0 037639 730008

03-76-39-73
(117.2)

выход 13^{06} – 13^{11} бч

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

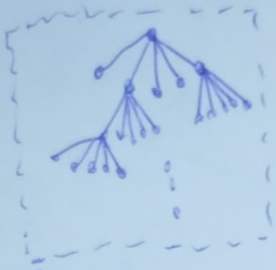
Середенко Юрия Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	~~7~~	~~8~~
03-76-39-73	105	21	0	21	21	21	21		

Оценка 99 баллов

I

Рассмотрим пакеты как вершины, а если какой-то в другом, то проведём между ними ребро (если 1-ый во 2-ом, а 2-ой в 3-ем, то 1-ый не в 3-ем). Тогда мы получим примерно такую картину



Но Циклов быть не может, а поэтому возьмём граф за вершину, которой является пакет, лежащий на кухне.

По условию мы получаем, что из любой вершины исходит либо 0, либо 5 ребер (ребро из родителя на потомка). При этом мы знаем, что в итоге 101 висячая вершина. ~~Все~~ ~~для~~ ~~...~~ Посмотрим на то, как строить этот граф: если мы какую-то вершину делаем такой, чтобы из неё исходило 5 ребер, то, по факту, по сравнению с тем, что было, добавилось 4 висячие вершины, но 5 вершин в принципе. Иначе добавляется 0 висячих и 0 вершин. Всего 101 висячая, изначально одна $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{101-1}{4}=25$ вершин в получившемся графе, у которых исходит 5 ребер $\Rightarrow 1+25\cdot5=126$ пакетов находится на кухне.

Ответ: 126 пакетов на кухне

III

Предположим, $p\neq2$ и $q\neq2 \Rightarrow p$ нечет и q нечет $\Rightarrow p^q-q^p+3$ нечет $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{p-1}$ нечет $\Rightarrow p=1$. Противоречие $\Rightarrow p$ или $q=2$.

- $p=2$, $q\neq2$ по ~~...~~ чётности

$2^q-q^2+3=2^1$

$q^2-1=2^q$

$(q-1)(q+1)=2^q \Rightarrow q-1=2^a \quad q+1=2^b$

$(q-1,q+1)=(q-1,2)=2 \Rightarrow q-1$ или $q+1=2 \Rightarrow q=3$

$2^3-3^2+3=2^{2-1}$ ✓

Чистовик

лист 2 из 3

• $q=2$

$p^2-2^p+3=2^{p-1}$

$p^2+3=2^{p-1}\cdot 3$

$p^2+3 \vdots 3$

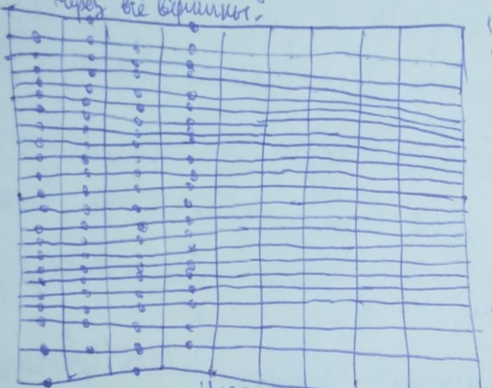
$p^2 \vdots 3 \Rightarrow p=3$

$3^2-2^3+3=2^{3-1}$ ✓

Ответ: $(p=2, q=3)$, $(p=3, q=2)$.

IV

Оставшиеся ребра в виде змейки, проходящей через все вершины.



и т.д. аналогично.

Пусть перекрестки – это вершины, а участки дорог – это ребра. Тогда в графе $23\cdot 10=230$ вершин и $\underset{\text{горизонтальные}}{23\cdot 9}+\underset{\text{вертикальные}}{22\cdot 10}=$ ~~[illegible]~~ 427 ребер

Чтобы граф оставался связанным, ему нужно хотя бы $230-1=229$ ребер $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно убрать ~~[illegible]~~ максимум $427-229=198$ ребер. Пример убранных ребер на рисунке. Убранные ребра помечены точкой. $\boxed{\text{Ответ: } 198}$

V

Докажем по индукции, что $b_i=2^{(i-2)^2}$ для $i>1$:

$$b_n=\frac{b_{n-3}\cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$$

База: $b_2=2^0$, $b_3=2^1$, $b_4=\frac{2\cdot 1^3}{1^3}=2^4$

Переход: $b_i=\frac{b_{i-3}\cdot b_{i-1}^3}{b_{i-2}^3}=2^{(i-5)^2+3(i-3)^2-3(i-4)^2}=2^{i^2-10i-18i+24i+25+\cancel{[illegible]}\,9\cdot 3-16\cdot 3}=$

$=2^{i^2-4i+4}=2^{(i-2)^2}$. ✓

$\Rightarrow b_{2023}=2^{2021^2}$

Ответ: 2^{2021^2}

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

03-76-39-73
(117.2)

Чистовик

лист 3 из 3

VI

Разделим буквы на кучи и переформулируем задачу так: "Из За ход можно забрать сколько-то камней из кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход". Кучи такие:

В	О	Р	Б	Ь	Е	И	Г	П	К	Ч
2	5	3	1	1	1	2	1	1	1	1

. Тактика за первого: первым ходом он забирает ~~[illegible]~~ три "О". Далее тактика такова: если соперник забрал x камней из кучи, то первый забирает x камней из той, которая соединена с нею (соединения на рисунке). Остаётся проблема с "О". С ней делаем так: если Б уменьшили на 1, то Р уменьшаем на 1 и соединяем О и Р. Аналогично, если Р−1, то Б−1. Если Р−2, то делаем О−2 и наоборот. Если Р−3, то О−1 и наоборот. Оставшиеся 2 числа всегда образуют пару.

В итоге мы получили стратегию, при которой если у второго есть ход, то и у первого будет ход => первый всегда победит.

Ответ: ~~первый~~ Алиса.

II

Ответ: 0. 601 - простое => при доказательстве того, что число делится, можно числитель и знаменатель не сокращать, так как 601 сократить не получится. ~~Получаем надо лишь доказать, что~~ Заметим, что $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$ => надо доказать, что $\left(\underbrace{\ldots3\cdot4\cdot\ldots\cdot400}+\underbrace{1\cdot2}\cdot\underbrace{5\cdot6\cdot\ldots\cdot400}+\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\underbrace{7\cdot8\cdot\ldots\cdot400}+\ldots+\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot398\ldots}\right)\vdots 601$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$$\frac{2(n^2+3n+3)(n^2+9n+20)+(n^3+n)(n^2+3n+6)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=\frac{2(n^4+12n^3+50n^2+87n+60)+(n^4+3n^3+11n^2+6n)}{}=$$

$$=\frac{3n^4+30n^3+111n^2+180n+120}{}=$$

$$n^4+10n^3+\cancel{37}n^2+60n+40$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cancel{\frac{1}{18}}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+k}=\frac{2n+k}{n(n+k)}$$

$$1+10n+37+40=$$

$$a+b=\frac{600}{601}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}=$$

$$=\frac{2n+2}{n(n+2)}=2\left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)$$

?

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\boxed{\frac{n+m}{nm}}$$

$$\frac{n+2n}{n\cdot 2n}=\boxed{\frac{3}{2n}}$$

$$n(n+1)(n+2)\ldots\ldots 400!$$

$$\frac{400!}{1\cdot 2}+\frac{400!}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{400!}{399\cdot 400}$$

400!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \stackrel{?}{=}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$$

$$\frac{23}{15} + \frac{1}{7} = \frac{176}{95}$$

$$\frac{176}{95} + \frac{1}{9} = \frac{176 \cdot 9 + 95}{95 \cdot 9} = \frac{1584}{855}$$

1 4 23 176 1584

$3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 400 + 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 400 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 400 + \dots$

$900 + 630 + 54 = 1584$

$\dots + 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 399 =$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 14 \\ \hline 56 \\ +\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

399 + 202

397 + 203

301 + 299

301 + 300

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)} =$$

$$= \frac{2n^2 + \dots}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{2(\dots) + \dots}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$$

$a(a+1) \stackrel{?}{=} b(b+1)$

601

$a^2 - b^2 = b - a$

$(a-b)(a+b) = b - a$

$a + b = 600$

601

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

пустой:

не пустой:

$141 - 23$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 400$

601-прост

— пакет

$n(n+1)$

23.

$x(y-1)+\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400} =>$

$+y(x-1)=$

$=230-33=197$ ребер

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$

$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} =$

$2n^2+6n+6=$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

$\boxed{p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}}$

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \ldots + \frac{1}{399 \cdot 400}$

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q = q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$

$\boxed{q=3}$

$p^2 - 3 = 2^{p-1}$

$p=3 \quad q=2$