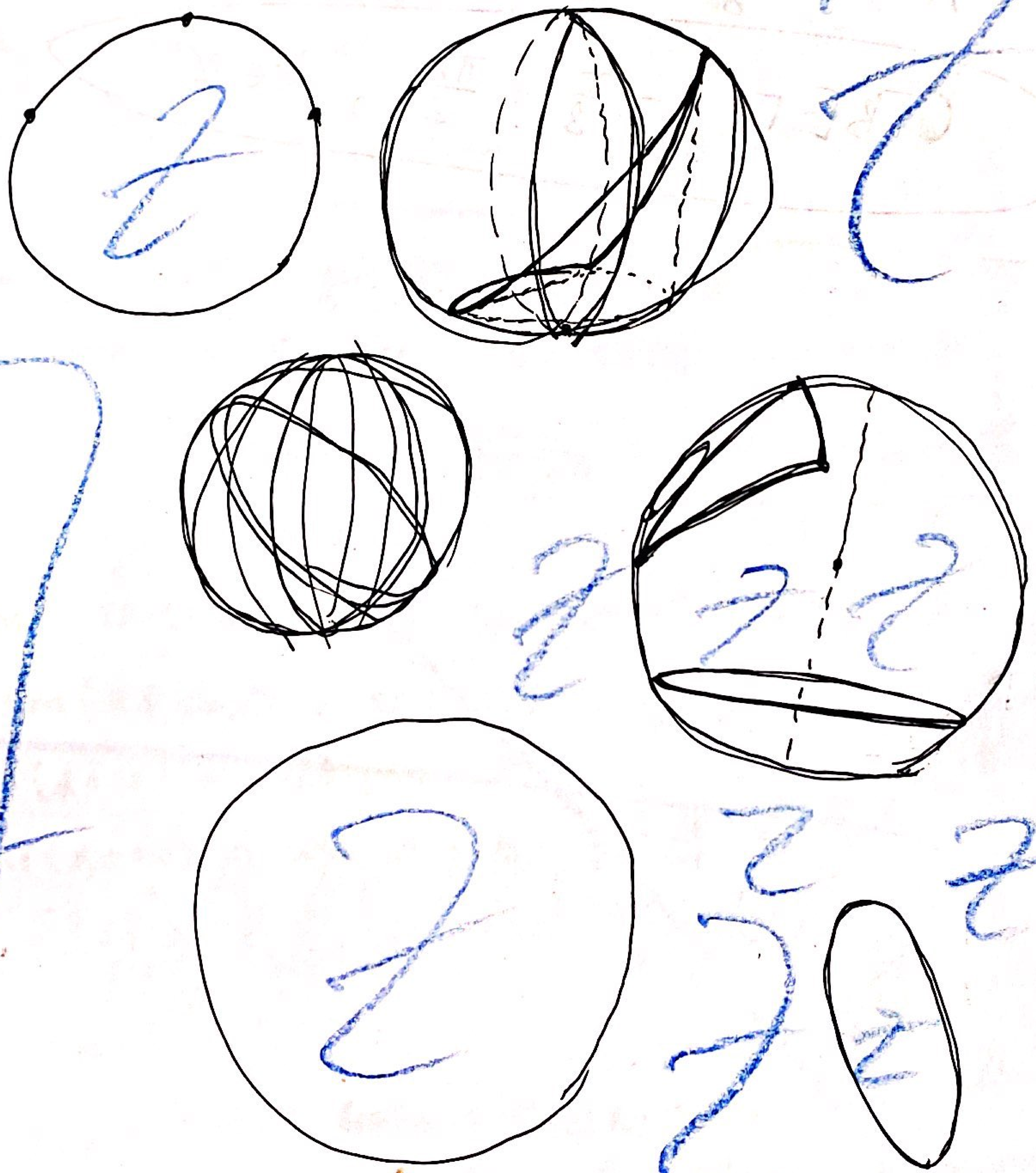
ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

ЧЕРНОВИК

№5

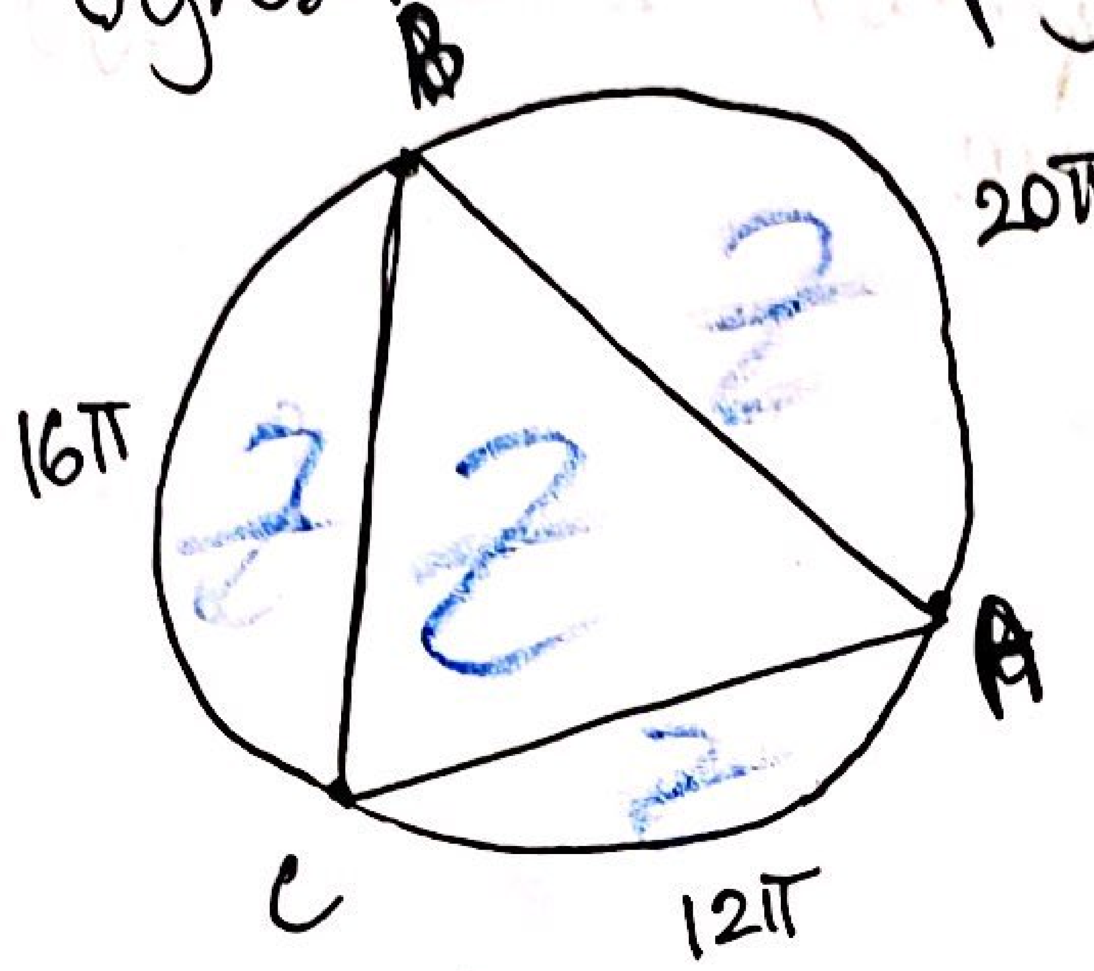
12π, 16π, 20π



№5 ЧИСТОВИК

Минимальный возможный периметр в таком случае достигается, когда все три точки лежат ~~[зачёркнуто]~~ на одной окружности, так, что все min расст. создают эту окр-сть:




Тогда длина окружности равна: $\underbrace{12\pi+16\pi}_{28\pi}+20\pi = 48\pi$

Если R-радиус окр-сти, то $2\pi R = 48\pi$

$R = 24$

$$\angle C = \frac{\cancel{20\pi}}{\cancel{48\pi}} \cdot \frac{360^\circ}{2} = \frac{5}{12} \cdot \cancel{360} \cdot \frac{1}{2} = 75^\circ$$

$$\angle A = \frac{16\pi}{48\pi} \cdot \frac{360^\circ}{2} = \frac{1}{3} \cdot 180 = 60^\circ$$

$$\angle B = \frac{12\pi}{48\pi} \cdot \frac{360^\circ}{2} = \frac{1}{4} \cdot 180 = 45^\circ$$

По Т sin для $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$$

$$BC = \cancel{2} \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 24\sqrt{3}$$

$$AC = \cancel{2} \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 24\sqrt{2}$$

$$AB = 2 \cdot 24 \cdot \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot 48 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot 48 = 12(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$P_{ABC} = 24\sqrt{3} + 24\sqrt{2} + 12(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

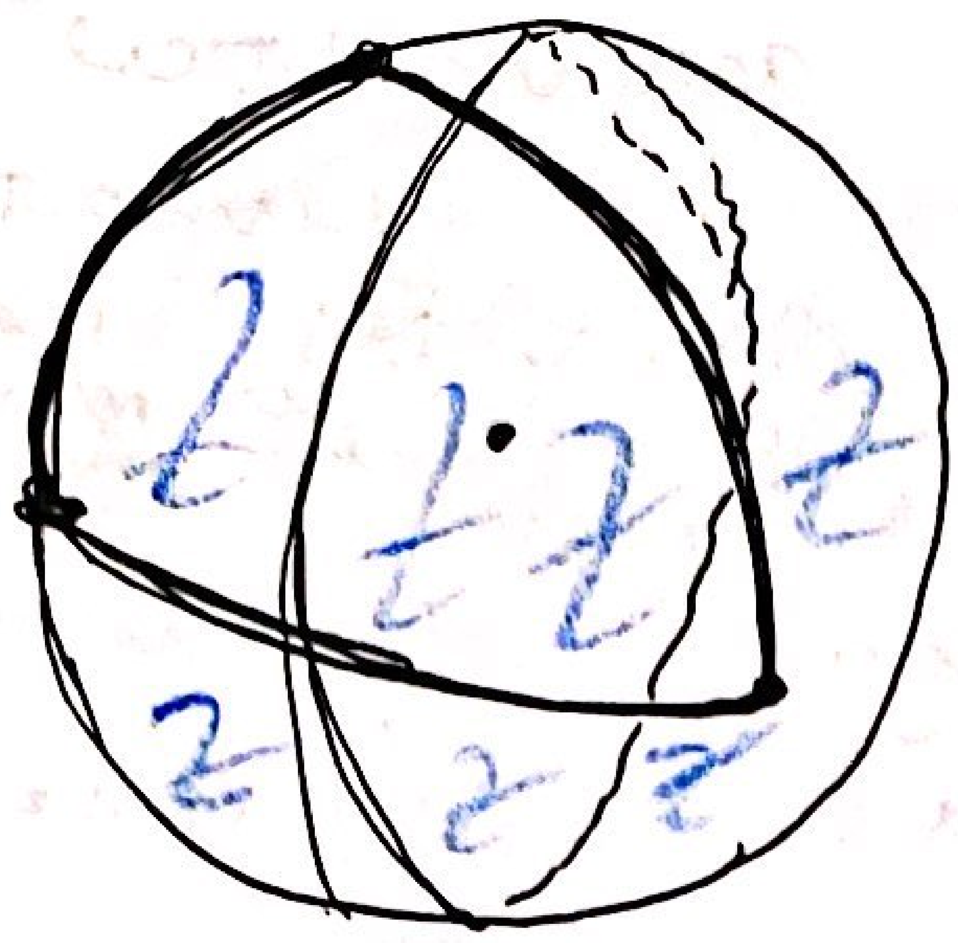
ОТВЕТ $24\sqrt{3} + 24\sqrt{2} + 12(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

* проаргументировал, почему достиг. min при таком раскладе на другом листе

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№5 продолжение

ЧИСТОВИК



В ином случае дуги будут составлять большую часть от окружности, а потому и стороны Δ-ка будут больше.