вход 12^{53} – 12^{58} подп.

ЛЕ Шифр

0 475629 900008

47-56-29-90
(117.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Москвитина Святослава Сергеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
47-56-29-90	119	21	21	21	14	21	21	X	X

Оценка 100 баллов

100 (сто)

47-56-29-90
(117.2)

Чистовик:

№1

Заметим, что если один пакет был пустым, а потом он стал непустым => количество пустых пакетов увеличилось на 4. Так как изначально был один "главный" пакет, а их стало 101 => у нас есть $(101-1)/4 = 25$ непустых пакетов. Также нужно заметить, что пакеты никаким образом, кроме делания пустых пакетов непустыми, мы получить пакеты не можем. И также любую возможную ситуацию, можно получить из 1 пакета. И изначально при 0 непустых пакетах был 1 пустой => => при 101 пустом у нас есть 25 непустых. В Σ у нас $25+101 = 126$ всего пакетов.

Ответ: 126 пакетов

№3

Пусть $p \neq 2$; $q \neq 2$ => p-простое $\neq 2$ => оно нечётное, аналогично q - нечётное => => $p^q - q^p + 3 = н^н - н^н + н =$ чёт$^{p-1}$, но $p>2$ => => 2^{p-2} - чётное => противоречие.

Пусть $p=2$; $q \neq 2$ => $2^q - q^2 + 3 = 2^1$ => $2^q - q^2 = -1$. Заметим, что $f(x) = 2^x$ растёт быстрее, чем $g(x) = x^2$, при $x > 4$. Значит $f(x) - g(x) = -1$ в одном случае. Это верно при $q = 3$. Если $p \neq 2$; $q = 2$ => $p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$ => $p^2 + 3 = 3 \cdot 2^{p-1}$. Заметим, что $3 \cdot 2^{p-1} > 2^p$ => $p^2+3 > 2^p$, но из замеченного ранее => $p^2+3 > 2^p$ - ограниченное для p сверху.

~~Чер~~ Чистовик:

При $p \leq 4$ $p^2+3 > 2^p$, но $p^2+3 = 3 \cdot 2^{p-1}$ и $4 \geq p \geq 1$. Если перебрать 4 варианта, то получим что $4 \neq 3$; $7 \neq 6$; $12 = 12$; $19 \neq 24$. То есть подходит только $p = 3$; $q = 2$.

Ответ: $p = 3$; $q = 2$ и $p = 2$; $q = 3$

№5

~~Давайте по индукции докажем, что $b_i = 2^{(i-2)^2}$. Пускай для b_i; b_{i+1}; b_{i+2} — работает докажем для b_{i+3}. Заметим, что база работает, начиная с $b_1 = 2^{(-1)^2} = 2$; $b_2 = 2^{0^2}$; $b_3 = 2^{1^2}$. $b_{i+3} \cdot b_{i+1}^2 = b_i \cdot b_{i+2}^2$ — из условия задачи $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow b_{i+3}$.~~

дешифр

№5

Давайте по индукции докажем, что $b_i = 2^{(i-2)^2}$. База работает $b_1 = 2^{(-1)^2}$; $b_2 = 2^{0^2}$; $b_3 = 2^{1^2}$. Пускай для b_i; b_{i+1}; b_{i+2} – работает $\Rightarrow$ $b_{i+3} \cdot b_{i+1}^3 = b_i \cdot b_{i+2}^3$ из условия задачи $\Rightarrow$ $b_{i+3} \cdot 2^{3\cdot(i-1)^2} = 2^{(i-2)^2} \cdot 2^{3i^2} \Rightarrow b_{i+3} = 2^{3i^2+(i-2)^2-3\cdot(i-1)^2} = 2^{i^2+2i+1} = 2^{(i+1)^2}$ $\Rightarrow$ индукция работает

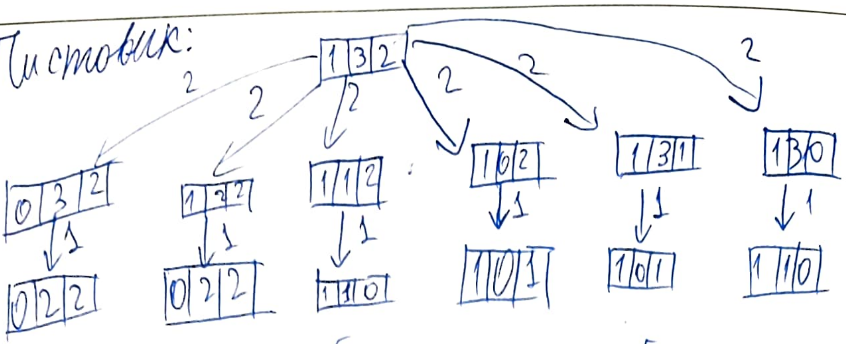
То есть $b_{2023} = 2^{2021^2} = 2^{4084441}$

Ответ: $b_{2023} = 2^{2021^2} = 2^{4084441}$

№6

Заметим, что буквы п, к, и, б, ь, е, г входят по одному разу и их 7 штук. Также заметим, что о, р, в, ы входят более, чем по 1 разу и их 4 штуки. Я предложу стратегию за первого игрока и докажу, что она работает. Из начально зачёркиваем три буквы о. А далее если второй делает что-либо с буквой в мы делаем тоже самое с буквой ы. Если он делает что-либо с п, то тоже самое происходит с к; и–б; ь–е и наоборот. Таким образом эти буквы не испортят порядок шагов. Если сократить все эти шаги, то остается одна буква г; три буквы р и 2 буквы о. Теперь рассмотрим все возможные действия второго. Заметим, что если после нашего хода остаётся две буквы в одинаковом количестве $\Rightarrow$ мы выиграем, так как мы можем просто повт. ходы.

Чистовик:



В этой таблице изображены $\boxed{\;|\;|\;}$ - кол-во г ($1^{ый}$ столбик); р ($2^{ой}$ столбик); о ($3^{ий}$ столбик) $\xrightarrow{2}$ (ход второго) $\xrightarrow{1}$ (ход первого) и также как победить при любом ходе.

Ответ: победит Аня

№5

Если представить наш город в виде графа, где вершины - перекрёстки, рёбра - дороги, то по условию задачи мы получим связный граф и нам в нём нужно посчитать минимум рёбер. Так как минимум в графе k-1 ребро, где k - кол-во вершин => в графе с 230 вершинами минимум 229 рёбер для связности.

Пример на 229 рёбер: сначала идёт сплошная дорога от 1 прос. 23 ул. до 1 прос. 1 ул., потом до 2 прос. 1 ул. и далее до 2 прос. 23 ул. и т.д. Дороги вверх до конца, поворот направо, а далее вниз до конца, все остальные дороги закрыты. У каждого города ровно 2 дороги, кроме двух крайних городов => кол-во рёбер $= \frac{2 \cdot 228 + 1 + 1}{2} = 229$.

Ответ: наибольшее количество дорог $= 407 - 229 = 177$

№2

$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$; заметим что

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{399 \cdot 400} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ заметим, что если взять число вида 4k и проверить утверждение из условия про 6k+1, то получим, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = \frac{a_1}{b}$ $a_1 \vdots 6 \cdot 1 + 1$. Аналогично при расписывание индукции и добавляя к 4k чисел еще 4 мы получим, что каждое следующее $a_x \vdots 6k+1$, где мы брали 4k чисел $\Rightarrow$ при $k = 100$ мы получим, что при сумме всех чисел $a_{100} \vdots 601$.

Ответ: 0.

Черновик:

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{400}=\frac{1}{2}+\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{399\cdot400}$

533

$x^2=625$

$600<625$

$24^2=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$

$\frac{7}{12}+\frac{1}{30}=\frac{37}{60}$

$601 \,|\, 7$

$601 \,|\, 11$

$601 \,|\, 13$

$601 \,|\, 17$

$601 \,|\, 19$

15·4

$\boxed{\frac{533}{840}}$

$1-\frac{1}{6}-\frac{1}{20}$

$601 \,|\, 23$

7·8=56

$56\cdot7=392$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{30}=\frac{11}{30}$

$\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$

$201 \,|\, 3$, 67

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

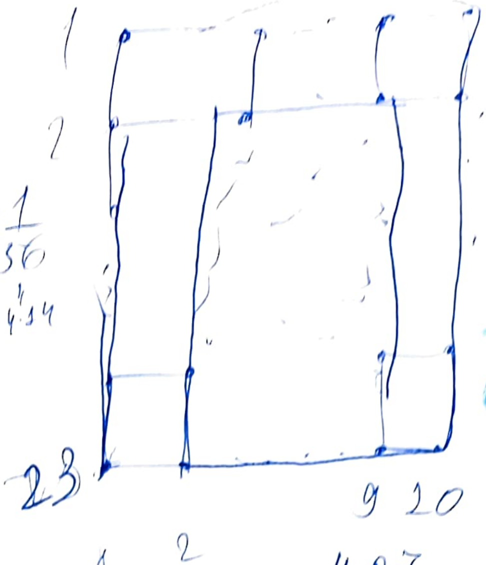
$\frac{7}{10}+\frac{1}{56}=\frac{402}{560}=\frac{201}{280}$

Черновик:

$\times\begin{array}{r}14\\15\\\hline 70\\14\\\hline 210\end{array}$

$\frac{37}{60}+\frac{1}{36}$

$\frac{4}{425}$ $\frac{4}{414}$



16 $\frac{3\cdot 3\cdot 4\cdot 15}{14\cdot 15\cdot 4}$

$23\cdot 10 = 230$

229 рёбер

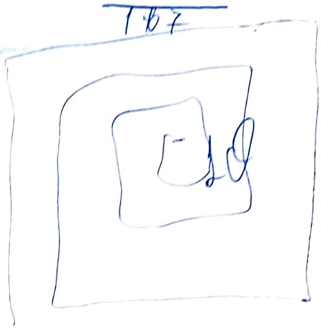
минимум

$\begin{array}{r}407\\-229\\\hline 220\end{array}$ $\boxed{23\cdot 9}$

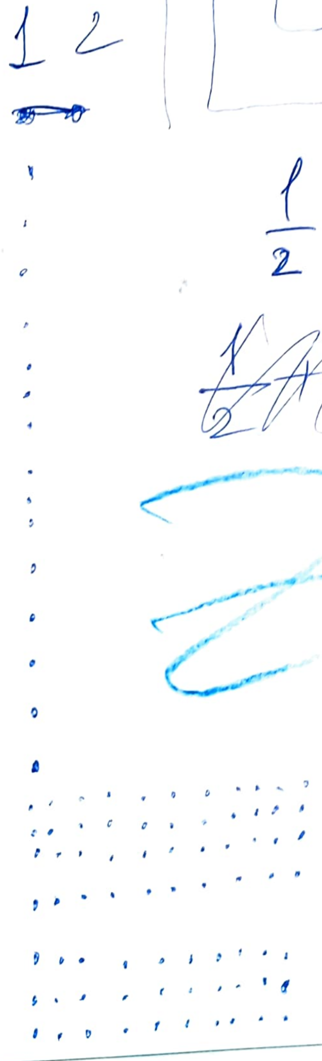
$\begin{array}{r}407\\-230\\\hline 167\end{array}$

407.

$\begin{array}{r}407\\-228\\\hline 177\end{array}$



$1 \equiv 1 \pmod{60}$

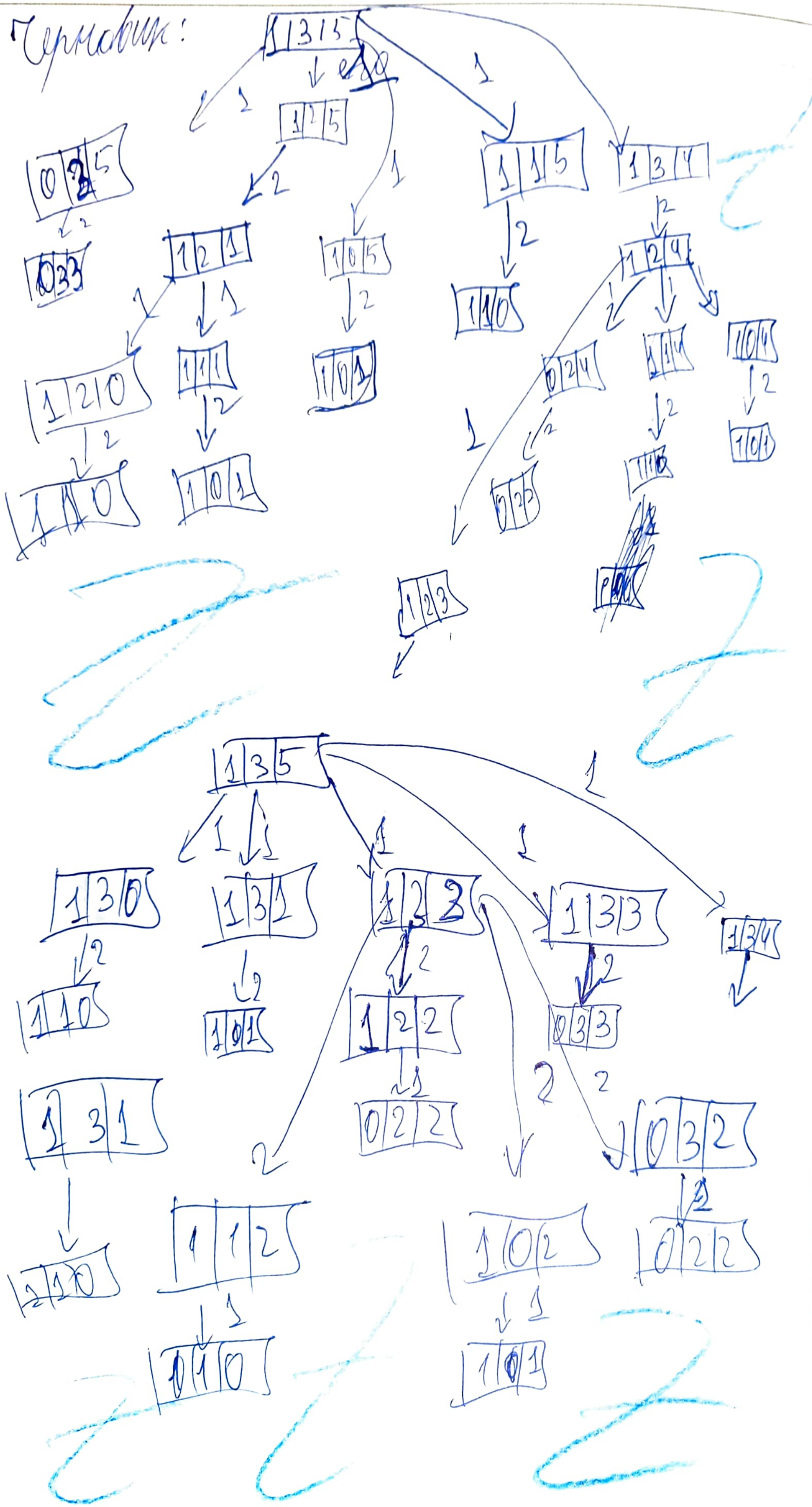


$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \pmod{60}$

$\cancel{\frac{1}{2}}$ $\frac{2}{3}+\frac{1}{20}=\frac{3+20}{60}=\frac{23}{60}$

$23\cdot 9 = 180+27=207$

Черновик:



P_1

1	2	3

1	1	2

1	0	1

1	2	5

1	2	4

$1 \to 1 \to 0$

$3 \to 2 \to 2$

$2 \to 1 \to 1$ $5 \to 1 \to 0$

$2 \to 1 \to 0$ $5 \to 1 \to 1$

7 − 1

2 − 2 => X

3 − 1

5 − 1

1	2	5

$2 \to 1$

$3 \to 2$

$5 \to 3$

$5 \to 1 \to 4$

$5 \to 1$ $2 \to 1 \to 0$

$5 \to 2$ $1 \to 0$

1	2	2

8 − 1

1 3 5

Черновик:

1 2 3

53 − 6 = 47

X+1

y

x

X

7 · 1

1 · 1

$37 \times 14 = 148 + 370 = 518$

0 − 4

X

p − 3

3 − 2

4 − 2

0 − 3

p − 3

533 | 12
48 | 44
53
48
5

1	X+1	X

X+1 → y

p − 0

1 0−4

1 0−4 p−3

0 − X p − X

1	4	3
1	X−1	X

4 → 3 3

3 → X

$\frac{37}{60} + \frac{1}{56} = \frac{533}{14 \cdot 15 \cdot 4}$

1	4	3

4 → X+1

№5 Черновик:

$b_n \cdot b_{n+2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_1 = 2;\ b_2 = 1;\ 1 = 2^{0^2}$

$\boxed{b_3 = 2}$ $\quad 2 = 2^{1^2}$

$\boxed{b_4 \cdot 1 = 2 \cdot 2^3}$ $\quad b_5 \cdot 8^3 = 1 \cdot 2^{12}$

$b_4 = 2^4 = 2^{2^2}$ $\quad \boxed{b_5 = 2^9} = 2^{3^2}$

$$\begin{array}{r} \times\ 2021 \\ 2021 \\ \hline 2021 \\ 40420 \\ 4042000 \\ \hline 4084441 \end{array}$$

1+ 3+ 5+ 6+

$b_6 \cdot 2^{12} = 2 \cdot 2^{27}$

$b_6 = 2^{16} = 2^{4^2}$

$533 \,|\, 13$, 4, 52, 13

$$\begin{array}{r} \times\ 2021 \\ 2021 \\ \hline 2021 \\ 40420 \\ 4042000 \\ \hline 4084441 \end{array}$$

$b_i = 2^{(i-2)^2}$

$b_{i+1} = 2^{(i-1)^2}$ $\quad b_{i+3} \stackrel{?}{=} 2^{(i+1)^2}$

$b_{i+2} = 2^{i^2}$

b_{i+3} – ?

$b_{i+3} \cdot 2^{3(i-1)^2} = 2^{(i-2)^2} \cdot 2^{3i^2}$

$b_{i+3} = 2^{(i-2)^2 + 3 \cdot i^2 - 3(i-1)^2} = 2^{(i+1)^2}$

$i^2 - 4i + 4 + 3i^2 - 3i^2 + 6i - 3 = i^2 + 2i + 1 = (i+1)^2$

$П_1$ $\boxed{О_5}$ $К_1$ $\boxed{Р_3}$ $И_1$ $\boxed{В_2}$ $Б_1$ $Ь_1$ $Е_1$ $Ж_4$ $\boxed{Ю_2}$ $З_1$

1 2 3 4

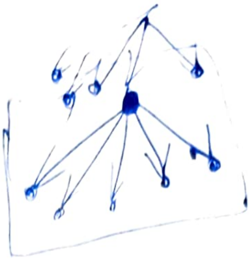
$О_5 \to О_1$

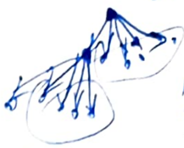
В 1400

Черновик:

№1

$$\begin{array}{r|l} 209 & 11 \\ 11 & \overline{19} \\ \hline 99 & \end{array}$$





1

$1+4$

$$\begin{array}{r} 137 \\ +\ \ 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2021 \\ 2021 \\ \hline 2021 \\ 4042 \\ 4042008 \\ \hline 4084441 \end{array}$$

$4 \cdot 25$

101

0

209

$1+4 \cdot \boxed{25}$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 + 3 = 2^{p-1} + 2^p$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$

$p^2 + 3 = 3 \cdot 2^{p-1}$

$p \vdots 3$

$\boxed{p > 3}$

200

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

$9 + 3 = 3 \cdot 4$

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{399 \cdot 400} = \frac{\frac{400!}{1 \cdot 2} + \frac{400!}{3 \cdot 4} + \ldots}{400!}$

$\boxed{q = 3}$

$q > 3$

$\boxed{\vdots\ x}$

№3

$H^H - H^H + H = \text{Че}\ldots \Rightarrow \times$

$p \neq 2$; $q \neq 2$

$\boxed{p = 2}$

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q - q^2 > 2^3 - 3^2$

$2^q - q^2 = -1$

$\boxed{2^q - 2^3 > q^2 - 3^2}$

$q > 2$

$\frac{1}{56}$

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ 14 \\ \hline 148 \\ 370 \end{array} = \boxed{518}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!