0 871063 880003

87-10-63-88
(140.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Волгоград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ермакова Артёма Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
87-10-63-88	105	21	21	21	21	0	21	X	X

Оценка 85 (восемьдесят пять)

87-10-63-88 (140.2)

Чистовик

1	2	3	4	5	6

№1.

p, q – простые

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

если p и q не равны 2, то $p, q \geq 3$; p, q – нечётные, тогда левая часть нечётна, правая чётна, рав-во не достигается.

1. пусть $p = 2$

$2^q - q^2 + 3 = 2 \iff 2^q = (q-1)(q+1) \Rightarrow \begin{cases} q-1 = 2^a \\ q+1 = 2^{q-a} \end{cases} \Rightarrow q = 2^a + 1$ подставим во 2-е р-во

$2^a + 2 = 2^{q-a}$ ~~$\iff 2(2^{a-1}+1) = 2^{q-a}$~~

т.к. $q-1 = 2^a$, а $q+1 = 2^{q-a}$, то $2^{q-a} > 2^a \Rightarrow q-a > a$

$\Updownarrow$

$q - 2a > 0$

$2^{q-a} - 2^a = 2 \iff 2^a(2^{q-2a} - 1) = 2$

Выражение в скобках нечётно $\Rightarrow 2^{q-2a} - 1 = 1$, а $2^a = 2$.

Итого, $a = 1$, $q = 3$

$(p = 2; q = 3)$ – реш.

2. пусть $q = 2$, тогда $p \geq 3$ (иначе p чётно, левая ч. неч., а правая чётна)

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1} \iff p^2 - 1 = 2^{p-1}(2+1) - 4$

$(p-1)(p+1) = 4(3 \cdot 2^{p-3} - 1)$

т.к. p нечётно, то p либо 3, либо 1 по модулю 4. если

$p = 4k+1$, то $(p-1)(p+1) = 4k \cdot (4k+2) = 8k(2k+1) \vdots 8$

$p = 4k+3$, то $(p-1)(p+1) = (4k-2)(4k+4) \vdots 8$

$\Downarrow$

$4(3 \cdot 2^{p-3} - 1) \vdots 8 \iff 3 \cdot 2^{p-3} - 1 \vdots 2$

если $p > 3$, то $3 \cdot 2^{p-3}$ чётно, а -1 – нет $\Rightarrow$ не делится

тогда $p = 3$, проверим:

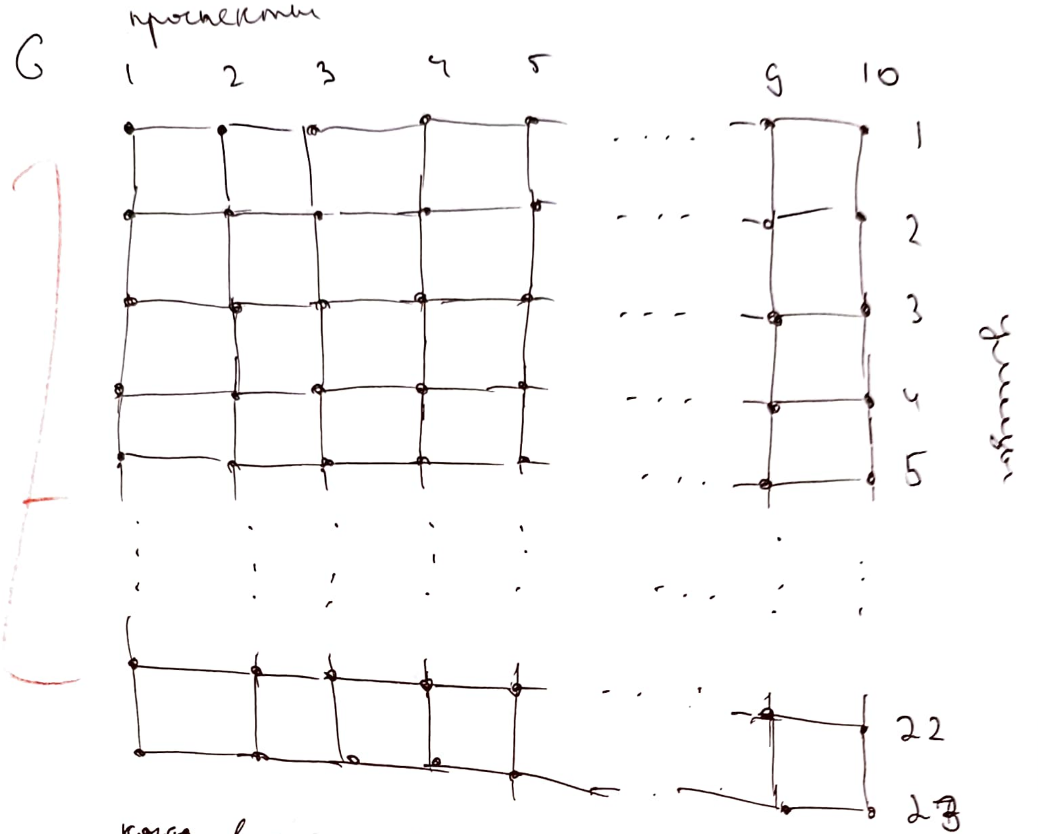
$(3-1)(3+1) = 4(3 \cdot 2^{3-3} - 1)$

$2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$ – верно $\Rightarrow (p = 3; q = 2)$ – реш.

Ответ: $(p = 3; q = 2)$; $(p = 2; q = 3)$

Чистовик

№2. рас-им граф G, вершинами которого явл. перекрёстки, а рёбрами - участки дорог



когда власти проводят дорожные работы, ~~то~~ они убирают ребро из графа. Задача эквивалентна нахождению наибольшего # рёбер n такого, что ~~можно~~ можно убрать n ~~рёбер~~ рёбер из графа G, сохранив связность

далее, перекресток i-ого ~~ул~~ проспекта и j-й улицы обозначаем $v_{i,j}$

Лемма:

для произвольного графа G верно соотношение: $|e| \geq |v| - k$, где e - мн-во рёбер, v - мн-во вершин, k - кол-во компонент связностей.

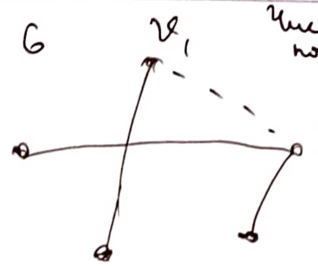
Док-во:

будем вести индукцию по $|e|$.

База: $|e| = 0$ верна, т.к. ~~$k=0$~~ $k = |v| : 0 \geq |v| - |v|$

Переход: $|e| \to |e| + 1$

Чистовик



посмотрим на граф G с $|e|+1$ ребром (если рёбер $|e|$, то ~~[illegible]~~ утверждение индукции верно) и $|v|$ вершинами.

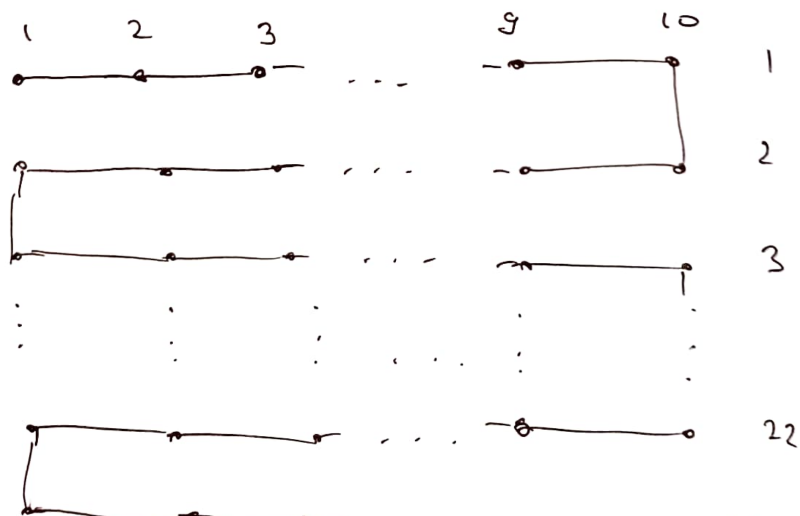
удалим какое-нибудь ребро, например, $v_1 v_2$.

тогда, в $G / \{v_1 v_2\}$ ровно $|v|$ вершин и $|e|$ рёбер. также будем считать, что получилось k компонент связности. Имеем: $|e| \geq |v| - k$. вернём $v_1 v_2$. если $v_1 v_2$ соединяло 2 компоненты связности, то $|e| \to |e|+1$, $k \to k-1$, $|v| \to |v|$. нер-во $|e|+1 \geq |v| - k + 1$ — верно. если же $v_1 v_2$ не соединяло 2 ком. связности, то $|e| \to |e|+1$, $k \to k$, $|v| \to |v|$ и утверждение верно. доказали.

~~Раз пол-ходом~~ Давайте удалим какие-то участки, сохранив связность. пусть осталось $|e_1|$ рёбер. тогда верно: $|e_1| \geq |v| - 1$, где $|v|$ — кол-во вершин в G. убедимся, что $|v| = 10 \cdot 23 = 230 \Rightarrow |e_1| \geq 229$

посчитаем # рёбер в G. оно равно $9 \cdot 23 + 22 \cdot 10 = 220 + 207 = 427$

но тогда, мы удалим не более чем $427 - 229 = 198$ рёбер

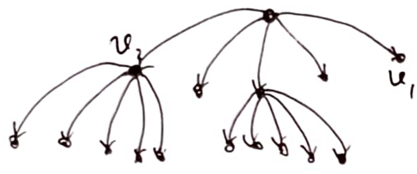


в качестве примера удалим ребра $v_{1,1} v_{1,2}$; $v_{2,1} v_{2,2}$; $v_{3,1} v_{3,2}$ ... $v_{9,1} v_{9,2}$, потом $v_{2,2} v_{2,3}$; $v_{3,2} v_{3,3}$ и т.д. оставим "змейку", тем самым удалив ровно $22 \cdot 9 = 198$ рёбер

№3. Чистовик

докажем, что # пустых пакетов p находится по формуле: $p=4k+1$, где k - количество непустых пакетов

посмотрим на дерево T:

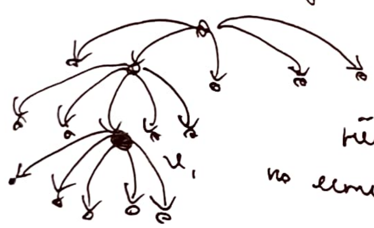


если пакет пустой, как v_1, то из него не выходит рёбер; если полный, как v_2, то из него выходит 5 рёбер

Теперь, будем вести док-во индукцией по k:

1. База $k=0$: единственная вершина дерева - пустой пакет, то есть имеется $4\cdot 0+1=1$ пустой пакет - верно.
2. Переход $k \to k+1$

посмотрим на дерево с $k+1$ непустыми пакетами: пусть в нём L пустых пакетов



посмотрим на непустой пакет v_1, такой, что все пакеты, которые в нём содержатся - пустые (такой точно есть, т.к. пакетов конечное #)

заменим v_1 на пустой пакет, тогда $L \to L-5+1=L-4$, а $k+1 \to k$. по предположению индукции: $L-4=4k+1 \Rightarrow L=4(k+1)+1$ ■

Тогда пусть имеется k непустых пакетов. по ранее доказанному: $101=4k+1 \Rightarrow k=25$, а всего пакетов $101+25=126$

Ответ: 126

№4.

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

~~докажем, что $b_n = 2^{\frac{(n+1)(n-4)}{2}+3}$ $\forall n \geq 4$~~

~~будем вести индукцию по n:~~

87-10-63-88
(140.2)

~~База: n=4,5,6~~ Чистовик

~~$n=4:\ b_4\, b_4 \cdot b_2^3 = b_1 \cdot b_3^3 \Leftrightarrow b_n \cdot 1 = 2 \cdot$~~

докажем, что $b_n = 2^{(n-2)^2}$ $\forall\, n \geq 4$

1. База: $n = 4, 5, 6$:

$n=4:\ b_4 \cdot b_2^3 = b_1 \cdot b_3^3 \Leftrightarrow b_4 = 2 \cdot 2^3 = 2^{(4-2)^2}$ - верно

$n=5:\ b_5 \cdot b_3^3 = b_2 \cdot b_4 \Leftrightarrow b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2^{12} \Rightarrow b_5 = 2^{(5-2)^2}$ - верно

$n=6:\ b_6 \cdot b_4^3 = b_3 \cdot b_5^3 \Leftrightarrow b_6 \cdot 2^{12} = 2 \cdot 2^{27} = 2^{(6-2)^2}$ - верно

2. Переход $\{4, 5, 6 \ldots n-1\} \to n$

считаем $n \geq 7 \Rightarrow n, n-2, n-3, n-1 \geq 4$. пользуясь предположением индукции и базой:

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_n \cdot 2^{(n-4)^2 \cdot 3} = \cancel{b}2^{(n-5)^2} \cdot \cancel{b}2^{(n-3)^2 \cdot 3}$

$b_n = 2^{n^2 - 10n + 25 + 3n^2 - 18n + 27 - 3n^2 + 24n + 48} =$

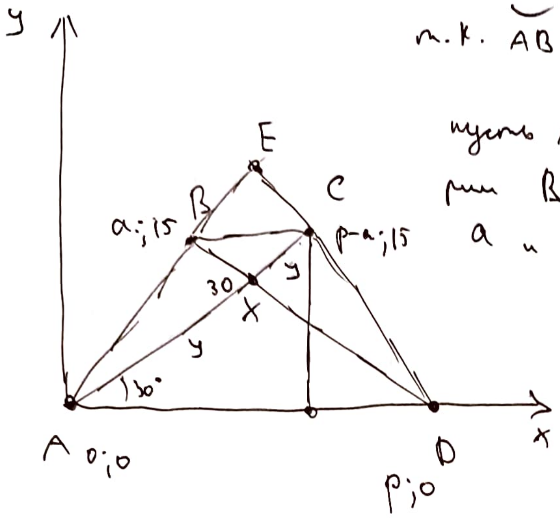
$= 2^{n^2 - 4n + 4} = 2^{(n-2)^2}$ - доказано

Т.к. $b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{2021^2}$

Ответ: 2^{2021^2}

№6. Чистовик

Введём систему координат, так, чтобы Ox совпало с прямой AD



т.к. $\overset{\smile}{AB} = 60^\circ$, то $\angle BCD = \angle CAD = 30^\circ$ (впис.)

пусть $A(0;0)$, $D(p;0)$; из симметрии B и C имеют абсциссы a и $p-a$ соотв.

1. Т.к. $\angle CAD = 30^\circ$, то C и B имеют ординату $30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \Rightarrow B(a;15)$; $C(p-a;15)$

2. т.к. $AC = 30$, то $(p-a)^2 + 15^2 = 30^\circ$

3. из симметрии E имеет абсциссу $p/2$. прямая AB: $y = \frac{15x}{a}$ при $x = p/2$: $y = \frac{15p}{2a} \Rightarrow$ высота AED из E равна $15p/2a \Rightarrow$ $S_{AED} = \frac{15p}{2a} \cdot p \cdot \frac{1}{2} = \frac{15p^2}{4a}$

4. т.к. $4BC = AD$, то $\frac{p-a-a}{p} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 4p - 8a \Rightarrow 8a = 3p$

5. $S_{AED} = \frac{30p^2}{8a} = \frac{30p^2}{3p} = 10p$

6. найдём AD: $\triangle BCX \sim \triangle AXD$ ($X = AC \cap BD$). пусть $|XC| = y \Rightarrow |XA| = 4y$; $4y + y = 30 \Rightarrow y = 6$.

7. $\angle BCX = \angle CBX = 30^\circ \Rightarrow \angle BXC = 120^\circ$.

по т. косинусов в $\triangle BCX$: $|BC|^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(120^\circ) =$ $= 36 \cdot 2 + 36 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 36 \Rightarrow |BC| = 6\sqrt{3} \Rightarrow |AD| = 24\sqrt{3} = p$

8. $S_{AED} = 10p = 240\sqrt{3}$

Ответ: $240\sqrt{3}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

87-10-63-88
(140.2)

№5.

Чистовик

Приведём стратегию за Алису.

1. сперва она удаляет все буквы О.

2. действует по схеме: если Б уменьшил кол-во различных букв, то Алиса тоже уменьшает.

если Б не уменьшил, то и А не уменьшила.

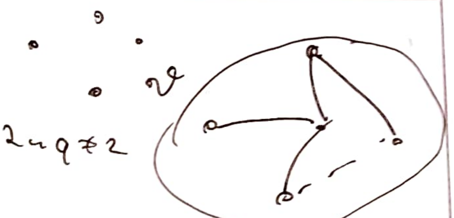
ивается

Черновик

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

$\cancel{p+3 = 2^{p-1}}$

$\cancel{p^q = p}$ или $\cancel{p = q}$ $p \neq 2$ и $q \neq 2$



1. $p = 2$

$\cancel{2^q - q^2 + 3 = 2^{p-1}}$ $\cancel{2^q - 2^2 = q^2 + 3 \Rightarrow 2^q = q^2 + 5}$ $e \geq v + k$

$2^q - q^2 + 3 = 2 \Rightarrow 2^q = q^2 - 1$ $2^q = (q-1)(q+1) \Rightarrow q-1 = 2^a$

$q+1 = 2^{q-a}$

$q = 2^a + 1$ $2q = 2^a + 2^{q-a}$

$a = 1$

2. $q = 2$ $2^a + 2$ – ст. дв. $= 2(2^{a-1}+1)$

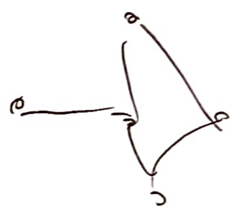
$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 + 3 = 2^p + 2^{p-1} = 2^{p-1}(2+1)$ p-неч.

$p^2 + 3 = 3 \cdot 2^{p-1}$

$p^2 \vdots 3 \Rightarrow p^2 \vdots 9$ $p = \cancel{9}g^2$

$3g^2 + 1 = 2^{p-1}$

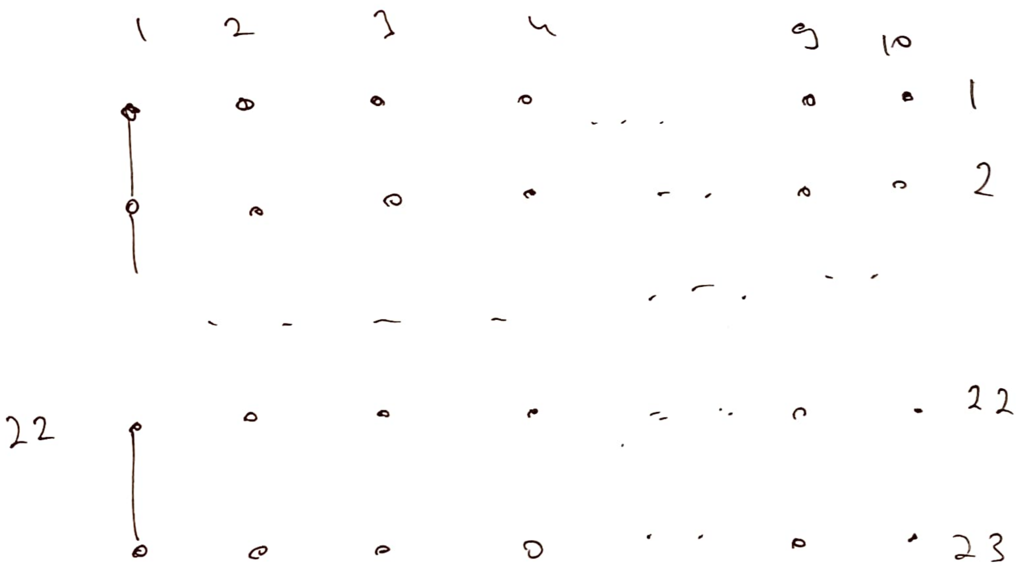


$p = 3$

$e \geq v + k$

$p^2 - 1 = 3 \cdot 2^{p-1} - 4$

$(p-1)(p+1) = \cancel{2^4(3 \cdot 4 - 1)}$ $4(3 \cdot 2^{p-3} - 1)$

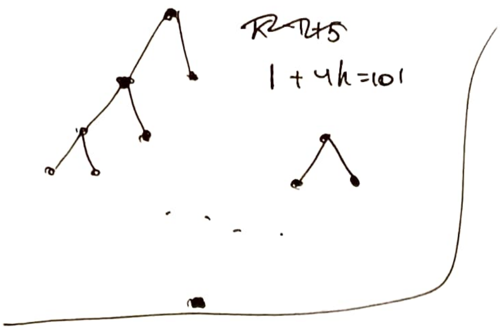


$10 \cdot 22 + 9 \cdot 23 = 220 + 207 = 427$

$\cancel{427}\ e \geq 2\cancel{70}30 + 1$

$e \geq 231$

$23 \cdot 9 = 207$



3 4 5 6 7

3 6 10 15 21 28

4 5 6 7 8 9

$b_n = \frac{(n-5+3)\cdot n-4}{2}$ +3 n^2+n-6

$\frac{(n+2)(n-3)}{2}$

n

$\frac{(n+1)(n-4)}{2}+3$

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2$

n 4 → 3

n+1 5 → 6

n+2 6 → 10

n+3 7 → 15

$b_4 \cdot b_2^3 = b_1 \cdot b_3^3$

n=4 $b_4 \cdot 1 = 2 \cdot 8 \Rightarrow b_4 = 2^3 = b_4$

$b_n = 2^{\frac{(n+1)(n-4)}{2}+3}$

n=5

$b_5 \cdot b_3^3 = b_2 \cdot b_4^3$ для $n \geq 4$

$b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2^9 \Rightarrow b_5 = 2^6$

n=6.

$b_6 \cdot b_4^3 = b_3 \cdot b_5^3 \Leftrightarrow b_6 \cdot 2^9 = 2 \cdot 2^{18} \Rightarrow b_6 = 2^{10}$

$b_7 \cdot b_5^3 = b_4 \cdot b_6^3 \Leftrightarrow b_7 \cdot 2^{18} = 2^3 \cdot 2^{30} \Rightarrow b_7 = 2^{15}$

$b_8 \cdot b_6^3 = b_5 \cdot b_7^3 \Rightarrow b_8 \cdot 2^{30} = 2^6 \cdot 2^{45} \Rightarrow b_8 = 2^{21}$

$n \geq 4:\ b_n = 2$

$b_{n+1} = b_n \cdot 2^{n-2}$

$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot 2^{n-1}}$

$b_7 = b_6 \cdot 2^5$

$\cancel{b_{n+n}}\ b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_n \cdot 2^{\left(\frac{(n-1)(n-6)}{2}+3\right)\cdot 3} = 2^{\frac{(n-2)(n-7)}{2}+3} \cdot 2^{\left(\frac{n(n-5)}{2}+3\right)\cdot 3}$

$b_n = 2^{\frac{n^2-9n+14}{2}+3+\frac{3n^2-15n}{2}+\cancel{9}-\frac{3n^2-21n+18}{2}-\cancel{9}} =$

$= \frac{n^2-9n+14+\cancel{3n^2}-15n-\cancel{3n^2}+21n-18}{2}+3 = \frac{n^2-3n-4}{2}+3=$

$\cancel{b}\ b_4 \to \cancel{4}\ 2^4$

$b_5 \cdot b_3^3 = b_2 \cdot b_4^3 \Leftrightarrow b_5 \cdot 2^3 = 1 \cdot 2^{12} \Rightarrow b_5 = 2^9$

$b_6 \cdot b_4^3 = b_3 \cdot b_5^3 \Leftrightarrow b_6 \cdot 2^{12} = 2 \cdot 2^{27} \Rightarrow b_6 = 2^{16}$

$b_7 \cdot b_5^3 = b_4 \cdot b_6^3$ | $b_7 \cdot 2^{27} = 2^4 \cdot 2^{48}$

$b_n = 2^{(n-2)^2}$

11 типов букв

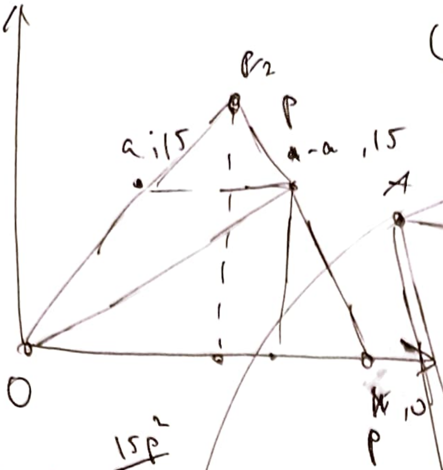
~~Покорила Воробьёвы горы~~

Пкри Врбьёвы гры

Пки Вбьёвы гы

5; 3; 2; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1

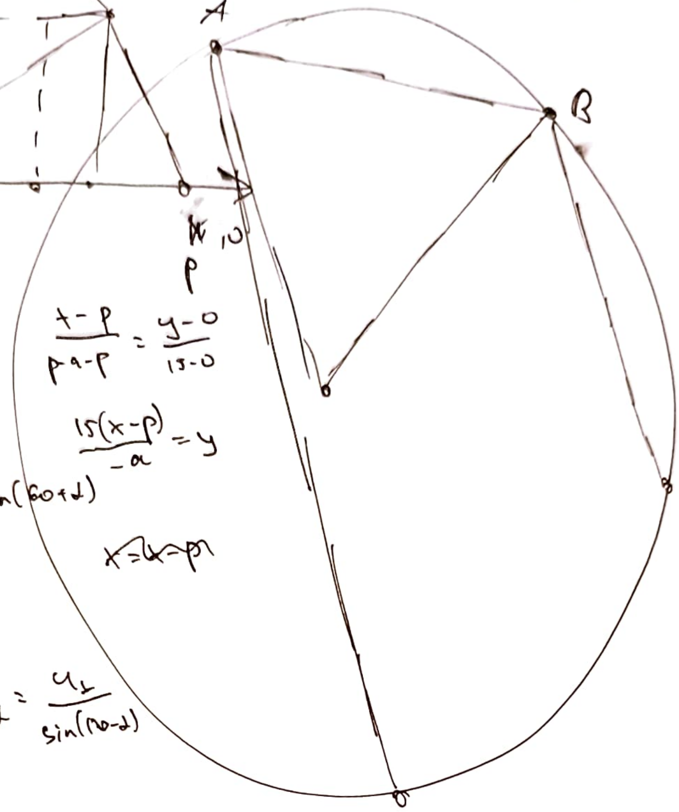
5 о
3 р
2 ы
2 в
б
ь
е
г
п
к
и



$(p-a)^2+15^2=30^2$

$p-a-a=\boxed{p-2a}=p/4$

$4p-8a=p$



$\frac{15x}{a}=y$ $\frac{15p^2}{4a}$

$\frac{x-p}{pa-p}=\frac{y-0}{15-0}$

$\frac{15p}{2a}\cdot p\cdot\frac{1}{2}=$

$\frac{15(x-p)}{-a}=y$

$4\sin\alpha=\sin(60+\alpha)$

$x=4x-p$

$\frac{x}{a}=\frac{x-p}{-a}$

$x=p-x$

$p=2x$

$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{4x}{\sin(120-\alpha)}$

Sin

$\frac{4x}{\sin}$

$6^2+6^2-2\cdot36\cdot\cos(120^\circ)$

$6^2+6^2+2\cdot36\cdot\frac{1}{2}$ $2\cdot36$

$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(30)}$

$\frac{x}{\sin\alpha}=2a$

$S=\left(\frac{5}{4}a\right)^2\cdot\sin(60+2\alpha)$