



34-25-27-66  
(121.2)



# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва  
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Локманова Дамана Юрьевна  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
34-25-27-66	95	20	20	20	20	15	X	X	X

34-25-27-66  
(121.2)

Черновик

смп. 1

N1

АА  $1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2(x - \frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2} (2 \cos^2 x - \sin x \cos x - \sin x \cos x - 2 \sin^2 x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2} (2 \cos 2x - \sin 2x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

$2\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

~~3\sqrt{2} \cos 2x - 3\sqrt{2} \sin 2x = 0~~  $3 \cos 2x - 3 \sin 2x = 0$

$\tan 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

N2



$v_0 = x$   
 $v_1 = 2x$

~~$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$~~

~~$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + 3$~~

$\frac{1}{2x} + 1 = \frac{1}{x} + 2$

$-1 = \frac{1}{x} - 1$

~~$x = \frac{1}{6}$~~

~~$\frac{1}{x} = 3$~~

~~$x = \frac{1}{3}$~~

~~$t = \frac{1}{x} = 3$~~

~~$13 \times 3 = 16t$~~

$t = \frac{1}{6} = 6t$

$13 + 6 = 19t$

$\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{2x} + 2$

$13 + 3 = 16t$

~~$\frac{1}{x} = 2$~~   ~~$x = \frac{1}{2}$~~   $x = \frac{1}{2}$

Ручка  
Линейка

SB (двухного меча)

Черновик

№3

Стр. - 2

$$x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0 : x_1, x_2, x_3$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 : x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) \\ b = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_3 + x_1) + (x_3 + x_1)(x_1 + x_2) \\ a = 2(x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 2 \cdot 6 = 12$$

$$b = 3x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 3x_2 x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 + 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$c = (x_1 + x_2)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_3^2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3^2 =$$

$$= x_1(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + x_3(x_1 x_3 + x_1 x_2 + x_2 x_3) + x_2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 1 = 6 \cdot 4 - 1 = 41$$

$$\begin{aligned} b &= x_1(x_2 + x_3 + x_1) + x_2(x_1 + x_3 + x_2) + x_3(x_1 + x_2 + x_3) + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 6^2 + 4 = 41 \end{aligned}$$

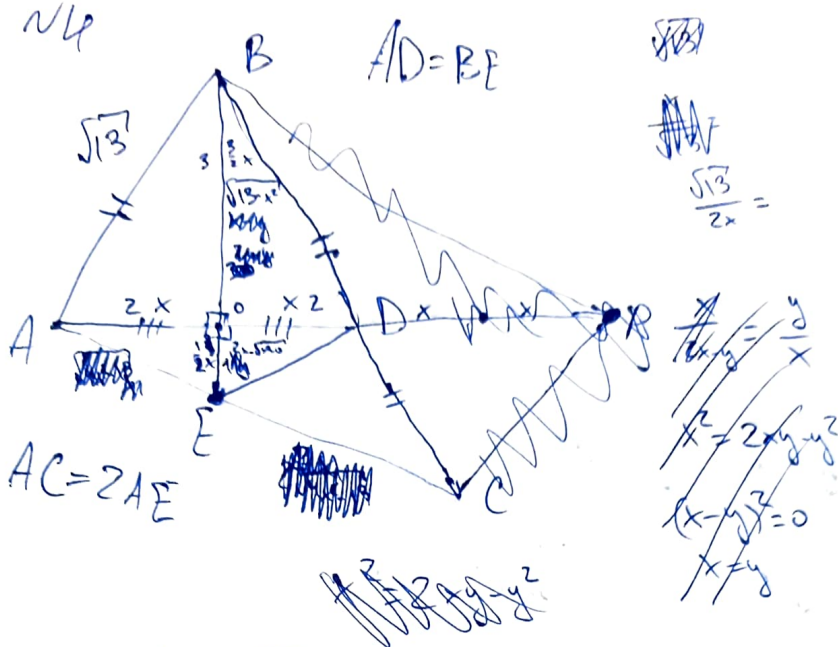
$$x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)x - x_1 x_2 x_3 = 0$$

34-25-27-66  
(121.2)

Черновик

стр. 3



~~$x^2 + (2x - \sqrt{3-x})^2 = \dots$~~

$S_{ABE} = S_{BDE} = S_{CDE} = \frac{S_{ABC}}{3}$

$13 = x^2 + \frac{9}{4}x^2$

$S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{S_{ABC}}{2}$

$x^2 = 4$

$x = 2$

$\frac{S_{ADE}}{2} = \frac{S_{ABE}}{12} = S_{AOE} = S_{DOE}$

$S_{AOB} = S_{BOD} = \frac{S_{ABC}}{4}$

$\frac{S_{AOB}}{S_{AOE}} = \frac{BO}{OE} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = 3$

$S_{ABC} = \frac{24}{2} \cdot 3 = 12$



Черновик

$n \in \mathbb{N}$

$N \in \mathbb{N}$

$T = P_1 < P_2 < \dots < P_k = N$

$P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 \cdot P_7 \cdot P_8 \cdot P_9 \cdot P_{10} \cdot P_{11} \cdot P_{12} \cdot P_{13} \cdot P_{14} \cdot P_{15} \cdot P_{16} \cdot P_{17} \cdot P_{18} \cdot P_{19} \cdot P_{20} \cdot P_{21} \cdot P_{22} \cdot P_{23} \cdot P_{24} \cdot P_{25} \cdot P_{26} \cdot P_{27} \cdot P_{28} \cdot P_{29} \cdot P_{30} \cdot P_{31} \cdot P_{32} \cdot P_{33} \cdot P_{34} \cdot P_{35} \cdot P_{36} \cdot P_{37} \cdot P_{38} \cdot P_{39} \cdot P_{40} \cdot P_{41} \cdot P_{42} \cdot P_{43} \cdot P_{44} \cdot P_{45} \cdot P_{46} \cdot P_{47} \cdot P_{48} \cdot P_{49} \cdot P_{50} \cdot P_{51} \cdot P_{52} \cdot P_{53} \cdot P_{54} \cdot P_{55} \cdot P_{56} \cdot P_{57} \cdot P_{58} \cdot P_{59} \cdot P_{60} \cdot P_{61} \cdot P_{62} \cdot P_{63} \cdot P_{64} \cdot P_{65} \cdot P_{66} \cdot P_{67} \cdot P_{68} \cdot P_{69} \cdot P_{70} \cdot P_{71} \cdot P_{72} \cdot P_{73} \cdot P_{74} \cdot P_{75} \cdot P_{76} \cdot P_{77} \cdot P_{78} \cdot P_{79} \cdot P_{80} \cdot P_{81} \cdot P_{82} \cdot P_{83} \cdot P_{84} \cdot P_{85} \cdot P_{86} \cdot P_{87} \cdot P_{88} \cdot P_{89} \cdot P_{90} \cdot P_{91} \cdot P_{92} \cdot P_{93} \cdot P_{94} \cdot P_{95} \cdot P_{96} \cdot P_{97} \cdot P_{98} \cdot P_{99} \cdot P_{100} = N^2$

z

$\sigma(N) =$

z

$1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313$

z

$\alpha_1 \cdot \alpha_2^2 \cdot \alpha_3^{312}$

$P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 \cdot P_7 \cdot P_8 = N^2 : N = P_8$

z

$N = P_{1878}$

z

$1878 = 37 \cdot 61$

$1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313$

$N = \alpha_1^{36} \cdot \alpha_2^{60}$

$N^3 = \alpha_1^{108} \cdot \alpha_2^{180}$

18729

$N = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^{312}$

$N = \alpha_1 \alpha_2^{625}$

$N = \alpha_1^{1878}$

$N^3 = \alpha_1^{1878 \cdot 3}$

$\sigma(N^3) = 181 \cdot 109$

$N = \alpha_1^5 \alpha_2^{312}$

$N = \alpha_1 \alpha_2^{938}$

$\sigma = 3 \cdot 1878 + 1 = 5635$

$N = \alpha_1^{1874}$

$\sigma = 4 \cdot 4 \cdot 937; 1876 \cdot 4; 18 \cdot 937; 4 \cdot 2815; 1877 \cdot 3 + 1$

$N = P_{1874}$

$N = \alpha_1^{1876}$

$\sigma = 1876 \cdot 3 + 1 = 5629$

34-25-27-66  
(121.2)

Черновик

стр. 5

$$\begin{array}{r}
 187 \\
 \times 109 \\
 \hline
 18723 \\
 18700 \\
 \hline
 203927
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 834 \\
 \times 28 \\
 \hline
 6672 \\
 16680 \\
 \hline
 23352
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 837 \\
 \times 16 \\
 \hline
 5022 \\
 13392 \\
 \hline
 13392
 \end{array}$$



2 2 2 2

Иванов Иван Иванович

Числовик

N1

$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2(x - \frac{\pi}{8})$$

$$\sqrt{2} (2 \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x) = 2 \cos^2(x - \frac{\pi}{8}) - 1$$

$$\sqrt{2} (2 \cos 2x - \sin 2x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} (2 \cos 2x - \sin 2x) = \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$4 \cos 2x - 2 \sin 2x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$3 \cos 2x = 3 \sin 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

N2

Пусть  $x$  км/ч - скорость велосипедиста,  
а  $2x$  км/ч - скорость мотоциклиста,  
 $S$  км - расстояние между А и В.

Скорее, если остановку на 2 часа делает велосипедист  
неподходяют:

$$\frac{S}{x} + 2 = \frac{S}{2x} + 1 \quad ; \quad \frac{S}{x} + 2 + 1 = \frac{S}{2x}$$

т.к.  $x < 0$ , противоречит условию

№2 <sup>метровик</sup> шириной, если велосипедист выезжает на час позже: стр. 7

$$\frac{S}{x} + 1 = \frac{S}{2x} + 2$$

$$\frac{S}{2x} = 1, x = \frac{S}{2}$$

$$\frac{S}{x} + 1 = \frac{S}{\frac{S}{2}} + 1 = 3ч, 13 + 3 = 16ч$$

широкой, если мотоциклист выезжает на час позже:

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{2x} + 1 + 2$$

$$\frac{S}{2x} = 3, x = \frac{S}{6} \Rightarrow \frac{S}{x} = \frac{S}{\frac{S}{6}} = 6ч$$

$$13 + 6 = 19ч$$

Ответ: если первым выезжает велосипедист - ~~13ч~~ <sup>16ч</sup>,  
если первым выезжает мотоциклист - 19ч

№3

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0, x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

аналогично для  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0!$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_3 + x_1 = -a \\ (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_3 + x_1) + (x_3 + x_1)(x_1 + x_2) = b \\ (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -c \end{cases}$$



числовых

№3

$$\Rightarrow a = -2(x_1 + x_2 + x_3) = -2 \cdot 6 = -12$$

$$b = 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$$

$$= x_1(x_1 + x_2 + x_3) + x_2(x_1 + x_2 + x_3) + x_3(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 6^2 + 7 = 43$$

$$c = -(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1^2)(x_3 + x_1) =$$

$$= -(2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1) =$$

$$= -(x_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_2(x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3) + x_3(x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) - x_1x_2x_3) =$$

$$= -((x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3) =$$

$$= -(6 \cdot 7 - 1) = -41$$

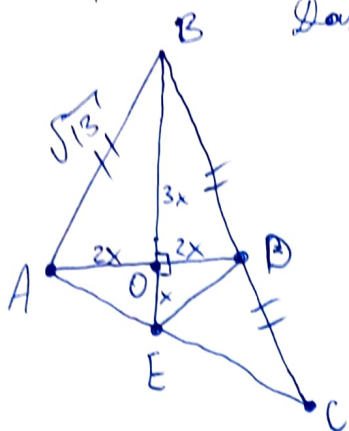
$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - 12x^2 + 43x - 41$$

$$\text{Ответ: } a = -12, b = 43, c = -41$$

Чистовик

стр. 8

НЧ



Дано:  $AD = BE$ ,  $AD \perp BE$ ,  $BD = DC$ ,  
 $BE$  — медиана,  $AB = \sqrt{3}$

Пусть  $O = AD \cap BE$

~~ВО~~

в  $\triangle ABD$ ,  $BO$  — высота и медиана  
 $\Rightarrow \triangle ABD$  —  $\text{м}\triangle$ ,  $AB = BD$  и  $AO = OD$

$\triangle AOE = \triangle DOE$  ( $AO = OD$ ,  $\angle AOE = \angle DOE$ ,  $OE$  — общ.)

$\triangle ABE = \triangle DBE$  ( $AB = BD$ ,  $AE = ED$ ,  $BE$  — общ.)

в  $\triangle CBE$ ,  $ED$  — медиана  $\Rightarrow S_{BED} = S_{CED}$

$$S_{BED} = S_{CED} = S_{ABE} = \frac{S_{ABC}}{3}$$

в  $\triangle ABC$ ,  $AD$  — медиана  $\Rightarrow S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{S_{ABC}}{2}$

$$S_{ADE} = S_{ADC} - S_{CED} = \frac{S_{ABC}}{2} - \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{S_{ABC}}{6}$$

$$\frac{BO}{OE} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{S_{ABC}}{2}}{\frac{S_{ABC}}{6}} = 3$$

Пусть  $OE = x$ ,  $BO = 3x$  тогда  $BO = 3x$ ,  $AO = OD = 2x$

$$\sqrt{3}^2 = 4x^2 + 9x^2$$

$$x = 1$$

$$S_{ABC} = 3 \cdot S_{ABE} = 3 \cdot \frac{2x \cdot 4x}{2} = 12x^2 = 12$$

Ответ:  $S_{ABC} = 12$ .

числовик

N5

$$1 = p_1 < p_2 < \dots < p_k = N$$

$$N = p_1 \cdot p_k = p_2 \cdot p_{k-1} = p_3 \cdot p_{k-2} = \dots = p_n \cdot p_{k-n+1}$$

$$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2, \text{ если } \cancel{N} \sigma(N) > 1879$$

$$\text{то } \cancel{N} N \geq p_{1880}$$

$$\text{м.к. } p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} = (p_3 \cdot p_{1877}) \cdot (p_4 \cdot p_{1876})$$

$$p_3 \cdot p_{1877} \leq p_{1879} \text{ и } p_4 \cdot p_{1876} \leq p_{1879}$$

$$\Rightarrow \sigma(N) \leq 1879$$

$$\text{при } \sigma(N) = 1879 \quad N = p_{1879} \quad 1879 = 37 \cdot 61$$

$$\left[ \begin{array}{l} N \neq d, \text{ если число } N \text{ имеет вид } d_1^{b_1} \cdot d_2^{b_2} \cdot \dots \cdot d_{mp}^{b_{mp}} \\ \text{то } \sigma(N) = (b_1+1)(b_2+1) \dots (b_{mp}+1) \end{array} \right]$$

$$N = d_1^{36} \cdot d_2^{60} \text{ или } N = d_3^{1878}$$

$$\sigma(N^3) = 109 \cdot 181 \text{ или } \sigma(N^3) = 1878 \cdot 3 + 1$$

$$\text{при } \sigma(N) = 1878 \quad N = p_{1878} \quad 1878 = 2 \cdot 3 \cdot 313$$

$$N = d_1^2 \cdot d_2^{312} \quad \cancel{N} \text{ или } N = d_4^5 \cdot d_5^{312} \text{ или } N = d_6^2 \cdot d_7^{625}$$

$$\text{или } N = d_8^{938} \text{ или } N = d_{10}^{1877}$$

$$\sigma(N^3) = 4 \cdot (1 \cdot 3 + 1) \cdot (2 \cdot 3 + 1) \cdot (312 \cdot 3 + 1) = 28 \cdot 934 \text{ или}$$

$$\sigma(N^3) = 16 \cdot 934 \text{ или } \sigma(N^3) = 7 \cdot 1876 \text{ или}$$

N5 числовая

стр. 11

$$\text{или } \sigma(N^3) = 4 \cdot 2815 \quad \text{или } \sigma(N^3) = 1877 \cdot 3 + 1$$

$$\text{или } \sigma(N) = 1877 \quad N = P_{1877}$$

$$N = B_{1877}^{1876}, \quad \sigma(N^3) = 1876 \cdot 3 + 1$$

Ответ: 18729; 5635; 26236; 14992; 13132;  
11260; 5632; 5629