56-16-45-98
(121.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Золотарева Екатерина Алексеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
56-16-45-98	90	15	20	20	20	15	X	X	X

56-16-45-98 (121.3)

стр.1

N1.

$$1-\sqrt{2}\cdot\sin x\left(\cos x+2\sin x\right)+\sqrt{2}\cos x\left(2\cos x-\sin x\right)=$$
$$=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x\cos x=$$
$$=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$$
$$2\cos^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}+1$$
$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}\quad(\text{т.к. }\cos\frac{\pi}{8}>0)$$
$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}+2}{4}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}-2}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\quad(\text{т.к. }\sin\frac{\pi}{8}>0)$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{8}+\sin x\sin\frac{\pi}{8}$$
$$\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\left(\cos^2 x\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2 x\sin^2\frac{\pi}{8}+2\cos x\sin x\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right)=$$
$$=\left(\cos^2 x\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2 x\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos x\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}+2}{4}\cdot\cos^2 x+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot\sin^2 x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\sin x$$
$$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}+2}{2}\cos^2 x+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\sin^2 x+\sqrt{2}\cos x\sin x$$

$$1-\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x\cos x=$$
$$=\cos^2 x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 x+\sin^2 x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\cos x\sin x$$

$$\cos^2 x\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)+\sin^2 x\left(-2\sqrt{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-$$
$$-3\sqrt{2}\sin x\cos x+1=0$$
$$\cos^2 x\left(\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{2}\right)+\sin^2 x\left(\frac{-4\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{2}\right)-3\sqrt{2}\sin x\cos x=-1$$

стр.2

$$\cos^2 x\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)+\sin^2 x\left(\frac{-3\sqrt2}{2}-1\right)-3\sqrt2\sin x\cos x=-1$$

$$\cos^2 x\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)-\sin^2 x\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)-3\sqrt2\sin x\cos x=-1$$

$$\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-3\sqrt2\sin x\cos x=-1$$

$$\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)\cos 2x-\frac{3\sqrt2}{2}\sin 2x=-1$$

Пусть $t=2x$.

$$\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt2}{2}\sin t=-1$$

$\Updownarrow$ (потом нужно будет проверить, что $\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt2}{2}\sin t<0$, т.к. из того, что $a^2=b^2 \Rightarrow |a|=|b|$)

$$\left(\frac92+1+3\sqrt2\right)\cos^2 t+\frac92\sin^2 t-3\sqrt2\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)\sin t\cos t=1$$

$$\cos^2 t\left(3\sqrt2+\frac92\right)-(9+3\sqrt2)\sin t\cos t+\frac72\sin^2 t=0$$

~~$\cos t\left(\cos t(3\sqrt2+1)-(9+3\sqrt2)\sin t\right)=0$~~ ** (продолжение на стр.10)

~~$\left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \cos t(3\sqrt2+1)=(9+3\sqrt2)\sin t\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \operatorname{tg} t=\frac{3\sqrt2+1}{9+3\sqrt2}=\frac{8\sqrt2-3}{21}\end{array}\right.$~~

~~$\frac{3\sqrt2+1}{9+3\sqrt2}=\frac{(3\sqrt2+1)(9-3\sqrt2)}{81-18}=\frac{27\sqrt2-3\sqrt2+9-18}{63}=\frac{24\sqrt2-9}{63}=\frac{8\sqrt2-3}{21}$~~

~~$\frac{8\sqrt2-3}{21}>0 \Rightarrow$ при $t=\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt2-3}{21}\right)$, $\cos t>0$ и $\sin t>0 \Rightarrow \cos t\left(\frac{3\sqrt2}{2}+1\right)-\frac{3\sqrt2}{2}\sin t<0$~~

~~$\frac{8\sqrt2-3}{21} \vee 1$~~

~~$8\sqrt2-3 \vee 21$~~

~~$8\sqrt2 \vee 24$~~

~~$\sqrt2 < 3$~~

$\Downarrow$

~~$\frac{8\sqrt2-3}{21}<1 \Rightarrow$ при $\operatorname{tg} t=\frac{8\sqrt2-3}{21}$, $|\cos t|>|\sin t|$~~

стр. 3

При $t=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$, $\cos t<0$ и $\sin t<0$ —

$|\cos t|>|\sin t| \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t<0$, но

$\left(\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t\right)^2=(-1)^2 \Rightarrow \cos t\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)-$

$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t=-1 \Rightarrow t=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$ подходит.

При $t=\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$ $\cos t>0$ и

$\sin t>0$, $|\cos t|=|\sin t| \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t>0 \neq -1$

т.е. $t=\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$ не подходит

При $\cos t=0$:

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t=-1 \Rightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t=-1$ — не

подходит, т.к. $|\sin t|=1$ (т.к. $\cos t=0$)

Отсюда $t=\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+\pi(2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$

т.е. $x=\frac{t}{2}=\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+\pi(2k+1)}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{2}-3}{21}\right)+\pi(2k+1)}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

№2.

Т.к. скорость мотоц. > скорость велос., мотоц. понадобилось меньше времени, чтобы попасть из A в B. Отсюда остановку в пути делал мотоциклист (иначе даже если бы вел. выехал на час позже мот., мот. ехал бы дольше вел.). Т.е. возможны 2 случая:

I случай (мотоциклист выехал раньше велосипедиста):

Пусть скорость вел. $= v$, тогда скорость мостр.4

точки места $= 2v$. Пусть расстояние между А и В равно S. Т.к. мот. выехал на час раньше вел., но ост. в пути на 2 часа, мот. ехал на час ~~дол~~ ~~ше~~ меньше вел. Т.е.:

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{2v} + 1$$

$$\frac{S}{2v} = 1$$

$S = 2v \Rightarrow$ они прибыли в В в 16:00.

II (мот. выехал позже вел.):

скорость вел. $= v$, скорость мот. $= 2v$.

Мот. ехал на 3 часа меньше, чем вел. Т.е.:

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{2v} + 3$$

$$\frac{S}{2v} = 3$$

$S = 6v \Rightarrow$ они прибыли в В в [redacted] 19:00

Ответ: в 16:00 или в 19:00.

№3.

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$$

x_1, x_2, x_3 – корни.

Пусть $P(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 1$.

Т.к. $P(x)$ – приведённый (коэф. при $x^3 = 1$), $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (т.к. $P(x) \vdots x - x_1$, $P(x) \vdots x - x_2$ и $P(x) \vdots x - x_3$ по следствию из т. Безу).

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3$$

[redacted] Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

(эту же систему можно было получить по обобщённой т. Виета)

стр. 5

$x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1

Из аналогичных соображений (т.к. x^3+ax^2+bx+c – приведённый) получим:

$a=-(x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1)=-2(x_1+x_2+x_3)=-2\cdot 6=-12$

$b=(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)=$

$=x_1^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+x_2^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2+x_1x_3+$

$+x_1x_2+x_2x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=6^2+7=36+7=43$

$c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=-(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)\cdot$

$\cdot(x_1+x_3)=-(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+$

$+x_2^2x_3+x_2x_3^2)=-((x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3)=$

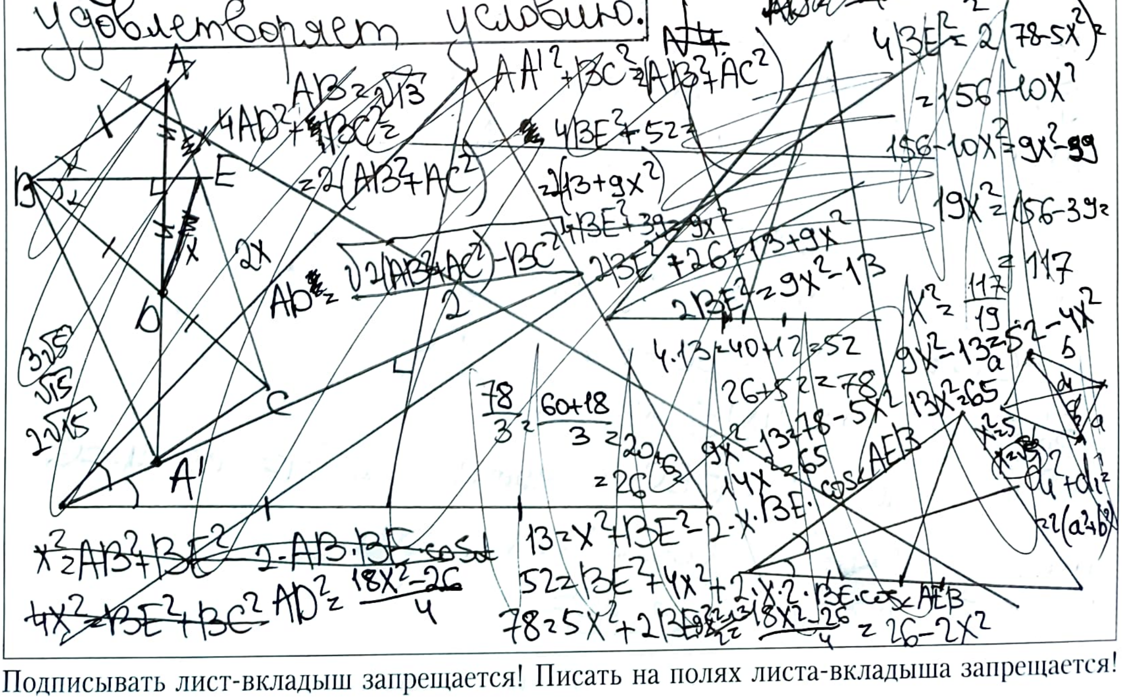
$\cancel{(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1^2x_3+}$

$\cancel{+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2+x_1x_3^2}$

$=-(6\cdot 7-1)=-41.$ *

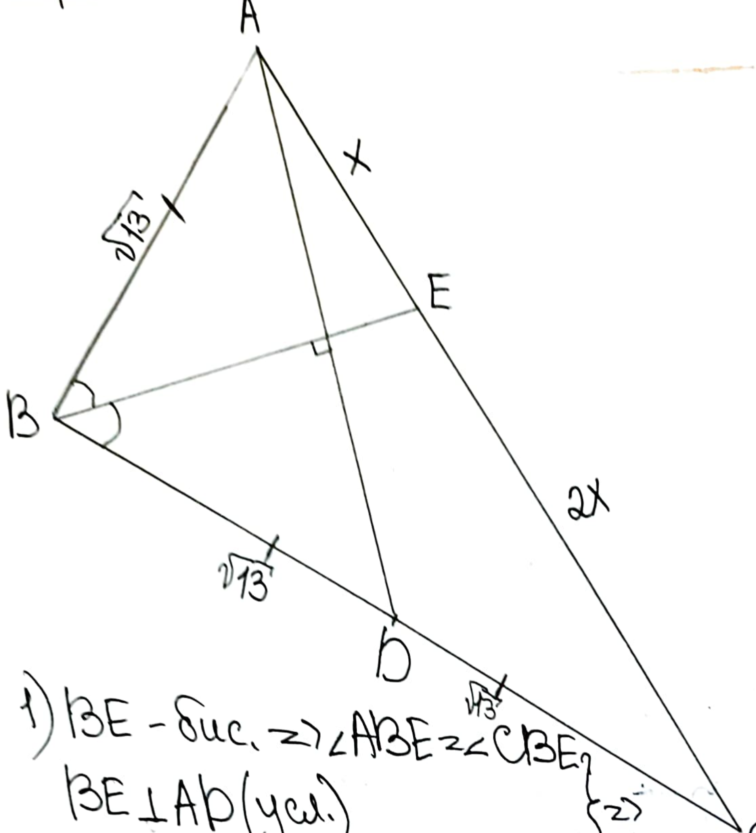
Ответ: при $a=-12$, $b=43$, $c=-41$.

*Прим.: очевидно, что такие a, b, c существуют, т.к. $x^3+ax^2+bx+c=(x-(x_1+x_2))(x-(x_2+x_3))(x-(x_1+x_3))$ удовлетворяет условию.



стр. 6

№4.



1) $\left.\begin{array}{l} BE \text{ – бис.} \Rightarrow \angle ABE = \angle CBE \\ BE \perp AD \text{ (усл.)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle ABD$ бис. из угла B также является высотой $\Rightarrow AB = BD$ (т.к. $\triangle ABD$ – р/б по признаку).

Значит $AB = BD = DC = \sqrt{13}$ ($AB = \sqrt{13}$ по усл.)
т.к. AD – медиана

2) Пусть $AE = x$.

BE – бис. $\Rightarrow$ по т. о бис.: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$, но

$BC = BD + DC = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = 2AE = 2x$.

По т. косинусов для $\triangle ABE$:

$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2 \cdot AE \cdot BE \cdot \cos\angle AEB$

$13 = x^2 + BE^2 - 2 \cdot x \cdot BE \cdot \cos\angle AEB$

По т. косинусов для $\triangle BEC$:

$BC^2 = BE^2 + EC^2 - 2 \cdot BE \cdot EC \cdot \cos\angle BEC$

$52 = BE^2 + 4x^2 - 4x \cdot BE \cdot \cos\angle BEC$

Т.к. $\angle AEB$ и $\angle BEC$ – смежные, $\angle AEB = 180° - \angle BEC$,

т.е. $\cos\angle AEB = -\cos\angle BEC$. Отсюда:

$52 = BE^2 + 4x^2 + 4x \cdot BE \cdot \cos\angle AEB$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 13 = x^2 + BE^2 - 2\cdot AE\cdot BE\cdot\cos\angle AEB \\ 52 = 4x^2 + BE^2 + 4\cdot AE\cdot BE\cdot\cos\angle AEB \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим со вторым уравнением системы:

$$26+52 = (2x^2+2BE^2-4\cdot AE\cdot BE\cdot\cos\angle AEB)+(4x^2+BE^2+4\cdot AE\cdot BE\cdot\cos\angle AEB)$$

$$78 = 6x^2+3BE^2$$

$$BE^2+2x^2=26 \qquad BE^2 = 26-2x^2$$

Выразим AD по формуле для нахождения длины медианы:

$$AD = \frac{\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}}{2}$$

$$AD^2 = \frac{2(AB^2+AC^2)-BC^2}{4} = \frac{2(13+9x^2)-52}{4} = \frac{18x^2-26}{4} = \frac{9x^2-13}{2}$$

Т.к. $AD = BE$ (усл.), $BE^2 = AD^2 \Rightarrow 26-2x^2 = \frac{9x^2-13}{2}$

$$52-4x^2 = 9x^2-13$$

$$13x^2 = 65$$

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow AC = 3x = 3\sqrt{5}.$$

Итого: $AB=\sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$. S_{ABC} найдём по формуле Герона.

$$p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{\sqrt{13}+2\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{13}+3\sqrt{5})}{2}\cdot\frac{(\sqrt{13}+3\sqrt{5})}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{13}-3\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{(3\sqrt{13}+3\sqrt{5})(3\sqrt{13}-3\sqrt{5})(\sqrt{13}+3\sqrt{5})(-\sqrt{13}+3\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{(117-45)(45-13)}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{72\cdot 32}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3^2\cdot 2^3\cdot 2^5} = \frac{1}{4}\sqrt{3^2\cdot 2^8} = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot 2^4 = 3\cdot 2^2 = 12$$

Ответ: 12.

стр. 8 №5. для $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k$

Покажем, что $p_i \cdot p_{k+1-i} = N$, индукцией по i.

База $(i=1)$: $p_1 = 1, p_k = N \Rightarrow p_1 \cdot p_k = N$ - верно

Переход $(i \to i+1)$:

Предположим, что $p_{i+1} \cdot p_{k-i} \neq N$.

I случай $(p_{i+1} \cdot p_{k-i} > N)$:

Рассмотрим $x = \frac{N}{p_{k-i}}$. Т.к. p_{k-i} - делитель N, то x - тоже делитель N. Т.к. $p_i \cdot p_{k-i+1} = N$ по предположению индукции, $p_i = \frac{N}{p_{k-i+1}} < \frac{N}{p_{k-i}} = x$ (т.к. $p_{k-i} < p_{k-i+1}$, все p_j и N > 0). Но $p_{i+1} > \frac{N}{p_{k-i}} = x$ (т.к. $p_{i+1} \cdot p_{k-i} > N$). Т.е. $p_i < x < p_{i+1}$, x - делитель N - противоречие.

II случай $(p_{i+1} \cdot p_{k-i} < N)$:

Рассмотрим $y = \frac{N}{p_{i+1}}$. Т.к. p_{i+1} - делитель N, y - тоже делитель N. Т.к. $p_i \cdot p_{k-i+1} = N$ по предположению индукции, $p_{k-i+1} = \frac{N}{p_i} > \frac{N}{p_{i+1}} = y$. Но $p_{k-i} < \frac{N}{p_{i+1}} = y$ (т.к. $p_{i+1} \cdot p_{k-i} < N$). Т.е. $p_{k-i} < y < p_{k-i+1}$, y - делитель N - противоречие.

Значит $p_3 \cdot p_{k-2} = N$ и $p_4 \cdot p_{k-3} = N$.

Т.е. $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{k-2} \cdot p_{k-3} = N^2$.

Если $1876 < k-3$, то $p_{1876} \cdot p_{1877} < p_{k-3} \cdot p_{k-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} < N^2$ - противоречие $\Rightarrow k-3 \leq 1876 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \leq 1879$.

Очевидно, что $k \geq 1877$, иначе p_{1877} не существует.

стр. 9

Значит k может быть равно 1877, 1878 или 1879.
Заметим, что любое $k \in \{1877; 1878; 1879\}$ удовлетворяет условию. Ведь $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{k-2} \cdot p_{k-3} = N^2$, при таких k $p_{k-3} \leq p_{1876}$ и $p_{k-2} \leq p_{1877}$, т.е. $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2$.

I случай ($k=1877$):
Пусть $N = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q_t^{\alpha_t}$. Тогда известный факт, что $\sigma(N) = k = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_t+1)$.

$1877 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_t+1)$

$\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\ldots(3\alpha_t+1) = ?$

1877 — простое $\Rightarrow t=1$ и $\alpha_t = 1876 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = 3\alpha_t+1 = 3\cdot 1876+1 = 3000+2400+210+18+1 =$
$= 5628+1 = \underline{5629}$

II случай ($k=1878$):

$1878 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_t+1)$

$1878 = 2\cdot 939 = 2\cdot 3\cdot 313$ (313 — простое).

1 случай ($t=1$):

$\alpha_t = 1877 \Rightarrow \sigma(N^3) = 3\alpha_t+1 = 3\cdot 1877+1 = \underline{5632}$

2 случай ($t=2$):

$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1) = 2\cdot 3\cdot 313$

НУО, $\alpha_2 \geq \alpha_1$. $\quad \underline{\alpha_1+1 \geq 2}$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_2 = 313 \\ \alpha_2 = 626 \\ \alpha_2 = 939 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = (3\cdot 6+1)\cdot(313\cdot 3+1) = 940\cdot 19 = \underline{17860} \\ (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = (3\cdot 3+1)(3\cdot 626+1) = 1879\cdot 10 = \boxed{18790} \\ (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = (3\cdot 2+1)(3\cdot 939+1) = 2817\cdot 7 = \boxed{19719} \end{array}\right.$$

3 случай ($t=3$):

$\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)(3\alpha_3+1) = 2\cdot 3\cdot 313$

НУО, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$.

Тогда $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 313 \Rightarrow \sigma(N^3) = (3\cdot 2+1)(3\cdot 3+1)\cdot$
$\cdot(3\cdot 313+1) = 940\cdot 7\cdot 10 = \underline{65800}$

стр. 10

III случай ($k=1879$):

$(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_t+1)=1879$

1879 – простое $\Rightarrow t=1$.

$\alpha_t=1878 \Rightarrow \sigma(N^3)=3\alpha_t+1=3\cdot1878+1=3000+2400+$
$+210+24+1=5634+1=\underline{5635}$

Ответ: 5629; 5632; 17860; 18790; 19719; 65800; 5635.

**№1 (продолжение):

$\left(\frac{9}{2}+3\sqrt{2}\right)\cos^2 t-(9+3\sqrt{2})\sin t\cos t+\frac{7}{2}\sin^2 t=0$

~~sin t~~ $\cos t=0$ не подходит $\Rightarrow \cos t\neq0$

$\left(\frac{9}{2}+3\sqrt{2}\right)-(9+3\sqrt{2})\operatorname{tg} t+\frac{7}{2}\operatorname{tg}^2 t=0$

Решаем, находим t, выбираем то, где $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t<0$, $x=\frac{t}{2}$.