0 371662 520008

37-16-62-52
(123.8)

Сдан 13²⁵

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Хакамова Рамиля Руслановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
37-16-62-52 (123.8)	100	20	20	20	20	0	20		

37-16-62-52 (123.8)

Черновик.

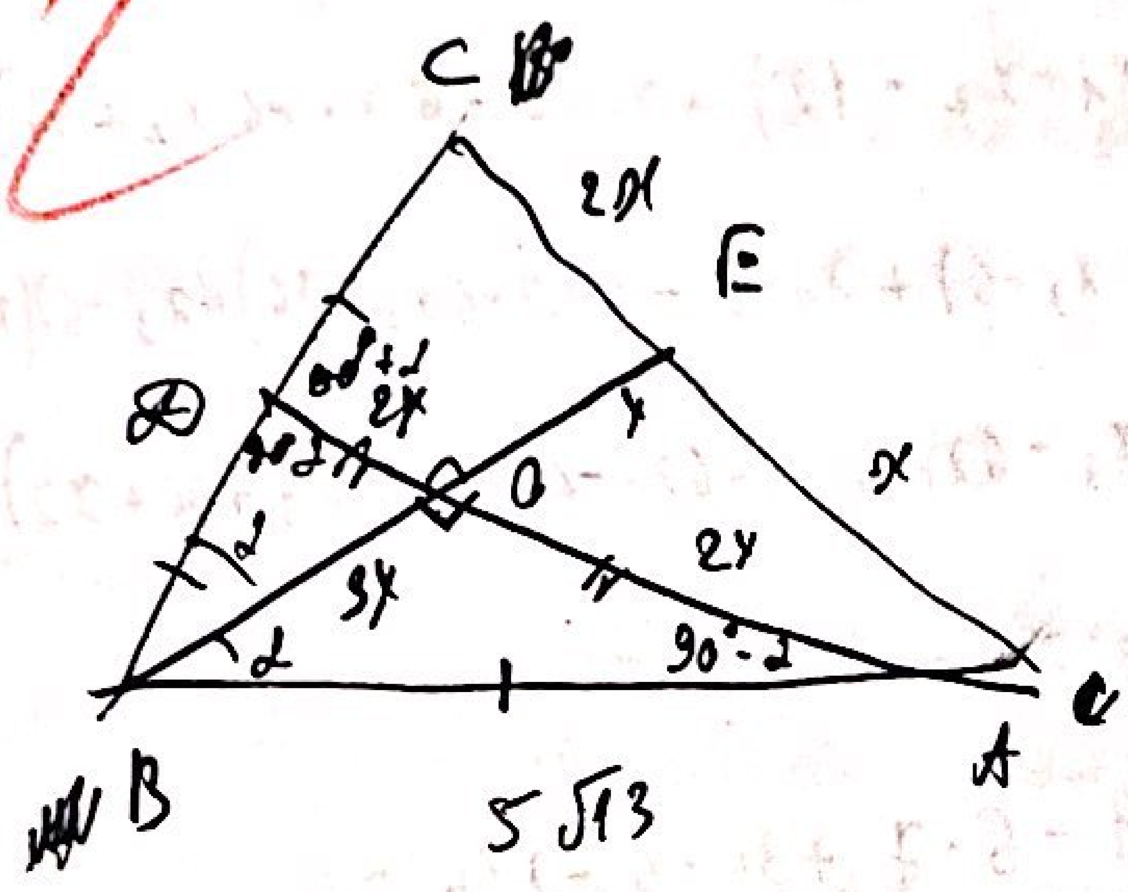
$$\begin{array}{r|l} 1877 & 13 \\ -13 & \overline{144} \\ 57 & \\ -52 & \\ 57 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1877 & 17 \\ -17 & \overline{1} \\ -177 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1877 & 19 \\ -171 & \overline{9} \\ 167 & \end{array}$$

$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = -6$

$x_1 \cdot x_2 = -6 - x_3$

$(x + 6 + x_1)(x + 6 + x_2)(x + 6 + x_3) = x^3 (x^2 + 6x + x_2 x + 6x +$



$AB = BF$

в $\triangle ABD$: BO - бис. и вс.

$BD = AB$

$BE = 2AO$

$V_л = 2V_б$

$\frac{S}{V_б}$ $\frac{S}{2V_л}$

$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$

$\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$

$13y^2$

$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EO}{OB} = 1$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$1 \cdot 3 \cdot \frac{EO}{OB} = 1$

$\sigma(N) = k$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$3EO = OB$

$p_i \cdot p_{k-i+1} = N$ $\quad p_4 \cdot p_{k-3} = N$ $\quad 1876 \geq k - 3$

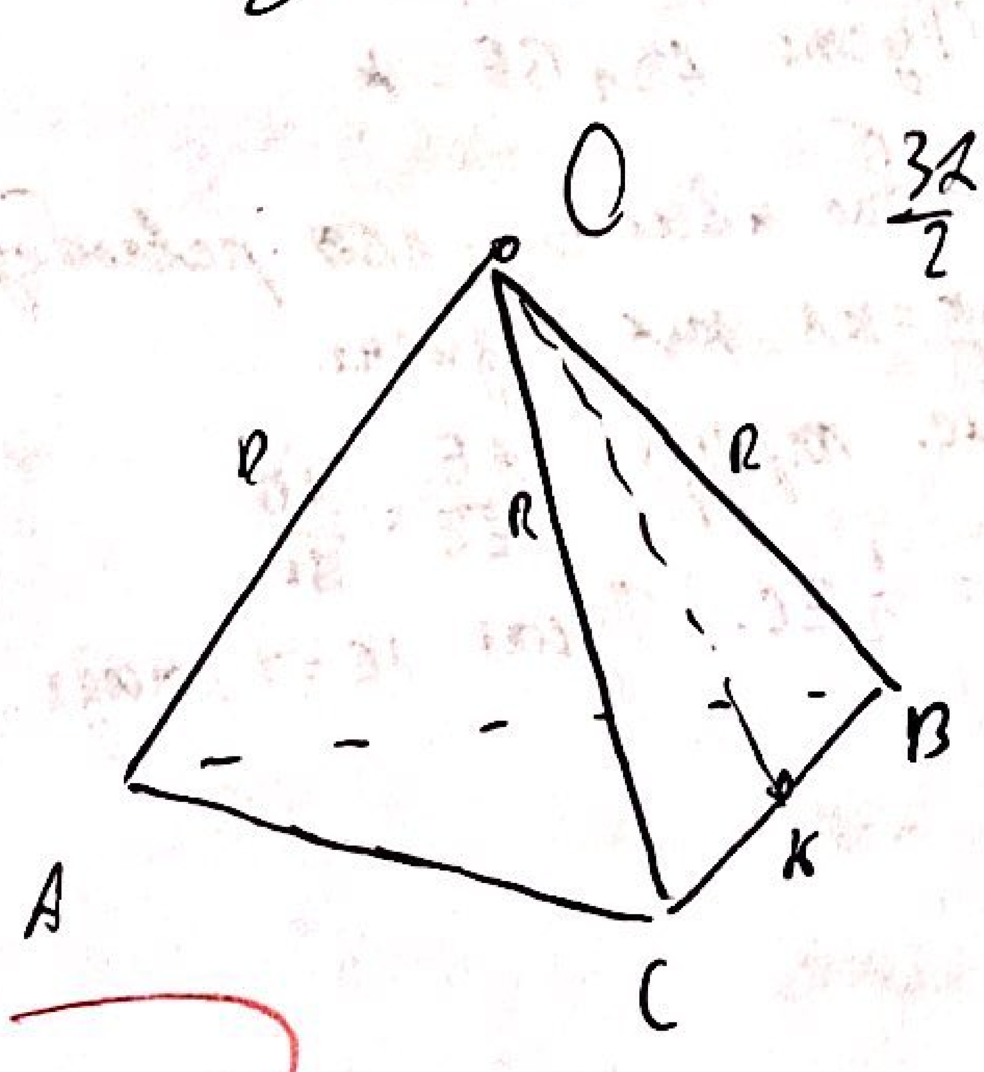
$\sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2}$

$p_3 \cdot p_{k-2} = N$ $\quad k \leq 1879$

$2\pi R \cdot \frac{\angle COB}{2\pi} = 16\pi$

$\frac{3\alpha}{2}$

1877; 1878; 1879



$\angle COB = \frac{16\pi}{R} = 4\alpha$

$\frac{4\pi}{R} = \alpha$

$\angle AOC = \frac{12\pi}{R} = 3\alpha$

$\angle AOB = \frac{20\pi}{R} = 5\alpha$

$CK = R \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}$

$\frac{20\pi}{R} \leq \pi$; $R \geq 20$

$P = 2R\left(\sin\frac{3\alpha}{2} + \sin 2\alpha + \sin\frac{5\alpha}{2}\right) = 2R\left(2\sin 2\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \sin 2\alpha\right) =$

$= 2R \sin 2\alpha\left(1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin\frac{8\pi}{R}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{R}\right)$

Чистовик

№3

Запишем теорему Виета для кубического ~~ур~~ ур.:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=+6 & (1) \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=+7 & (2) \\ x_1x_2x_3=1 & (3) \end{cases}$$

из (1) получаем

$x_1+x_2=6-x_3$

$x_1+x_3=6-x_2$

$x_2+x_3=6-x_1$

Тогда многочлен с корнями $6-x_3$; $6-x_2$; $6-x_1$, т.к. его старший коэф. „1", должен иметь след. вид.

$(x+x_1-6)(x+x_2-6)(x+x_3-6) = (x^2+x(x_1+x_2-12)+x_1x_2-6x_1-6x_2+36)(x+x_3-6) =$

$= (x^3+x^2(x_1+x_2-12+x_3-6)+x((x_1+x_2-12)(x_3-6)+x_1x_2-6x_1-6x_2+36)+(x_3-6)(x_1x_2-6x_1-6x_2+36)) = x^3-12x^2+x(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-6x_1-6x_2-6x_1-6x_2-12x_3+36+72)+$

$+(x_1x_2x_3-6x_1x_3-6x_2x_3+36x_3-6x_1x_2+36x_1+36x_2-216) =$

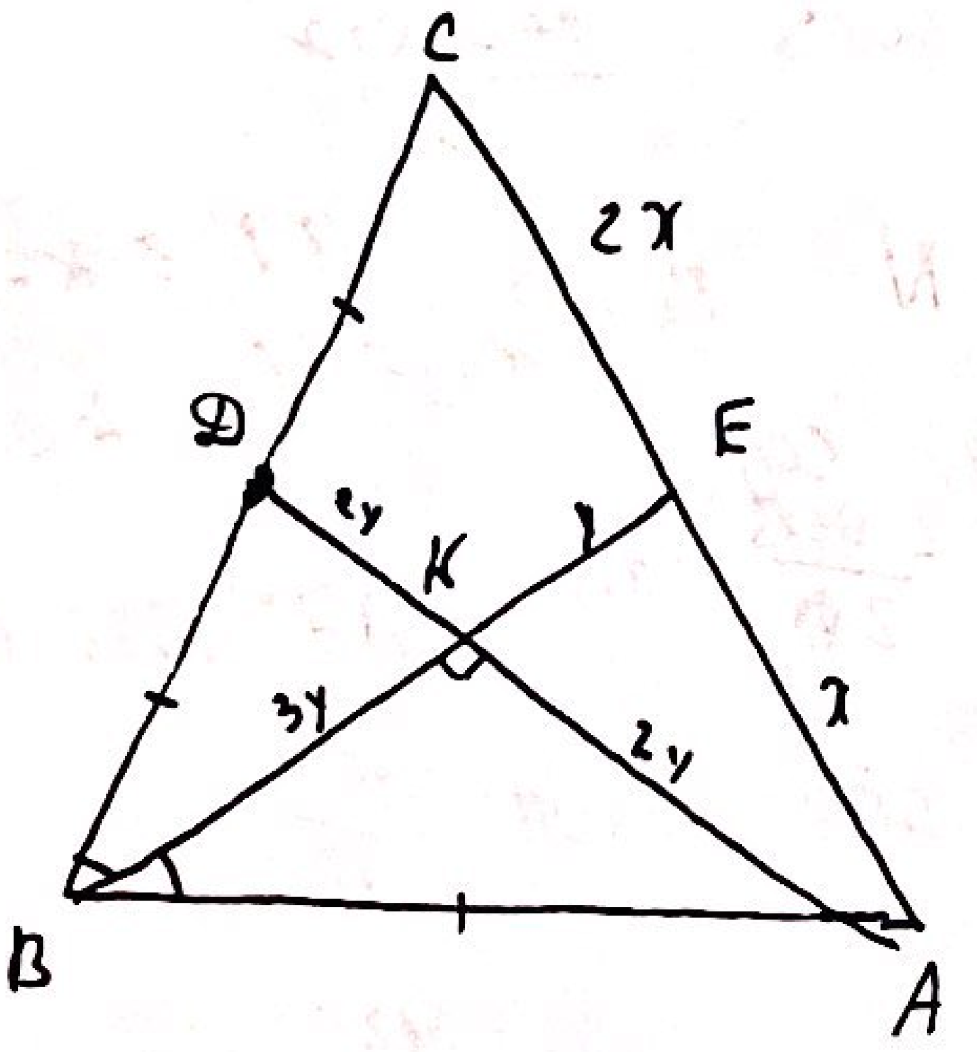
$= x^3-12x^2+x(7-12\cdot6+12\cdot6+36)+1-6\cdot7+36\cdot6-216 =$

$= x^3-12x^2+43x-41$

$a=-12$; $b=43$; $c=-41$

Ответ: $a=-12$; $b=43$; $c=-41$

№4



Дано: $\triangle ABC$; BE - бис.; AD - мед.; $BE=AD$, ~~BE~~ $BE\perp AD$; $AB=5\sqrt{13}$

Найти: $S(ABC)$ - ?

Решение: 1. Пусть $AD\cap BE=K$

BK в $\triangle ABD$ - бис. и выс. => $\triangle ABD$ - равнобед.;

$AB=BD$; $DK=KA$ как медиана

2. По св. бис. треуг.: $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$

$AE=\frac{AB}{2BD}\cdot EC=\frac{1}{2}EC$. Пусть $AE=x$, тогда $CE=2x$

3. По т. Менелая в $\triangle BCE$:

$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EK}{KB}=1$

$KB=3EK$. Пусть $EK=y$, тогда $BK=3y$.

4. $AD=BE$: $BK+KE=4y$

$AK=KD=\frac{1}{2}AD=2y$

37-16-62-52 (123.8)

Чистовик

5. По т. Пифагора в $\triangle BKA$:

$AK^2 + BK^2 = AB^2$

$9y^2 + 4y^2 = 25 \cdot 13$

$y^2 = 25$

$y = 5$, т.к. длина – неотрицательная величина

6. $S(AДB) = \frac{1}{2} S(\triangle BC)$, т.к. у них ~~рав~~ $S(A; BC) = S(A; BД)$, но $BД = \frac{1}{2} BC$.

$S(AДB) = \frac{1}{2} BK \cdot AД = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 4y = 6y^2 = 6 \cdot 25 = \cancel{30}\ 150$

$S(ABC) = 2S(AДB) = 2 \cdot \cancel{30}^{150} = \cancel{60}\ 300$

Ответ: ~~60~~ 300

№2

Пусть весь путь составил $S^{(км)}$; $v_в^{(км/ч)}$ – скорость велосипедиста, тогда $2v_в^{(км/ч)}$ – скорость велосипедиста

Чтобы преодолеть данное расстояние им понадобится соответственно $\frac{S}{v_в}$ и $\frac{S}{2v_в}$; $\frac{S}{2v_в} < \frac{S}{v_в}$. Заметим, что условие „остановился на 2 часа" равносильно тому, что к одному из времён мы приб. 2 часа (чтобы получить итоговое), а условие „выехал на час позже" – прибавить один час. Итоговое время равно (приехали одновременно) Т.к. $\frac{S}{2v_в} < \frac{S}{v_в}$ к $\frac{S}{2v_в}$ необходимо прибавить больше, т.е. случаи, когда велосипедист останавливался на 2 часа невозможны. ($\frac{S}{v_в} + 2 > \frac{S}{2v_в} + 1$ и $\frac{S}{v_в} + 2 = \frac{S}{2v_в} + 1$ или $\frac{S}{v_в} + 3 = \frac{S}{2v_в}$ что невозможно)

I. Автомобиль остановился и выехал позже. Пусть $t = \frac{S}{2v_в}$

$t + 3 = 2t$

$t = 3$, т.е. ехали $2t = 6$ часов, приехали в 20:00

II. Автомобиль остановился, а велосип на час позже

$t + 2 = 2t + 1$

$t = 1$; $t + 2 = 3$, т.е. приехали в 17:00

Ответ: в 17:00 или в 20:00

Чистовик №1

$1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$1+\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$

$1+\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x \;\Big|\cdot\sqrt{2}$

$2\sin 2x+4\cos 2x=\cos 2x-\sin 2x$

$3\sin 2x+3\cos 2x=0 \;\Big|\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}$

$\cancel{\sin 2x}\ \cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=0$

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$

№6.

I Заметим, что при данной нумерации $p_i\cdot p_{k-i+1}=N$; $i\in\{1;2\ldots;k\}$
Это следует из того, что если $N \vdots p_i$, то $N \vdots \frac{N}{p_i}$ (очевидно), т.е. делители разбиваются на пары (если N-точный кв., то парой к $\sqrt{N}$ будет $\sqrt{N}$ и $p_i\cdot p_{k-i+1}=N$ все еще выполнено), в произв. дающие N. При этом из неравенств очевидно, что парой к p_1 будет p_k и т.д.

II. Пусть $\sigma(N)=k$

Тогда $p_3\cdot p_4\cdot p_{k-3}p_{k-2}=N^2$

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2$

Тогда $p_{1876}\geq p_{k-3}$; $\cancel{p_{k-2}}$ $p_{1877}\geq p_{k-2}$

$1876\geq k-3$; $1877\geq k-2$

$1879\geq k$, при этом $\cancel{k\geq 1877}$ $k\geq 1877$

(иначе p_{1877} не существует)

Чистовик

III. Разложим 1877; 1878; 1879 на множители

а) 1877 не делится на 2; 3; 5 из признаков делимости; $1+8+7+7 = 9+14$

$1877 : 7$: -14, 47, -42, 57, -56, 1; частное 268

$1877 : 11$: -11, 77, -77, 7; частное 170

$1877 : 13$: -13, 57, -52, 57, -52, 5; частное 144

$1877 : 17$: -17, 17, -17, 7; частное 110

$45 \cdot 45$: 225, 180, 2025

$1877 : 19$: 171, 167, 152, 15; частное 98

$1877 : 23$: 184, -37, -23, 14; частное 81

$1877 : 29$: 174, 137, 116, 21; частное 64

$1877 : 31$: -186, 17; частное 60

$1877 : 37$: 185, 27; частное 50

$1877 : 39$: 156, 317, 312, 5; частное 48

$1877 : 41$: -164, -237, -205, 32; частное 45

$1877 : 43$: -129, 172... -157, 129, 28; частное 43

$47^2 > 45^2 = 2025 > 1877$

Т.е. 1877 простое число

б) ~~1878~~ $1878 \mid 2$; $939 \mid 3$; 313

313 не дел. на 2; 3; 5 по признаку

$313 : 7$: -28, 33, -28, 5; частное 44

$313 : 11$: -22, -93, -88, 5; частное 28

$313 : 13$: -26, -53, -52, 1; частное 24

$313 : 17$: -17, 143, 136, 7; частное 18

$313 < 19^2 = 361 \Rightarrow 313$ - простое число

в) 1879 не дел на 2; 3; 5 по признакам

$1879 : 7$: -14, 47, -42, 59, -56, 3; частное 268

$1879 : 11$: -11, 77, -77, 9; частное 170

$1879 : 13$: -13, 57, -52, 59, -52, 7; частное 144

$1879 : 17$: -17, 17, -17, 9; частное 110

$1879 : 19$: 171, -169, -152, 17; частное 98

~~1879. П 17~~ Заметим, что если прибавить к остатку при делении 1877 на любое из простых чисел от 7 до 43, то остаток не станет равен делителю (т.е. для 19: $15+2 \neq 19$) тогда 1879 не делится ни на одно из простых чисел до 43. $47^2 > 45^2 = 2025 > 1879$; 1879 - простое.

IV. Заметим, что каждое такое k достигается

Чистовик

i. Для $k=1877$

Пусть $N=q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_c^{\alpha_c}$, где $q_1\ldots q_c$ - простые числа (разложили на простые множители).

Тогда $\sigma(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\times\ldots\times(\alpha_c+1)$. (любой множитель можно брать, а можно нет)

$1877=(\alpha_1+1)\times\ldots(\alpha_c+1)$. 1877 - простое, а $(\alpha_1+1),(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_c+1)\in\mathbb{N}$

Тогда $1877=1877\cdot1$, т.е. одна скобка равна 1877, т.е. $\alpha_{j_1}=\cancel{1866}\ 1876$; а остальные равны 1, т.е. $\alpha_{j_2}=0$

Тогда число имеет вид $q_1^{\cancel{1866}\,1876}$

к примеру подойдет $2^{\cancel{1866}\,1876}$

$N^3=q^{1876\cdot3}=q^{\cancel{5598}\,5628}$ $\sigma(N^3)=\cancel{5598+1=5599}\ 5628+1=5629$

ii. для $k=1879$. Аналогично $N=q^{1878}$, подойдет 2^{1878}

$N^3=2^{1878\cdot3}=2^{\cancel{5604}\,5634}$; $\sigma(N^3)=\cancel{5605}\ 5635$

iii $k=1878=2\cdot3\cdot313=6\cdot313=2\cdot939=3\cdot626=1878\cdot1$
а) б) в) г) д)

а) $N=q_1q_2^2q_3^{312}$, к примеру $N=2\cdot3^2\cdot5^{312}$

$N^3=q_1^3\cdot q_2^6\cdot q_3^{936}$

$\sigma(N^3)=4\cdot7\cdot\cancel{99}\,937=28\cdot937=26236$

б) $N=q_1^5\cdot q_2^{312}$ к примеру $N=2^5\cdot3^{312}$

$N^3=q_1^{15}\cdot q_2^{936}$

$\sigma(N^3)=16\cdot937=\cancel{15192}\ 14992$

в) $N=q_1\cdot q_2^{938}$, к пр. $N=2\cdot3^{938}$

$N^3=q_1^3\cdot q_2^{2814}$

$\sigma(N^3)=4\cdot2815=11260$

г) $N=q_1^2\cdot q_2^{625}$, к пр. $N=2^2\cdot3^{625}$

$N^3=q_1^6\cdot q_2^{1875}$

$\sigma(N^3)=7\cdot1876=13132$

д) $N=q^{1877}$, к пр. $N=2^{1877}$

$N^3=q^{5631}$

$\sigma(N^3)=5631+1=5632$

Все случаи рассмотрены

Ответ: 5629; 5632; 5635; 11260; 13132; 14992; 26236

Черновик

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 + x^2(-x_1-x_2-x_3)$

$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1+x_2 = 6-x_3$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$

$x_1x_2x_3=1$

$(x+x_1-6)(x+x_2-6)(x+x_3-\cancel{x}6)=$

$= x^3 + x^2(x_1+x_2+x_3-18) + x(x_1x_2-6x_1-6x_1+36+x_2x_3-6x_2-6x_3+36+x_1x_3-6x_1-6x_3+36)$

$+(x_1-6)(x_2-6)(x_3-6)=$

$=x^3-12x^2+x(7-12\cdot6+18\cdot6)+(x_1x_2x_3-6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+36(x_1+x_2+x_3)-216=$

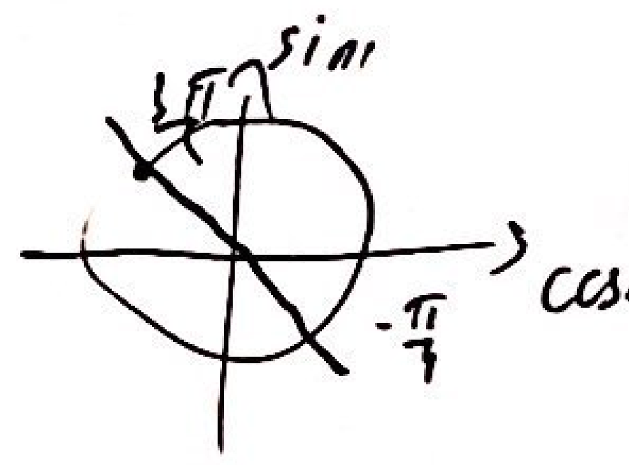
$=x^3-12x^2+43x+1-42+36\cdot6-216 = x^3-12x^2+43x-41$

$1+\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\sin^2 x + 2\sqrt{2}\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x\cos x = 1+\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\sin 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x = \cos 2x\cos\frac{\pi}{4} - \sin 2x\sin\frac{\pi}{4}$

$2\sin 2x + 4\cos 2x = \cos 2x - \sin 2x$

$\sin 2x + \cos 2x = 0$



$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n\in Z$

$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z$

$313 \times 6 = 1878$

9^{1876}

$1876 \times 3 = 5628$

$937 \times 16 = 5422$

$4\cdot7\cdot937$

$938 \times 3 = 2814$

937×28: 7496, 1874, 26236

937×16: 5622, 937, 14992

$2815 \times 4 = 11260$

$\cancel{1835 \times 6}$

$1876 \times 7 = 13132$