0 914335 970009

91-43-35-97
(117.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Безрука Александра Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
91-43-35-97	105	21	–	21	21	21	21	X	X

Оценка 99 баллов.

99 (девяносто девять)

91-43-35-97 (117.1)

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

p и q – прост

~~$p=q$~~

~~$p^p - p^p + 3 = 2^{p-1}$~~

~~$3 = 2^{p-1}$~~

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

Если p – нч и q – нч, то

нч – нч + нч = ч

нч ≠ ч

$p = 7$ или $q = 7$

Если $p = 7$, ~~так~~ и p – прост ⇒

⇒ $p = 2$

$q = 2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

~~$p^2 + 3 = 3(2^{p-1})$~~

$p^2 - 2^p = 2^{p-1} - 3$

$\sqrt{2} < 1{,}41$

$p^2 - 2^p < 1$ при $p > 3$

$p = 3$ или $p = 2$

$9 - 8 = 4 - 3$

$1 = 1$ $\quad 4 - 4 \neq 2 - 3$

$2^q - q^2 + 3 = 2^1$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q + 1 = q^2$

$(\sqrt{2} - 1)q > 0{,}41q$

$q > 3$

$0{,}41q > 1{,}23 > 1$

⇓

$(\sqrt{2} - 1)q > 1$

⇓

$q^2 - 2^q = 1$ $\quad (q+1)^2 - 2^{q+1} \neq 1$

~~$2^q \neq q^2$, при $q = 1$~~

~~$2^q - q^2 = -1$, при $q = 3$~~

~~при $q > 3$ $\quad 2^q - q^2 < -1$~~

~~$q^2 - 2^q > 1$~~

~~База $q = 5$, $5^2 - 2^5 = 0$~~

$q = 2$, $4 - 4 = 0 \neq 1$

$q = 3$, $9 - 8 = 1$

$q = 4$, $16 - 16 = 0 \neq 1$

$q = 5$, $25 - 32 \neq 1$

$q = 6$, $36 - 64 < 1$

$(\sqrt{2}q - q - 1)(\sqrt{2}q + q + 1) ? 0$

$\sqrt{2}q - q - 1 ? 0$

$(\sqrt{2} - 1)q ? 1$

при $q > 3$ $\quad q^2 - 2^q < 1$

База: $q = 4$, $4^2 - 2^4 = 0 < 1$

Шаг: $q^2 - 2^q < 1$

$(q+1)^2 - 2^{q+1} ? 1$

$q^2 + 2q + 1 - 2^{q+1} ? 1$

$q^2 + 2q + 1 - 2^{q+1} ? 1$

$\underbrace{q^2 - 2^q}_{1} + 2q + 1 - 2^q ? 1$

$2q + 1 - 2^q ? 0$

$2q + 1 ? q^2$

$(q+1)^2 ? 2q^2$

$2q^2 - (q+1)^2 ? 0$

~~$(\sqrt{2}q - q - 1)(\sqrt{2}q + q + 1) ? 0$~~

№ 3

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

p и q - прост

~~Оа~~ Все простые числа кроме 2 нечетные.

Если p и q не равны 2, то

$нч^{нч} - нч^{нч} + нч = 2^ч$

$нч - нч + нч = ч$

$ч + нч = ч$

$нч \neq ч \Rightarrow p$ или q равны 2

Если $p = q = 2$, то $2^2 - 2^2 + 3 \neq 2^1$

$3 \neq 2$

Значит либо $p = 2$ либо $q = 2$.

Если $p = 2$, то

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q - q^2 = -1$

$2^q - q^2 > -1$ при $q > 4$

Доказем это по индукции:

База: $q = 5$, ~~2^5~~ $32 - 25 > -1$

Шаг: Пусть $2^q - q^2 > -1$

$2^{q+1} - (q+1)^2 \,?\, -1$

$2^q + 2^q - q^2 - 2q - 1 \,?\, -1$

$\underbrace{2^q - q^2}_{> -1} + 2^q - 2q \,?\, 0$

$2^q - 2q \,?\, 0$

$2^q - q^2 > -1$

$2^q - q^2 + 1 > 0$

$2q < q^2 - 1$ при $q > 4$

$2^q - 2q \,?\, 0$

91-43-35-97 (117.1)

№3

Докажем что $2^q - 2q > 0$ при $q > 4$

База: $2^5 - 2\cdot 5 > 0$

Шаг: Пусть $2^q - 2q > 0$

$2^{q+1} - 2q - 2 > 0$

$2^q - 2q > 0 \mid \cdot 2$

$2^{q+1} - 4q > 0$

$2^{q+1} - 4q < 2^{q+1} - 2q - 2$ при $q > 4$,

т.к. $-2q < -2$.

Значит $2^q - 2q > 0$ при $q > 4$ и $2^q - q^2 > 0$, по предположению $\Rightarrow 2^q - 2q + 2^q - q^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{q+1} - q^2 - 2q - 1 > -1$

$2^{q+1} - (q+1)^2 > -1$ при $q > 4$. ч.т.д.

Т.к. q - прост, $q > 1$ и $q \le 4$ ⇒

$q = 4$ или $q = 2$ или $q = 3$, но если $q = 2$, то

$2^2 - 2^2 + 3 = 2^1$, $3 \ne 2$, значит $q = 3$

$2^3 - 3^2 = -1$.

Значит $p = 2, q = 3$. Если $q = 4$, то $2^4 - 4^2 + 3 = 2$, $3 \ne 2$

Если $q = 2$, то

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 - 2^p = 2^{p-1} - 3$

$2^p - p^2 > -1$

$p^2 - 2^p < 1$ при $p > 4$

$p^2 - 2^p < 1 < 2^{p-1} - 3$ при $p > 4$

⇓

$p \le 4$ и $p > 1$

$p = 2$ или $p = 3$ или $p = 4$ и $q = 2$

Если $p = 2$, то $4 - 4 + 3 = 2$

$3 \ne 2$

Если $p = 3$, то $9 - 8 = 4 - 3$

Если $p = 4$, то $16 - 16 + 3 \ne 8$

Значит ~~либо~~ $p = 2$ и $q = 3$ либо $p = 3$ и $q = 2$

Ответ: $p = 2, q = 3$ и $p = 3, q = 2$.

Черновик

$1 = 5^0$

$6 = 5^0 + 5^1$

$31 = 5^0 + 5^1 + 5^2$

$156 = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3$

4 26

$6 + 5 + 5 + \ldots +$

+4
+1

n

10

0 - 5

+1
+5

$b_{n-3} = 2^a$

$b_{n-2} = 2^8$

$b_{n-1} = 2^6$

$b_n = 2^{3(\cancel{6}-8)+a}$

b_{n-3}
b_{n-2}^3
b_{n-1}^3
b_n

$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2}$

НОД$(a, b) = 1$

$b_1 = 2^1$
$b_2 = 2^0$
$b_3 = 2^1$
$b_4 = 2^4$
$b_5 = 2^9$
$b_6 = 2^{16}$

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_1 = 2, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 2$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3} =$

$f(b_{n-3}) = 2^c$

$f(b_{n-2}) = 2^8$

$f(b_{n-1}) = 2^a$

$b_4 = \frac{b_1 \cdot b_3^3}{b_2^3} = \frac{2 \cdot 8}{1} = 16 = 2^4$

a_{n-3}
a_{n-2}
a_{n-1}

$b_5 = \frac{1 \cdot 16^3}{8} = 2^9$

$b_6 = \frac{}{2 \cdot 2^{2\cancel{4}}}$

$f(b_n) =$

$a_n = 3(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$

a^2

$d = 3(a^2 - b^2) + c^2$

1 0 1 4 9 16 25 36

$1\ 0^2\ 1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2 \ldots$ $\boxed{a_{2023} = 2021^2}$

1 2 3

$b_{2023} = 2^{2021^2}$

База: $a_2 = 0^2$, $a_3 = 1^2$, $a_4 = 2^2$, $a_5 = 3^2$

шаг: $a^2 = 3((a-1)^2 - (a-2)^2) + (a-3)^2$

$a^2 = 3(a^2 - 2a + 1 - a^2 + 4a - 4) + a^2 - 12a + 9$

$a^2 = 3(2a - 3) + a^2 - 12a + 9$

$a^2 = 12a + 9$

V

V V V V V

V V V V V

V

V V V V V

|||

1

5

20

1000

126

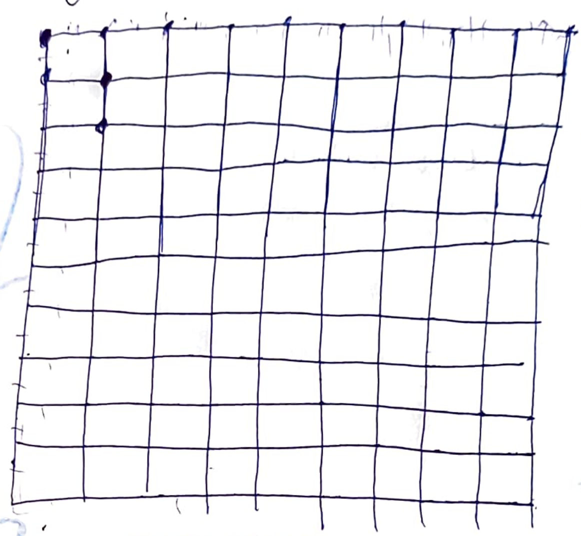
МОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ ~~[illegible]~~ МОКОРИ

"О" – 5
"П" – 1
"К" – 1
"Р" – 3
"И" – 1
"В" – 2
"Б" – 1
"б" – 1
"Е" – 1
"Ы" – 2
"Г" – 1

10+5+4=19.

перекрестков-
23·10=230

№4



220+207=427

~~427~~
~~229~~

427-229=198

"О" – 5

50
3Р
2В
2Ы
1П
1К
1И
1Б
1б
1Е
1Г

~~3Р 2В~~
~~50~~
~~3Р~~ ~~2Р~~
~~1П~~

~~4Р – 218~~
~~3Р~~ ~~30~~

3Р
20
2В
2Ы
1П
1К
1И
1Б
1б
1Е
1Г

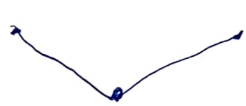
$$\frac{230\cdot 2}{2}-1$$

2021
× 2021
2021
+ 4042
4042
4084441

46+18=64

22·10+9=229
23·9+22=229

23
× 9
207



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Выполнять задания на титульном листе запрещается!

№5

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$

Заметим что $b_1 = 2^1,\ b_2 = 2^0,\ b_3 = 2^1$

$b_4 = \frac{2^1 \cdot (2^1)^3}{2^0} = 2^4$

~~Тое~~ То есть каждое число в этой последовательности степень числа 2. ~~Соз~~ Создадим ~~свою~~ последовательность a ~~свою~~ где a_n - это степень числа 2 в числе b_n, причем пусть $b_{n-3} = 2^b$, $b_{n-2} = 2^c$, $b_{n-1} = 2^d$, тогда $b_n = \frac{2^b \cdot 2^{3d}}{2^{3c}} = 2^{3(d-c)+b}$, значит $a_n = 3(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-3}$,

Заметим что $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 4$

$a_1 = 1,\ a_2 = 0^2,\ a_3 = 1^2,\ a_4 = 2^2 \ldots$

Заметим что $a^2 = 3((a-1)^2 - (a-2)^2) + (a-3)^2$

То есть если $a_2 = 0^2,\ a_3 = (0+1)^2,\ a_4 = (0+1+1)^2$, то $a_5 = (2+1)^2$, значит последовательность a - это последовательность ~~кв.~~ последовательн. кв начиная со 2-го элемента. Значит $a_n = (n-2)^2$, значит $a_{2023} = 2021^2 \Rightarrow b_{2023} = 2^{2021^2}$

№6

ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ

5О
3Р
2В
2Ы
1П
1К
1И
1Б
1Ь
1Е
1Г

Если Первым ходом I заберет 3О, он выиграет.

I взял 3О осталось:

2О
3Р
2В
2Ы
1П
1К
1И
1Б
1Ь
1Е
1Г

Если после этого II возьмет какую-нибудь букву которая одна, то I возьмет 1Р и выиграет повторяя ходы II если II взял 1букву и тех которых всего 1, то I возьмет другую букву которая одна (такая найдется, т.к. всего таких букв четно)

Если II возьмет 1букву из которых оставалось 2, то первый возьмет ~~т~~ тоже 1букву которых оставалось 2 перед его ходом, такая найдется, т.к. 2одинак букв - четно.

Если II возьмет 2 буквы, то I другие 2одинак возьмет.

Если II возьмет какую-нибудь 1букву из тех которых было 2, то I берет 3Р и делат также как было описано выше, повторяя ходы противника.

Если II возьмет ~~2 одн~~ букву из Р, то I возьмет 1П и выиграет повторяя ходы противника, как было описано выше.

№6
Если II возьмет 2 одинаковые буквы, которых всего 2, то I возьмет 2Р и выиграет повторяя ходы противника, как было описано ранее
Если II возьмет 2 буквы из Р, то I возьмет 2О и выиграет повторяя ходы противника как было описано ранее
Если II возьмет ~~3Бу~~ 3Р, то I возьмет 1О и выиграет повторяя ходы соперника, как было описано ранее

№ 4

Пусть перекрестки – это вершины, а участки дороги – это ребра. Всего вершин 230 и ребер – 427.

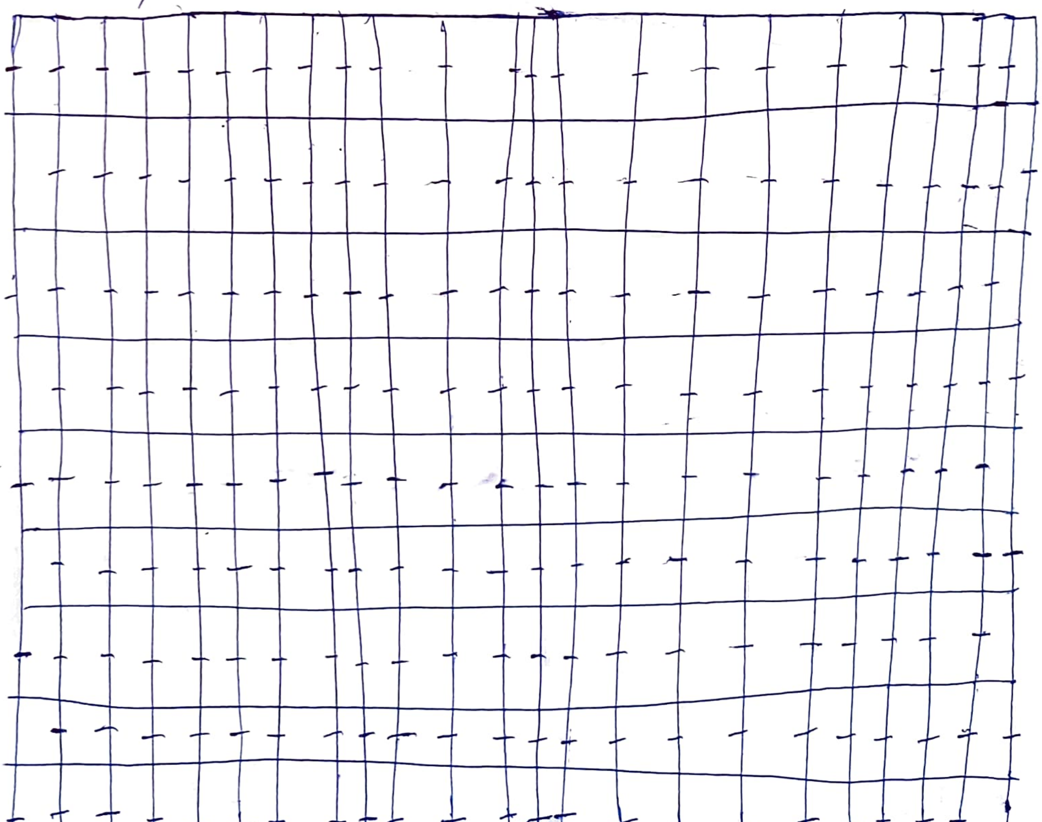
~~Итак~~ Пусть 2 вершины не соединены, но надо из одной попасть в другую, тогда нужен путь между ними. Пусть вершин со степенью 1 – 3, тогда чтобы граф был связным нужна вершина со степенью 3 и сумма $3+1=4=2+2$, сумме 2 вершин со степенью 2. Значит минимальная сумма степеней вершин $= \cancel{...}$

$= 230 \cdot 2 - 2 = 458$, а значит ребер – $\frac{458}{2} =$

$= 229 \Rightarrow$ минимальное число дорог которые надо оставить – 229.

Значит макс. число дорог которые можно закрыть – $427 - 229 = 198$

Пример: (палкой обозначаются закрытые дороги)



№1

Каждый пакет дает либо +1 в пустые пакеты либо +4, т.к. он до этого был посчитан. ~~1 пакет точно даст~~ 1 пакет не был посчитан до этого, значит он даст +5. $(101-5):4=25$. 25 пакетов не пустые и 101 пустой значит всего 126 пакетов.