0 615273 970006

61-52-73-97
(123.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С – 2

+1 лист краткий

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Клочкова Ивана Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
61-52-73-97	90	20	20	20	20	10	0		

61-52-73-97 (123.3)

Чистовик

№1

$1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x-\cos x)=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt{2}\cos x\sin x-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x\cos x=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$.

$1-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$

$1-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\sin^2 x+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$

$1-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$\cancel{\sqrt{2}\cos 2x}-\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\cancel{-3}$

$-\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sin 2x+\cos 2x)=0$

$\sin 2x=-\cos 2x$

$tg 2x=-1$

$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

Заметим, что при $\cos 2x=0$ $|\sin 2x|=1\neq 0$, значит, при $\cos 2x=0$ решений ур-я нет, а значит, ~~обе части~~ на него допустимо поделить обе части ур-я.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

№2

Пусть V – скорость велосипедиста

U – скорость мотоциклиста

$U=2V$; Пусть x-часов время встречи.

Пусть S – расстояние между пунктами A и B

1) ~~Если мотоци~~ Если мотоциклист выехал раньше, а остановку сделал велосипедист, то случай невозможен, т.к. тогда более быстрый мотоциклист проехал то же расстояние за большее время, чем более медленный велосипедист за меньшее время.

2) Если мотоциклист выехал раньше и совершил остановку, тогда

$$\begin{cases}(1)\ \frac{S}{V}=x-13 & \text{– время езды велосипедиста}\\ (2)\ \frac{S}{2V}+2=x-12 & \text{– время мотоциклиста}\end{cases}$$

Подставим в (2) ур-е (1)

$$\begin{cases}\frac{x-13}{2}=x-14\\ \frac{S}{V}=x-13\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{S}{V}=2ч.\\ x=15ч.\end{cases}$$

Значит, оба прибыли в B в 15:00

$\frac{S}{V}=2$ в данном случае.

Чистовик

№2 (продолжение)

3) Если велосипедист выехал раньше, а мотоциклист совершил остановку, то $\begin{cases} \frac{S}{V} = x-12 & \text{– время велосипедиста} \\ \frac{S}{2V} + 2 = x-13 & \text{– время мотоциклиста} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{S}{V} = x-12 \\ \frac{x-12}{2} = x-15 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 18ч \\ \frac{S}{V} = 6ч \end{cases}$, значит, оба прибыли в пункт B в 18:00 ~~$\frac{S}{V}$ в данном случае~~.

4) Если велосипедист выехал раньше, но совершил остановку, то $\begin{cases} \frac{S}{V} + 2 = x-12 \\ \frac{S}{2V} = x-13 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{S}{V} + 2 = x-12 \\ \frac{S}{V} = 2x-26 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-24 = x-12 \\ \frac{S}{V} = x-14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 12 \\ \frac{S}{V} = -2. \end{cases}$

~~$2x-24 = x-12$~~

$x=12$, но тогда $\frac{S}{V} = -2$, чего не может быть по смыслу задачи, т.к. время неотрицательно.

Ответ: Если велосипедист выехал раньше, а мотоциклист сделал остановку, то оба встретились в 18:00. Если мотоциклист выехал раньше и совершил остановку, то оба встретились в 15:00. Иные случаи невозможны.

№3

$x^3+6x^2+7x+1=0$ $\qquad x_1, x_2, x_3$ – корни.

По обобщенной Т Виета $\qquad$ Найти a, b, c, при которых

$+x_1+x_2+x_3=-6$ $\qquad x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет корни

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$ $\qquad x_1+x_2;\ x_2+x_3;\ x_3+x_1$

$x_1x_2x_3=-1.$

$x^3+ax^2+bx+c = (x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))(x-(x_3+x_1))=0$

По ~~Т обратной~~ обобщенной Т Виета

$\begin{cases} x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1 = -a \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_1+x_2)(x_3+x_1) = b \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1) = -c. \end{cases}$

61-52-73-97
(123.3)

Черновик.

$2\cos^2\frac{\pi}{8}-1=\frac{\sqrt2}{2}$

$2\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt2}{2}$ $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt2}{4}$ $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

$2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})=2(\sin x\cos\frac{\pi}{8}+\cos x\sin\frac{\pi}{8})^2=$

$=2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}\cos x\right)^2=$

$=2\left(\frac{2+\sqrt2}{4}\sin^2x+\frac{2-\sqrt2}{4}\cos^2x+2\cdot\frac{\sqrt2}{4}\sin x\cos x\right)=$

$=\frac{2+\sqrt2}{2}\sin^2x+\frac{2-\sqrt2}{2}\cos^2x+\sqrt2\sin x\cos x.$

$1-\sqrt2\cos2x+\cancel{1}\frac{\sqrt2}{2}\sin2x.$ $\frac{S}{V}=x-13$

М	В	
✓ р0		
✓ р	0	✗
0	р	✓
	р0	✓

$\frac{S}{2V}+2=x-12$

$\begin{cases}\frac{S}{V}=x-13\\ \frac{S}{2V}+2=x-12\end{cases}$

$\frac{x-13}{2}+2=x-12$

$x-12=2x-30$
$x=18$

$\frac{x-13}{2}=x-14$

$x-13=2x-28$

$x=15.$

$x^3+6x^2+7x+1=0$ x_1 x_2 x_3 – корни.

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x$
$-x_1x_2x_3$

$(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_3+x_1)=$

$=x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3=$

$=2x_1x_2x_3+\cancel{x_1x_2x_3\left(\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}\right.}$

$(-6-x_3)(-6-x_1)(-6-x_2)=-(6+x_1)(6+x_2)(6+x_3)=$

$=-(36+6x_2+6x_1+x_1x_2)(6+x_3)=$

$=-(\cancel{216}+\cancel{36x_2}+\cancel{36x_1}+6x_1x_2+\cancel{36x_3}+6x_3x_2+6x_3x_1+x_1x_2x_3)$

-216 $6(x_1x_2+$

Чистовик

№3 (продолжение)

$$\begin{cases} -a = 2(x_1+x_2+x_3) \\ b = x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2+x_3^2+x_1x_3+x_1x_3+x_1^2+x_2x_3+x_1x_2 \\ -c = (-6-x_1)(-6-x_2)(-6-x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = -12 \\ b = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \\ c = (6+x_1)(6+x_2)(6+x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=12 \\ b=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \\ c=216+36(x_1+x_2+x_3)+6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3 \end{cases}$$

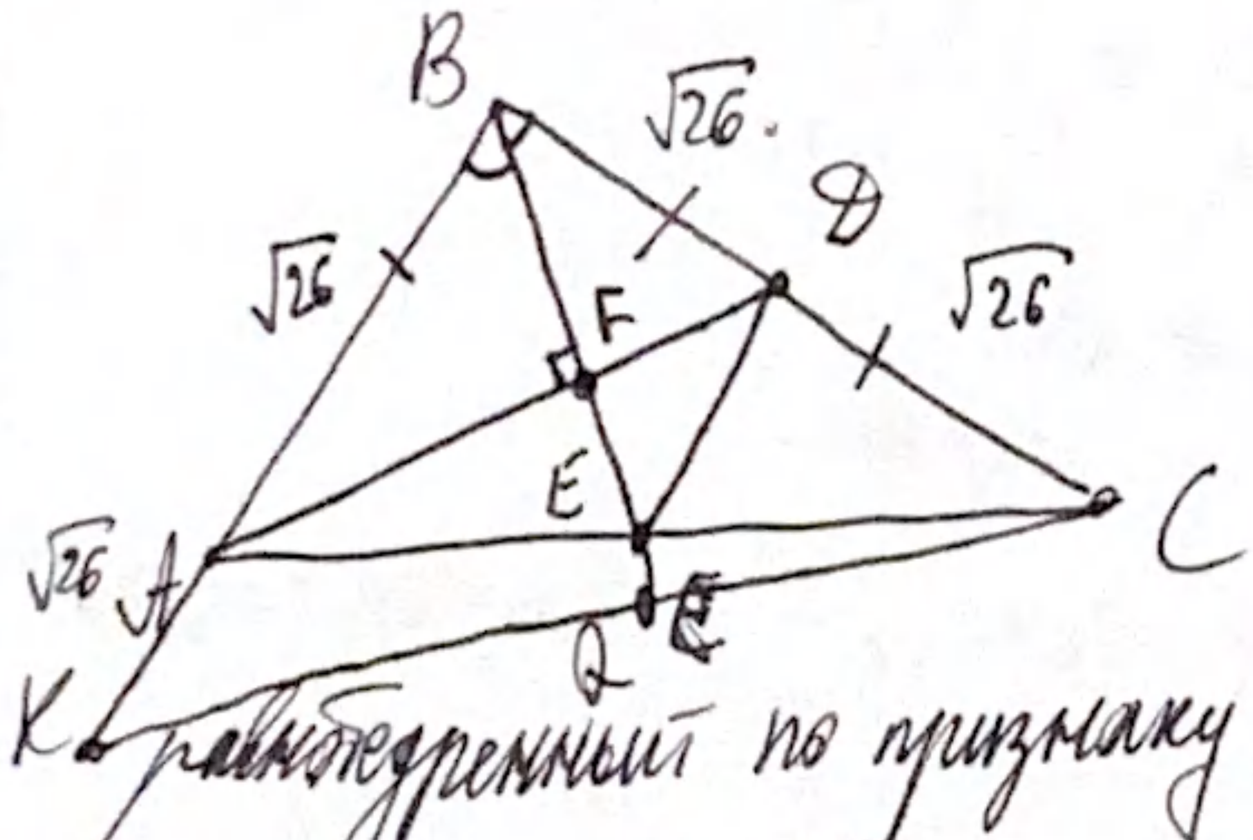
$$\begin{cases} a=12 \\ b=36+7 \\ c=6\cdot7-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=12 \\ b=43 \\ c=41 \end{cases}$$

Отсюда получили, что при $a=12$; $b=43$; $c=41$ корнями ур-я x^3+ax^2+bx+c являются числа ~~x_1+x~~ x_1+x_2; x_2+x_3; x_3+x_1.

Ответ: $a=12$; $b=43$; $c=41$.

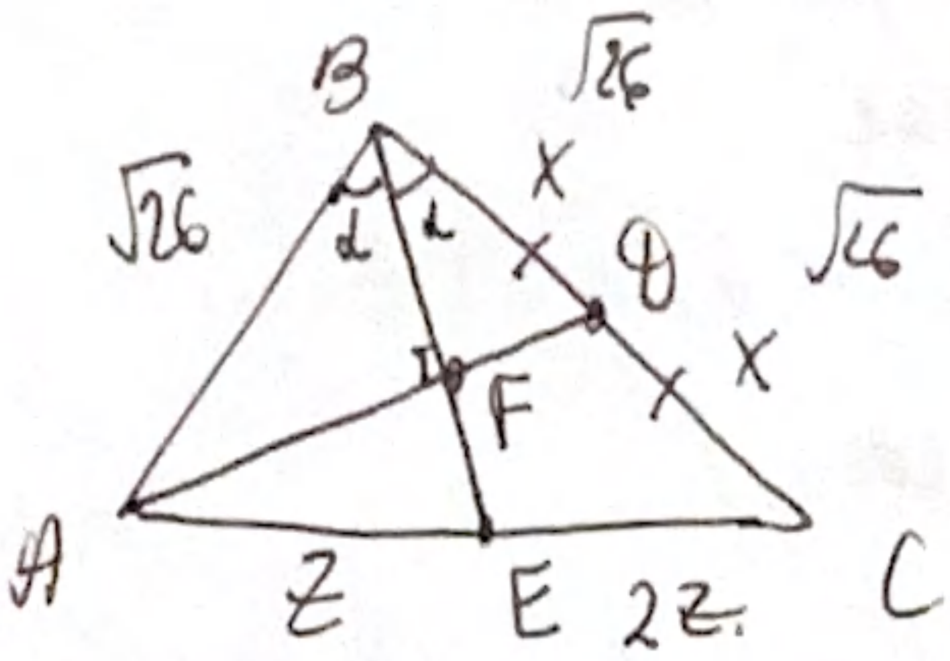
№4

Дано:
$\triangle ABC$
BE - бисс-а
AD - мед.
$BE=AD$
$BE\perp AD$.
$AB=\sqrt{26}$
$S(\triangle ABC)$ - ?



1) Д.п. $F = BE\cap AD$
2) в $\triangle ABD$
BF - бисс-а
BF - высота,
значит, $\triangle ABD$ - равнобедренный по признаку, значит,
$BD = AB = \sqrt{26}$
3) AD - медиана $\triangle ABC \Rightarrow DC = BD$, а т.к. $BD=\sqrt{26}$
$DC=\sqrt{26}$.
4) Д.п. продлим BA за точку A на $\sqrt{26}$, пусть это будет точка K. $KA=\sqrt{26}$ $K\in AB$. $KA<KB$.
5) $\triangle KBC$ - р/б по определению, т.к. $KB=CB=2\sqrt{26}$.
6) ~~CA~~ Д.п. $BE\cap KC = Q$
BQ - бисс-а в р/б $\triangle KBC \Rightarrow BQ$ - выс, мед.
7) $BQ\cap CA = E$
BQ - мед
CA - мед
$\Rightarrow E$ - центроид $\triangle KBC \Rightarrow BE=\frac{2}{3}BQ$

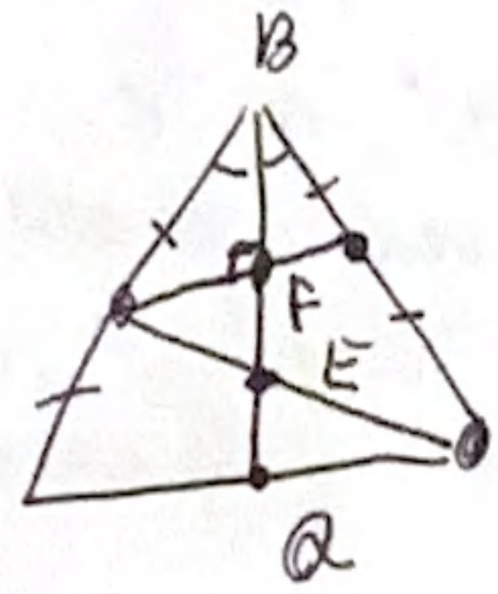
Черновик $AD = BE = y$



$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot AD = 1$

$S = BF \cdot y.$

$BF = \cancel{\sqrt{\ }}\ \sqrt{26} \cos\alpha.$



$BE = \frac{2}{3} BQ$ $BF =$

$BQ = 2\sqrt{26} \cos\alpha.$

$BE = \frac{4}{3}\sqrt{26} \cos\alpha.$

$BE = \frac{\sqrt{26} \cdot 2\sqrt{26}}{3\sqrt{26}} \cos\alpha.$

$BF = \frac{1}{2} BQ = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} BE. = \frac{3}{4} BE.$

$\sqrt{26} \sin\alpha + \sqrt{26} \sin\alpha = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{26} \cos\alpha.$

$\sin\alpha = \frac{2}{3} \cos\alpha.$ $\cos^2\alpha + \frac{4}{9}\cos^2\alpha = 1$

$\frac{13}{9}\cos^2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$BF = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}} \cdot 3 = 3\sqrt{2}.$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$ $\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\frac{1}{2} S6 =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{26} \cdot \cancel{2}\sqrt{26}}{\cancel{26}} \cdot \frac{12}{\cancel{13}} = 24.$

$2 \quad 24$

Чистовик

№4 (продолжение)

8) Пусть $\angle ABE = \angle EBC = \alpha$, тогда

$AD = AF + FD = AB\sin\alpha + BD\sin\alpha = 2\sqrt{26}\sin\alpha.$

$BE = \frac{2}{3}BQ = \frac{2}{3}\cdot BC\cos\alpha = \frac{4\sqrt{26}}{3}\cos\alpha.$

По условию $AD = BE$, значит,

$\sin\alpha = \frac{2}{3}\cos\alpha$, значит, $0° < \alpha < 90°$, т.к. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака, а сам α от $0°$ до $180°$ по геометрическим соображениям

По основному триг. тождеству

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{9}{13}\cos^2\alpha = 1$ $\quad \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$, но т.к. $\alpha \in (0°; 90°)$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$. $\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

Отсюда $AD = 2\sqrt{26}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = 4\sqrt{2}$

~~BF =~~

$BF = BD\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\sqrt{26} = 3\sqrt{2}$

9) По св-ву медианы ~~AD~~ AD тр-ка $\triangle ABC$

$S(\triangle ABD) = S(\triangle ADC) = \frac{S(\triangle ABC)}{2}.$

$S(\triangle ABC) = 2S(\triangle ABD) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot BF\cdot AD =$

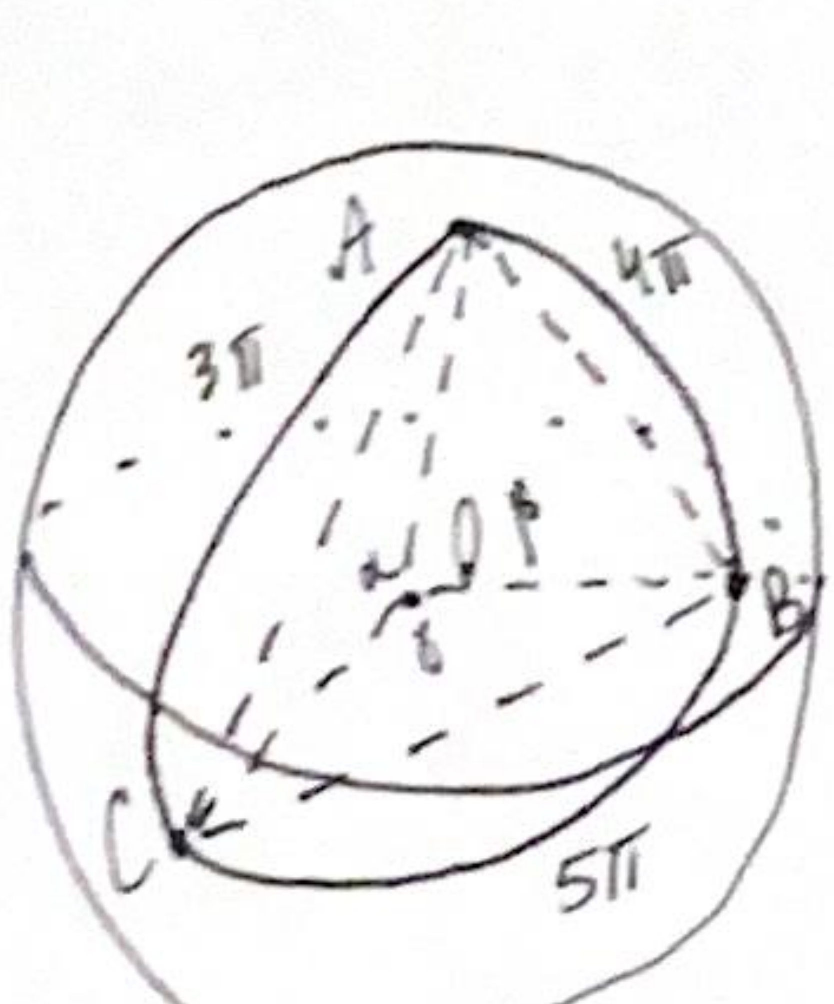
$= BF\cdot AD = 3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 24$

Ответ: 24.

№5

Дано:
ω – сфера
$A, B, C \in \omega$
$\smile AB = 4\pi$
$\smile BC = 5\pi$
$\smile AC = 3\pi$

Найти:
минимальный $P(\triangle ABC)$ – ?

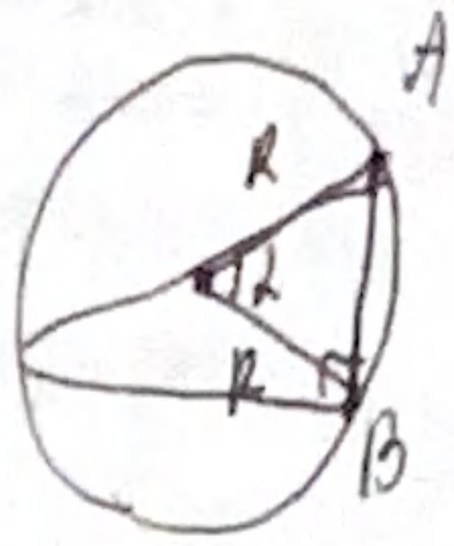


1) Пусть O – центр сферы R – ее радиус.

2) Пусть $\angle AOC = \alpha$
$\angle AOB = \beta$
$\angle COB = \gamma$.

3) Заметим, что в сечениях сферы плоскостями (AOC), (AOB), (BOC) получаются равные окр-ти, значит, верным будет соотношение $\alpha R = 3\pi$; $\beta R = 4\pi$; $\gamma R = 5\pi$.

Отсюда $\beta = \frac{4}{3}\alpha$, $\gamma = \frac{5}{3}\alpha$.



~~4π~~ ~~AB~~ $\frac{AB}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$

$AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$

$N = a_1^{\alpha_1} \dots a_l^{\alpha_l}$

$2\pi R$ – длина окр.

$\frac{\alpha}{2\pi} R$ – длина $\smile AB$.

$\sigma_N = (\alpha_1+1)\dots(\alpha_l+1)$

$\sigma_{N^3} = (3\alpha_1+1)\dots(3\alpha_l+1).$

$\frac{\alpha}{2\pi} R = 4\pi \qquad \frac{\alpha}{2\pi}\cdot 2\pi R = 3\pi$

$\frac{\beta R}{2\pi} = 3\pi$

$R\alpha = 8\pi^2$

$\beta R = 6\pi^2 \qquad \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{3\pi}{}$

$$\begin{cases} R\alpha = 8\pi^2 \\ R\beta = 6\pi^2 \\ R\gamma = 10\pi^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{8\pi^2}{R} \\ \beta = \frac{6\pi^2}{R} \\ \gamma = \frac{10\pi^2}{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta \\ \alpha = \frac{4}{3}\beta \\ \gamma = \frac{5}{3}\beta. \end{cases}$$

$\gamma R = 10\pi^2$

$\sigma(N^3)$ – ?

$\alpha R =$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^2$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq \sqrt{N}\cdot\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}.$

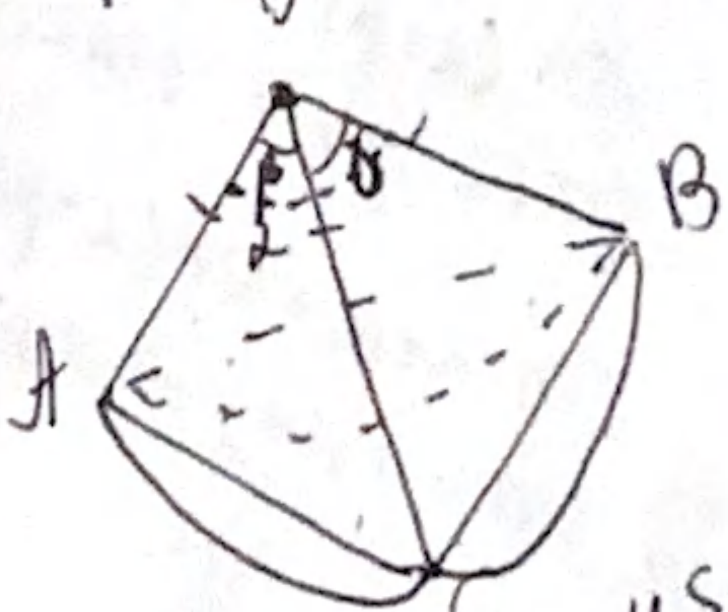
Хотя бы 1 больше $\sqrt{N}$.

$p_{1697} > \sqrt{N}$

$p(k-m-n)\, p(n) = N.$

$\sigma(N) = k$

Сумма углов



$\beta + \frac{4}{3}\beta + \frac{5}{3}\beta =$

$= 4\beta.$

$\alpha + \frac{4}{3}\alpha + \frac{5}{3}\alpha =$

$= 4\alpha.$

$S = \frac{a\sqrt{3}}{4} \qquad a = \frac{4S}{\sqrt{3}}$

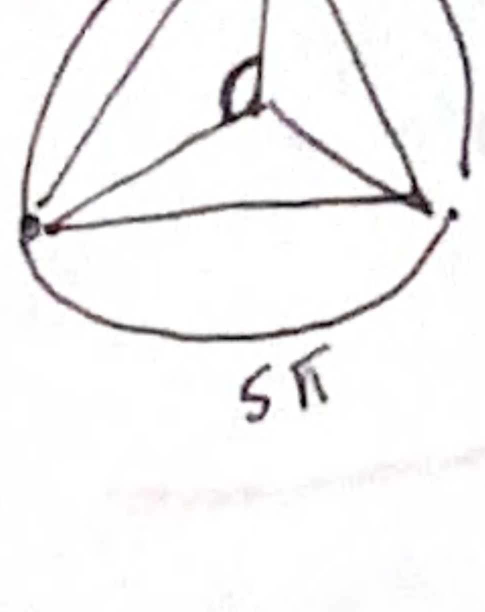
$4\alpha \leq 360°$

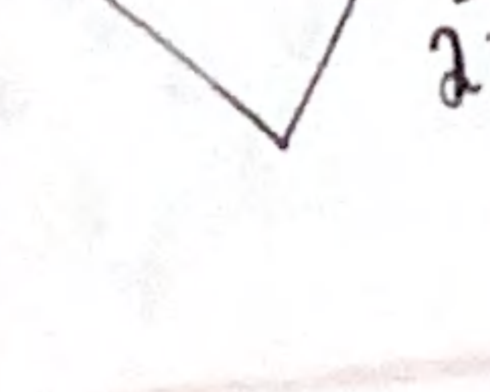
$\alpha \leq 90°$

$12\pi = 2\pi R$

$R = 6$

$\alpha =$





$\frac{\alpha}{2\pi \cdot 6} = 3\pi$

$P = 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) =$

$= 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{2\alpha}{3} + \sin\frac{5\alpha}{6}\right)$

Черновик

$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 2\pi R = \alpha R.$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$
$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

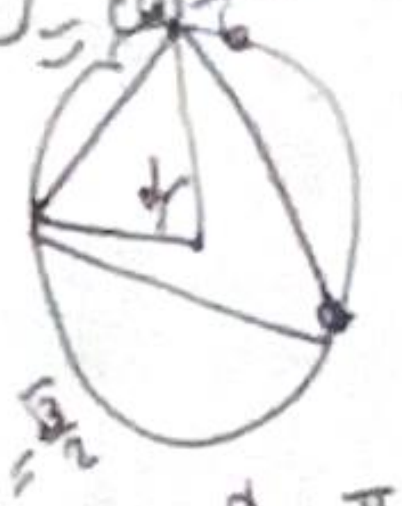
$\alpha R = 3\pi$ $\quad \beta = \frac{4}{3}\alpha$

$\beta R = 4\pi$ $\quad \gamma = \frac{5}{3}\alpha.$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\gamma R = 5\pi$ $\quad 12\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12}.$



$2\pi R = 12\pi$

$R = 6$

$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 6 = 3\pi$

$2\cos^2\frac{\pi}{12}-1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+\frac{5}{6}\pi =$

$2\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\quad \beta = \frac{2}{3}\pi$ $\quad = \frac{3\pi+4\pi+5\pi}{6} = 2\pi.$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ $\quad P =$ $\quad \frac{\gamma}{2} = \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$ $\quad \gamma = \frac{5}{6}\pi$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$P = 2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) = 2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) =$

$= 6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+6\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

$2R(\sin\frac{\pi}{4}+\sin$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$
$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$
$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}+\sin\frac{5\alpha}{6}$

$\sin\frac{3\alpha}{6}+\sin\frac{4\alpha}{6}+\sin\frac{5\alpha}{6}$

$\sin\frac{3\alpha}{6}+\sin\frac{4\alpha}{6} =$

$2\sin\frac{4\alpha}{6}\cos\frac{2\alpha}{6}+\sin\frac{4\alpha}{6} =$

$= \sin\frac{4\alpha}{6}(2\cos\frac{2\alpha}{6}+1)\cdot 2R.$

$f(\alpha) = \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}+\sin\frac{5\alpha}{6}$

$f'(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{2\alpha}{3}+\cos\frac{5\alpha}{6}.$

$= \cos\frac{3\alpha}{6}+\cos\frac{4\alpha}{6}+\cos\frac{5\alpha}{6} = 2\cos\frac{4\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}+\cos\frac{4\alpha}{6} =$

$= \cos\frac{4\alpha}{6}(2\cos\frac{\alpha}{6}+1) = 0$

$\cos\frac{\alpha}{6} = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\alpha}{6} = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\alpha = \pm 4\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\alpha = 4\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\cos\frac{2}{3}\alpha = 0$

$\frac{2}{3}\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$

или $\alpha = \frac{7\pi}{4}.$

Черновик.

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$ $\beta = \pi$ $\gamma = \frac{5\pi}{4}$ $\cancel{\frac{\pi}{3}}$

$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) =$

$R = 6.$

$\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{12} + 1\right) =$ $= \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$P = 2R$

$= \cancel{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} =$

$\alpha^{-1} = -\alpha^{-2}$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+1}{2} > 0$

$\alpha R = \cancel{2\pi}\ 3\pi$

$R = \frac{3\pi}{\alpha}.$

$f(x) = \frac{6\pi}{\alpha}$ $g(x) = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{2\alpha}{3} + \sin\frac{5\alpha}{6}$

$(f(x)g(x))' = fg' + f'g = \frac{6\pi}{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{2\alpha}{3} + \cos\frac{5\alpha}{6}\right) -$

$- \frac{6\pi}{\alpha^2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{2\alpha}{3} + \sin\frac{5\alpha}{6}\right) =$

$= \frac{6\pi}{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} + \cos\frac{2\alpha}{3} - \frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\alpha} + \cos\frac{5\alpha}{6} - \frac{\sin\frac{5\alpha}{6}}{\alpha}\right)$

$\alpha\frac{\pi}{2}$

$12\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\pi}{\cancel{2}}} + \frac{1}{2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\pi}{\cancel{2}}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\cancel{2}\pi}\right)$

$\cancel{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \pi\right) +}$

$12\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right)$

$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{2\alpha}{3} + \cos\frac{5\alpha}{6} = \cos\frac{2\alpha}{3}\left(2\cos\frac{\alpha}{6} + 1\right) - \frac{1}{\alpha}\left(\sin\frac{2\alpha}{3}\left(2\cos\frac{\alpha}{6} + 1\right)\right)$

$= \left(2\cos\frac{\alpha}{6} + 1\right)\left(\cos\frac{2\alpha}{3} - \frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\alpha}\right)$

$12\pi = 2\pi R$

$R = 6.$

$\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} = \sin\frac{\alpha}{3}$

$\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{3} = \alpha$

$\frac{2\alpha}{3} = \operatorname{arctg}\alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Чистовик

№5 (продолжение).

4) По св-ву трехгранного угла с вершиной O и ребрами OA, OB, OC $0<\alpha+\beta+\gamma\le 2\pi$, причем рав-во достижимо лишь в вырожденном случае, когда A, B, C, O компланарны.

$0<\alpha+\beta+\gamma\le 2\pi$

$0<\alpha+\frac{4}{3}\alpha+\frac{5}{3}\alpha\le 2\pi \qquad 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

5) $P(\triangle ABC) = 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right) = 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(\frac{2}{3}\alpha\right)+\sin\left(\frac{5}{6}\alpha\right)\right)$

по обобщенной Т синусов.

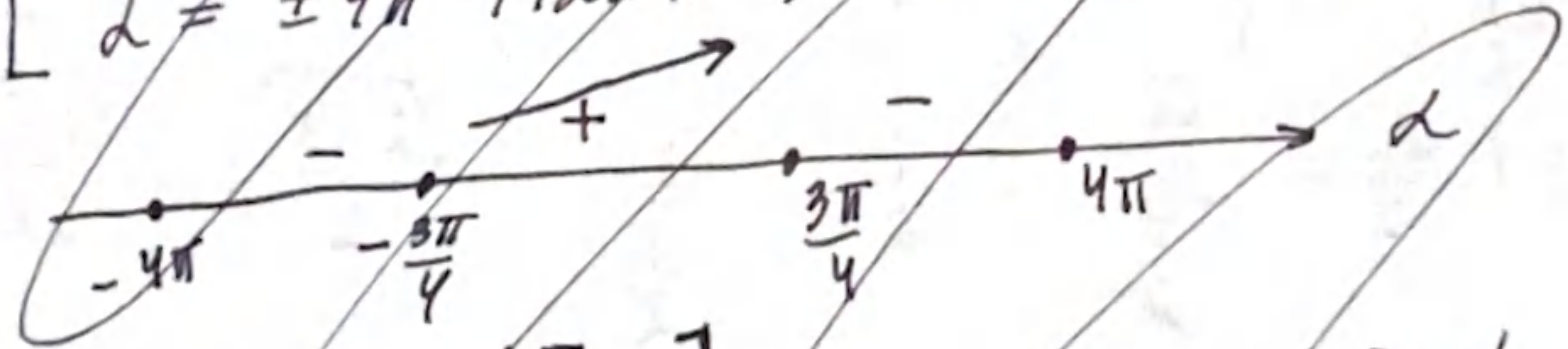
6) Пусть $f(\alpha)=\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(\frac{2}{3}\alpha\right)+\sin\left(\frac{5}{6}\alpha\right)$. $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(\alpha)=\cos\frac{3\alpha}{6}+\cos\frac{4\alpha}{6}+\cos\frac{5\alpha}{6} = 2\cos\frac{4\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}+\cos\frac{4\alpha}{6} =$

$=\cos\frac{2\alpha}{3}\left(2\cos\frac{\alpha}{6}+1\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{2}{3}\alpha=0\\ \cos\frac{\alpha}{6}=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \frac{\alpha}{6}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}\\ \alpha=\pm4\pi+12\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$



Значит, на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $f(\alpha)\uparrow\uparrow$, т.е. наименьшее значение $f(\alpha)$ примет при $\alpha\to0$.

6) из пункта 3), знаем, что $\alpha R=3\pi$ $R=\frac{3\pi}{\alpha}$

Подставим в п. 5) $P(\triangle ABC)=\frac{6\pi}{\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}+\sin\frac{5\alpha}{6}\right)=f(\alpha)$

$f'(\alpha)=\frac{6\pi}{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{2\alpha}{3}+\cos\frac{5\alpha}{6}\right)-\frac{6\pi}{\alpha^2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}+\sin\frac{5\alpha}{6}\right)=\frac{6\pi}{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{2\alpha}{3}+\cos\frac{5\alpha}{6}-\frac{1}{\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{2\alpha}{3}+\sin\frac{5\alpha}{6}\right)\right)=$

$\frac{6\pi}{\alpha}\left(\cos\frac{2\alpha}{3}\left(2\cos\frac{\alpha}{6}+1\right)-\frac{1}{\alpha}\left(\sin\frac{2\alpha}{3}\left(2\cos\frac{\alpha}{6}+1\right)\right)\right)=$

$=\frac{6\pi}{\alpha}\left(2\cos\frac{\alpha}{6}+1\right)\left(\cos\frac{2\alpha}{3}-\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\alpha}\right)=0$

$\begin{cases}\alpha\ne0\\ \left[\begin{array}{l}\cos\frac{\alpha}{6}=-\frac{1}{2}\\ \alpha\cos\frac{2\alpha}{3}=\sin\frac{2\alpha}{3}\end{array}\right.\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha\ne0\\ \left[\begin{array}{l}\alpha=\pm4\pi+12\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \alpha\cos\frac{2\alpha}{3}=\sin\frac{2\alpha}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$

Черновик

$f = \alpha\cos\frac{2\alpha}{3}$ $g = \sin\frac{2\alpha}{3}$. при $\alpha = 0$ $f = g$.

$f' = -\alpha\sin\frac{2\alpha}{3} + \cos\frac{2\alpha}{3}$ $g' = \cos\frac{2\alpha}{3}$.

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$
$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$

$-\alpha\sin\frac{2\alpha}{3} + \cos\frac{2\alpha}{3} \vee \cos\frac{2\alpha}{3}$ $\alpha\in(0; \frac{\pi}{2}]$.

$-\alpha\sin\frac{2\alpha}{3} \vee 0$

$<$.

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\cos\frac{\alpha}{6} + 1$ $\sin\frac{5\pi}{12} = \cancel{\sin(\frac{\pi}{2} -}$

$2\cos\frac{\pi}{12}$ $\cos\frac{\pi}{12} =$

$2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$
$= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3$

$x_1+x_2+x_3 = -6$
$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 7$.
$x_1x_2x_3 = -1$.

$\sin\frac{3\alpha}{6} + \sin\frac{4\alpha}{6} + \sin\frac{5\alpha}{6} = 2\sin\frac{4\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6} + \sin\frac{4\alpha}{6} =$
$= \sin\frac{2\alpha}{3}(2\cos\frac{\alpha}{6} + 1)$.

Чистовик ~~№5 (продолжение)~~ №5 (продолжение)

~~Заметим, что решения первого ур-я совокупности нам не подходят, т.к. в них $\alpha \notin (0; \frac{\pi}{2}]$, а α должен лежать в $(0; \frac{\pi}{2}]$.~~

~~Значит, интересуют нас корни решения системы.~~

~~$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha \cos\frac{2\alpha}{3} = \sin\frac{2\alpha}{3} \end{cases}$~~

Рассмотрим ф-ии $g(\alpha) = \alpha\cos\frac{2\alpha}{3}$ и $h(\alpha) = \sin\frac{2\alpha}{3}$

$g'(\alpha) = -\alpha\sin\frac{2\alpha}{3} + \cos\frac{2\alpha}{3}$ $\qquad h'(\alpha) = \cos\frac{2\alpha}{3}$.

Заметим, что $h(0) = g(0)$, при этом

$g'(\alpha) - h'(\alpha) = -\alpha\sin\frac{2\alpha}{3} < 0$ при $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$,

значит, $g'(\alpha) < h'(\alpha)$ на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$

$$\left.\begin{matrix} g'(\alpha) < h'(\alpha) \text{ на } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ g(0) = h(0) \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} g(\alpha) < h(\alpha) \text{ на } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}] \\ \alpha\cos\frac{2\alpha}{3} < \sin\frac{2\alpha}{3} \text{ на } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$$

Значит, система не имеет решений на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$.

Вернемся к рассмотрению $f'(\alpha) =$

$= \frac{6\pi}{\alpha^2}(2\cos\frac{\alpha}{6} + 1)(\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} - \sin\frac{2\alpha}{3})$ на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$ $\qquad \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$.

Заметим, что $\frac{6\pi}{\alpha^2} > 0$ $\quad 2\cos\frac{\alpha}{6} + 1 > 0$ на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$

т.к. $2\cos\frac{\alpha}{6} + 1 \downarrow\downarrow$ на $(0; \frac{\pi}{2}]$, т.е.

$2\cos\frac{\alpha}{6} + 1 \geqslant 2\cos\frac{\pi}{12} + 1 > 2\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 1 > 0$.

т.к. $\cos x \downarrow\downarrow$ на $[0; \pi]$.

И, как мы доказали ранее, на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$

$\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} < \sin\frac{2\alpha}{3}$, значит, $\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} - \sin\frac{2\alpha}{3} < 0$,

а значит, $f'(\alpha) < 0$ на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ как произведение 2 положительных и 1 отрицательной величины. Значит, $f(x) \downarrow\downarrow$ на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$, а значит, наименьшее на данном участке значение будет достигаться в точке $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$\min P(\triangle ABC) = f(\frac{\pi}{2}) = 12(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{12}) =$

$= 12(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}) = 6(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$.

Ответ: $6(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$.

№6 Черновик.

$\cancel{p}\ p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geqslant N^2$

$p_3 < p_4 < p_{1696} < p_{1697}$

$p_{1697} \geqslant \sqrt{N}$

$p_{1696} \geqslant 1696. \quad p_{1697} \geqslant 1697.$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$