0 969961 330000

96-99-61-33
(138.2)

выход: 15:17
вход: 15:19
брал доп. лист (1 шт)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Кучиной Марины Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
96-99-61-33	100	20	20	20	20	0	20		

 100 (сто)

ЧИСТОВИК 1

1	2	3	4	5	6	1

№1.

$1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1+\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2x+2\sqrt{2}\cos^2x+\sqrt{2}\sin x\cos x=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1+2\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\cos^2x-\sin^2x)=1+\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x \quad |\cdot\sqrt{2}$

$2\sin 2x+4\cos 2x=\cos 2x-\sin 2x$

$3\sin 2x=-3\cos 2x$

При $\cos 2x=0$ получаем $\sin 2x=0$, не вып-ся осн. триг. тождество $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1 \Rightarrow \cos 2x\neq 0$.

Поделим на $\cos 2x\neq 0$:

$3\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-3$

$\operatorname{tg}2x=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \; k\in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \; k\in Z.$

№2.

Пусть v (км/ч) – скорость велосипедиста, тогда $2v$ – скорость автомобилиста. Будем сокращать след. образом: а – автомобилист, в – велосипедист. Возможны 4 случая: 1) а выехал в 14:00 и сделал остановку; 2) а выехал в 14:00, остановку делал в; 3) а выехал на час позже (т.е. в 15:00) и сделал остановку; 4) а выехал в 15:00, остановку сделал в. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) Пусть t(ч) – время, которое двигался а, тогда время от старта до пункта В – $t+2$, время, которое ехал в – $(t+2)-1=t+1$ (т.к. выехал на час позже). Тогда расст. от А до В равно: $2vt=v(t+1)$, откуда $vt=v$, $t=1$ (час) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ время прибытия в В – ~~14:00~~ 14:00+1 ч+2 ч = 17:00

(см. на след. листе)

ЧИСТОВИК 2

№ 2 (продолжение)

2) t(ч) = время движения а, ~~Врем~~ тогда время движения его от A до B − t, время движения б от A до B − t − 1, с учётом остановки он двигался $t-1-2=t-3$ (ч)

Расст. от A до B: $2vt = v(t-3)$, $vt=-3v$, $t=-3$ − противоречие со смыслом задачи, такая ситуация невозможна

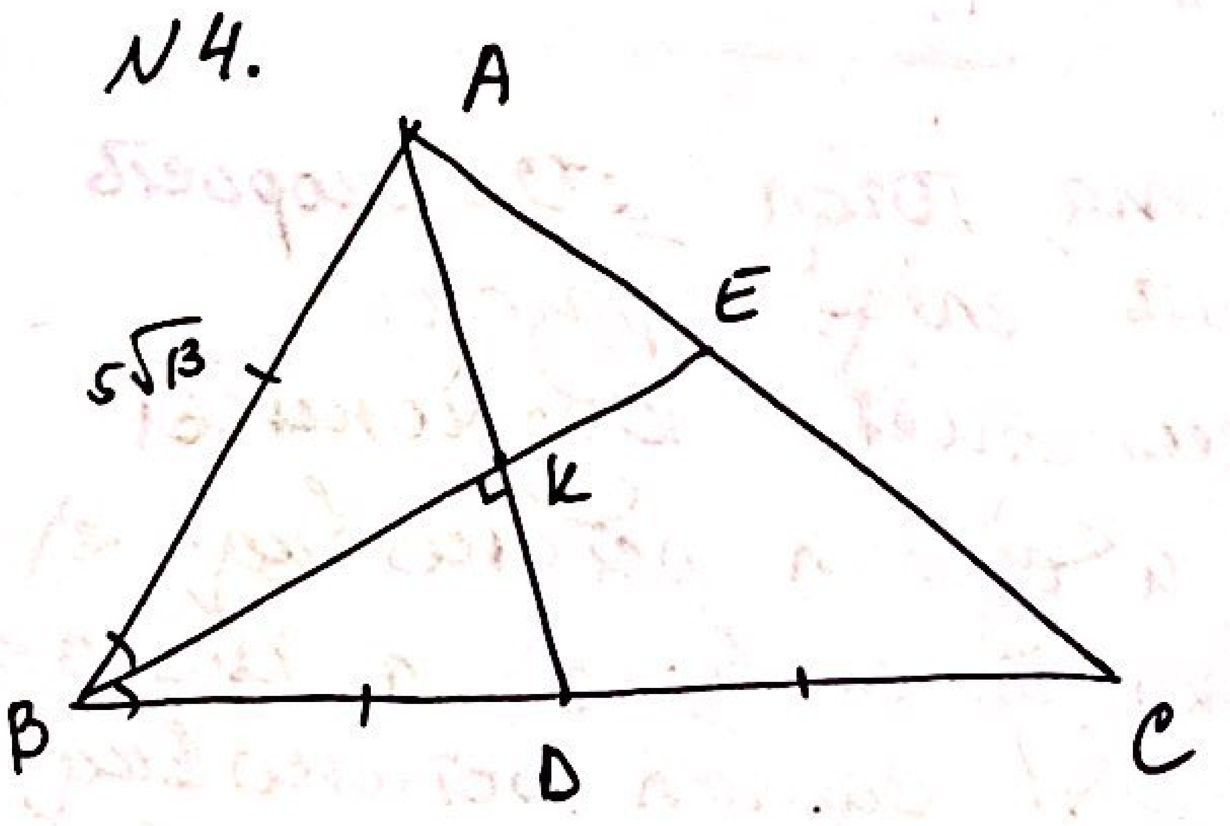
3) t (ч) − время движения а, с учетом остановки время от его старта до прибытия в B − t+2, время движения б (стартовал на 1 ч. раньше) − $t+2+1=t+3$. Расст. от A до B: $2vt = v(t+3)$, $vt = 3v$, $t=3$ => время прибытия в B − $15{:}00 + 3ч + 2ч = 20{:}00$.

4) t (ч) − время движения а; время ~~движения б. из~~ от старта б до приезда в B − t + 1, с учётом ост. время движения б − $t+1-2=t-1$. Расст. от A до B: $2vt = v(t-1)$ $vt=-v$ $t=-1$ − не удовл. условию задачи, такая ситуация невозможна

Значит, время прибытия в B − 17:00 (ситуация 1) или 20:00 (ситуация 2)

Ответ: 17:00 или 20:00

№ 4.



1) Пусть $K = AD \cap BE$

2) В $\triangle ABD$ BK − бис-са и высота => $AB = BD = 5\sqrt{13}$.
Т.к. $BC = 2BD$, то $BC = 10\sqrt{13}$

3) По св-ву бис-сы треугольника $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC} = \frac{5\sqrt{13}}{10\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$.

Пусть $AE = x$, тогда $CE = 2x$, $AC = 3x$.

4) Т.к. $BE = AD$, то $BE^2 = AD^2$

5) $BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot CE = 5\sqrt{13} \cdot 10\sqrt{13} - x \cdot 2x = 650 - 2x^2 = 50 \cdot 13 - 2x^2$

6) $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$, $AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} =$

$= \frac{2 \cdot (5\sqrt{13})^2 + 2 \cdot (3x)^2 - (10\sqrt{13})^2}{4} = \frac{50 \cdot 13 + 18x^2 - 100 \cdot 13}{4} = \frac{18x^2 - 50 \cdot 13}{4}$

(см. на след. листе)

96-99-61-33 (138.2)

ЧИСТОВИК 5

~~Рас~~ N 6 (продолжение)

Рассмотрим $\alpha(N) = 1878 = 2\cdot 3\cdot 313$. Тогда возможны след. ситуации:

1) $N = q_1^{\alpha_1}$, $\alpha_1 + 1 = 1878$, $\alpha_1 = 1877$, $\alpha(N^3) = 3\alpha_1 + 1 = 5631 + 1 = 5632$

у N только 1 простой дел-ль

2) у N 2 простых дел-ля: $N = \cancel{\alpha_1} q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}$, тогда

2.1) $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 3\cdot 313 = 939$; $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \cancel{930}$ 938

$\alpha(N^3) = \cancel{3\alpha_1 + 3\alpha} (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = 4\cdot \cancel{2791}$ 2814 $= \cancel{11164}$ 11256

2.2) $\alpha_1 + 1 = 3$, $\alpha_2 + 1 = 2\cdot 313 = 626$; $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 625$

$\alpha(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = 7\cdot 1876 = \underline{13132}$

2.2) $\alpha_1 + 1 = 313$, $\alpha_2 + 1 = 6$; $\alpha_1 = 312$, $\alpha_2 = 5$

$\alpha(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1) = 16\cdot 937 = \underline{14992}$

3) у N 3 простых дел-ля: $N = q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot q_3^{\alpha_3}$, тогда

$\begin{cases}\alpha_1+1=2\\ \alpha_2+1=3\\ \alpha_3+1=313\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=2\\ \alpha_3=312\end{cases}$

$\alpha(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)(3\alpha_3+1) = 4\cdot 7\cdot 937 = \cancel{26236}$

$= 28\cdot 937 = \underline{26236}$.

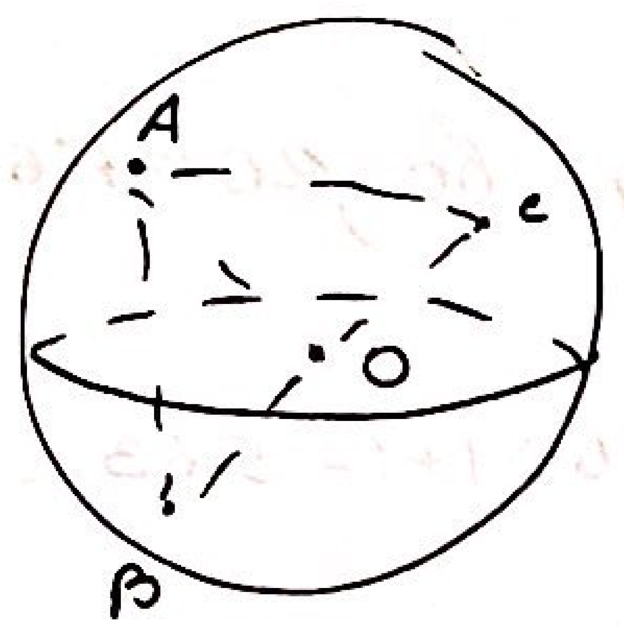
Ответ: 5629; 5632; 5635; ~~11164~~ 11256; ~~14992~~ 13132; 14992; 26236.

(**) для нахождения каждого дел-ля „выбираем" степень каждого из простых мн-лей q_i, она от 0 до α_i — (α_i+1) вариант.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЧИСТОВИК 6.

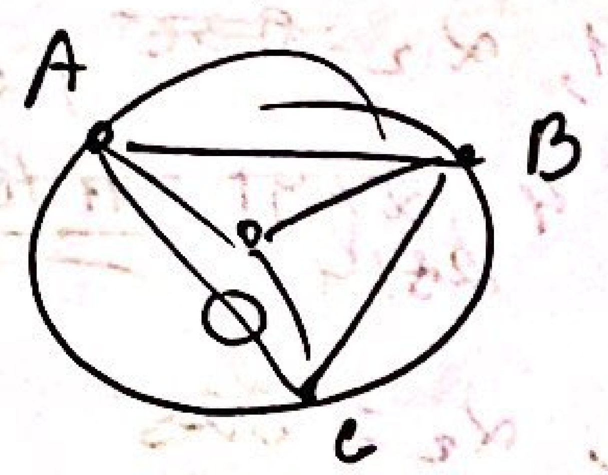
№5.



Пусть O – центр сферы, R – её радиус.

Рассмотрим сечения сферы, проходящие ч/з A, C, O; A, B, O; B, C, O.

(*) Заметим, что это ~~не~~ может быть одно сечение, ~~также~~ тогда A, B, C, ~~O~~ лежат на окр-ти с центром O.



Длина дуги этой окр-ти –

$2\pi R = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} = 20\pi + 12\pi + 16\pi =$

$= 48\pi \Rightarrow R = 24.$

ЧЕРНОВИК 1

① $1+\sqrt{2}\sin x(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1+2\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1+\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

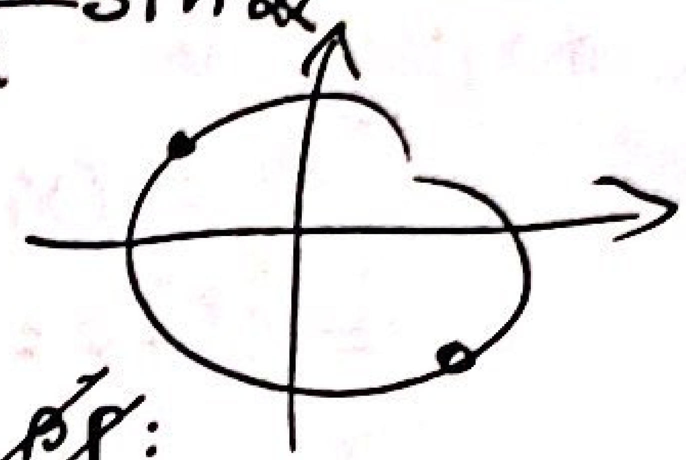
$1-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=1-3\sqrt{2}$ от 0 до 2

до $1+3\sqrt{2}$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ $2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})=1+\cos(2x+\frac{\pi}{4})=$

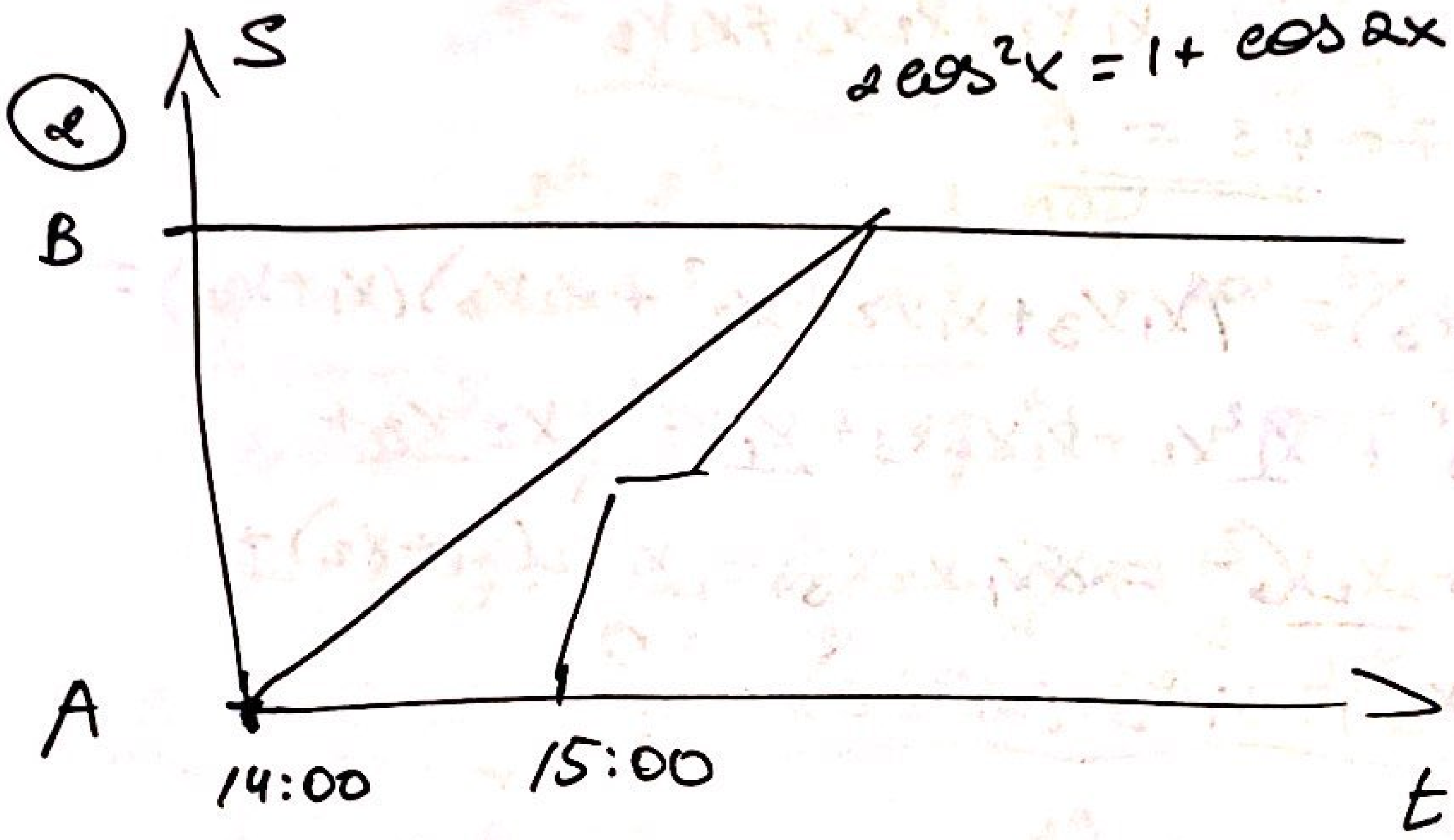
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$2\cos^2 x=1+\cos 2x$



вр:
~~ост.~~

②



А в 14, в в 15 + ост. –

$v_A=2v_B$

авт. вел.

в пути → t $t-3$

t $t-1$

$t-3$ t

$t-1$ t

$2vt=v(t-3)$

$vt=-3v$ ∅

$2vt=v(t-1)$

$vt=-v$

$2v(t-3)=vt$

$vt=6t$ $v=6$

$12(t-3)=6t$

$6t=3\cdot 12$ $t=6$ $21:00$

$2v(t-1)=vt$

$vt=2v$

$2v(t-3)=vt$?

$vt=6v$

$t=6$ 21:00

$2v(t-1)=vt$

$vt=2v$ ⇒ 17:00

$t=2$ с 15 до 17

с 14 до 17

t ~~с ост.~~ без ост.

t+1 + с ост. –

t+2

авт. без ост.

→ t

с ост. $t+2$ — $t+1$, $t+3$

$2vt=v(t+1)$

$vt=v$ $t=1$? → $\frac{t+3}{t-1}$ 3 17

$2vt=v(t+3)$

$vt=3v$ $t=3$? → 5 15+5=

t

$t+2$ $t+1$ $2v(t+1)=vt$

$t+3$ $2v(t+3)=$

ЧЕРНОВИК 2

(3) $x^3-6x^2+7x-1=0$ $x^3+ax^2+bx+c=0$

$-x_1x_2x_3=-1$ $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$x_1x_2x_3=1$

$(x-x_1-x_2)(x-x_2-x_3)(x-x_3-x_1)=0$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$

$x_1+x_2+x_3+x_2+x_1+x_3=-a=$

$x_1+x_2+x_3=6$

$=2(x_1+x_2+x_3)=12$ $a=-12$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)=$

$=x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_2x_3+x_1x_2+$

$+x_1x_3+x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_1x_3+3x_2x_3=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=$

$=6^2+7=36+7=43=b$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=(x_1x_3+x_1x_2+x_2^2+x_2x_3)(x_1+x_3)=$

$=x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+$

$+x_1x_2x_3+x_2x_3^2=2x_1x_2x_3+x_1x_2(x_1+x_2)+$

$+x_2x_3(x_2+x_3)+x_1x_3(x_1+x_3)$?

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_1+x_3)=$

$=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_3x_2^2+x_2x_3^2$

~~$(x_1x_2)^2+(x_2x_3)^2+(x_1x_3)^2+2x_1x_2x_3$~~

(2) A
14:00 15:00
t

1) с ост. A => B $t+2-1=t+1$ $2vt=v(t+1)$
$vt=v$ $t=1$
$14+1+2=17$

2) с ост. B => B $t-1-2$ $2vt=v(t-3)$
$vt=-3v$ ∅

3) B – 15:00, с ост. B $-t+2-1=t+1$ $2v(t+1)=vt$ ∅

4) B – 14:00, с ост. A $t-2-1=t-3$ $2v(t-3)=vt$
$vt=6v$ $14:00+6=$
$t=6$ $=20:00$

---

2 12
4 124
8 1248

k $p_i \to p_i^3$

$q_1^{\alpha}\cdot q_2^{\beta}\cdot q_3^{\gamma}$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ – кол-во дел.

96-99-61-33 (138.2)

ЧЕРНОВИК 5

6) 1877 1878 1879 — число дел. №

$43 \times 43 = 1849$ $44 \times 44 = 1936$ $90\ 43$ 17×17 19×19

12 — 2
124 — 3
1248 — 4

$1878 : 3 = 626$ $626 : 2$ 813 $313 \cdot 2 \cdot 3$

1236 — 4

$6^3 = 36 \cdot 6 = 216 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 3^3 \cdot 2^3$ $3^2 \cdot 2^2$ $3 \cdot 3 = 9$ $4 \cdot 4 = 16$ $3 \cdot 4 + 4$?

1 2 3 4 6 8 9 12 | 18 · 24 · 27 · 36 · … …

$6 \cdot 6 = 18$ $12 \cdot 18 = 180 + 36 = 216$

$\alpha, \alpha^2, \alpha^3$

$4 \cdot 3 = 12$ $2 \cdot 3 = 6$

$3^3 \cdot 2^3$ 8 пар

1877 1878 1879 — кол-во дел-лей N^2

$N = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q_3^{\alpha_3}$ $\sigma(N^2) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_b+1)$

$\sigma(N^3) = (\alpha_1+2)\ldots(\alpha_n+2)$

2 3 5 7 11 | 13 17 19 23 29 31 37 41 43

$1800 = 30 \cdot 60$
$31 \cdot 60 = 1831$
$31 \cdot 61 = 1862$ ×

$29 \times 61 = 1769$ $29 \times 63 = 1827 + 58 = 1885$ 1400 $277 : 7$? $280 : 7$

$37 \cdot 60 = 1840$ ~~$17 \cdot 5 = 85$~~ $17 \cdot 10$

~~$41 \cdot 60 = 2400 + 60 =$~~ $140 \times 13 = 1820$ $110 \cdot 17 = 1870$

$45 \times 41 = 1845$

$23 \cdot 80 = 1800 + 270$ 1880 $140 \times 13 = 1820$ 1720 $1850 = 150 \cdot 13$

$23 \cdot 80 = 1600 + 240 = 1840$ 1886

1846

$\alpha \to 3\alpha$ $150 \times 13 = 1950$ $1849 \cdot 43$ $1859 \times 13 = 1872$ $25 \times 13 = 325$

$(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots$ $18 \times 18 = 324$ $2 \cdot 3$ $2 \cdot 2 = 4$ $4 \cdot 4 = 16$

$(3\alpha+1)\ldots$

313 $92 \times 19 = 1748$ $95 \times 19 = 1805$ $93 \times 19 = 1767$ $120 \times 13 = 1560$

$15 \times 15 = 225$ $17 \times 17 = 289$

ЧЕРНОВИК 6

313 × 6 = 1878

1876 × 3 = 5628

1878 × 3 = 5634

1877 × 3 = 5631

937 × 28 = 7496, 1874

2291 × 4 = 11164

930 × 3 = 2790

1876 × 7 = 13132

937 × 28 = 7496, 1974, 27236

625 × 3 = 1875

937 × 16 = 5622, 937, 14992

312 × 3 = 936

937 × 28 = 7496, 1874, 26236

$3\sqrt{85}$

$3\sqrt{5} - \sqrt{13}$

9

$50\cdot 13 - 2x^2 = \frac{50\cdot 13 + 18x^2 - 100\cdot 13}{4}$

$200\cdot 13 - 8x^2$

5 16

$25\cdot 5 = 100 + 25$

312 × 3 = 936

937 × 16 = 5622, 937, 14992

45 − 13

32

1878

$2\cdot 3\cdot 813$

$4\cdot 939$

938 × 3 = 2814

2814 × 4 = 11256

7

625 · 3

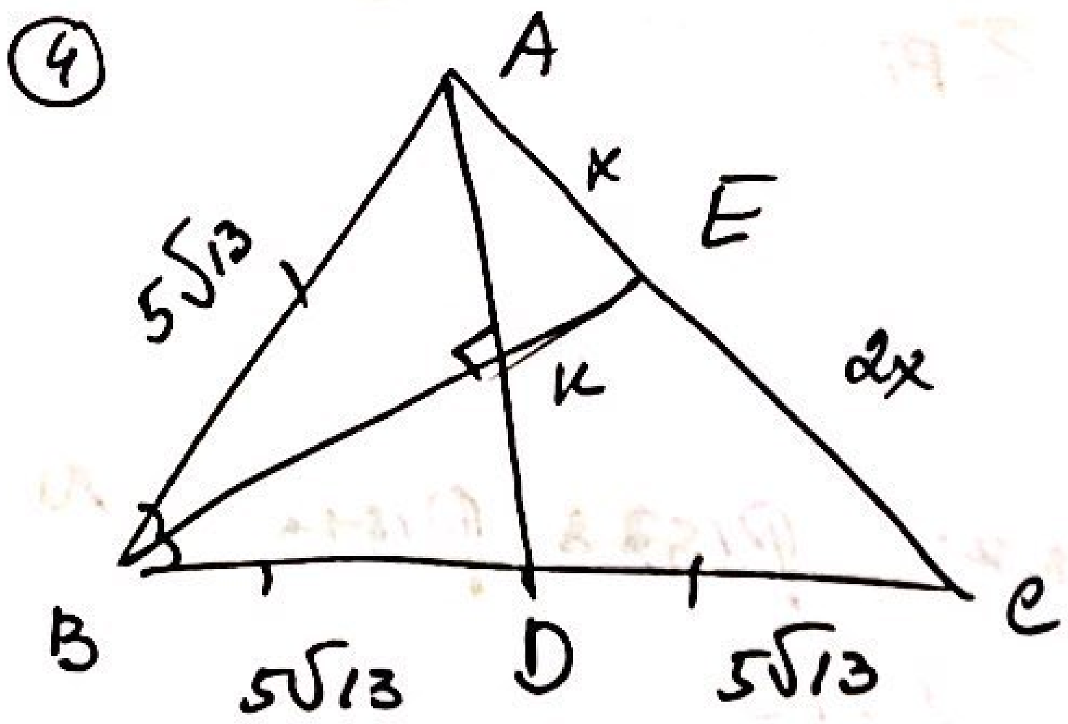
1875 × 7 = 13125

+ 1875

1876 × 7 = 13132

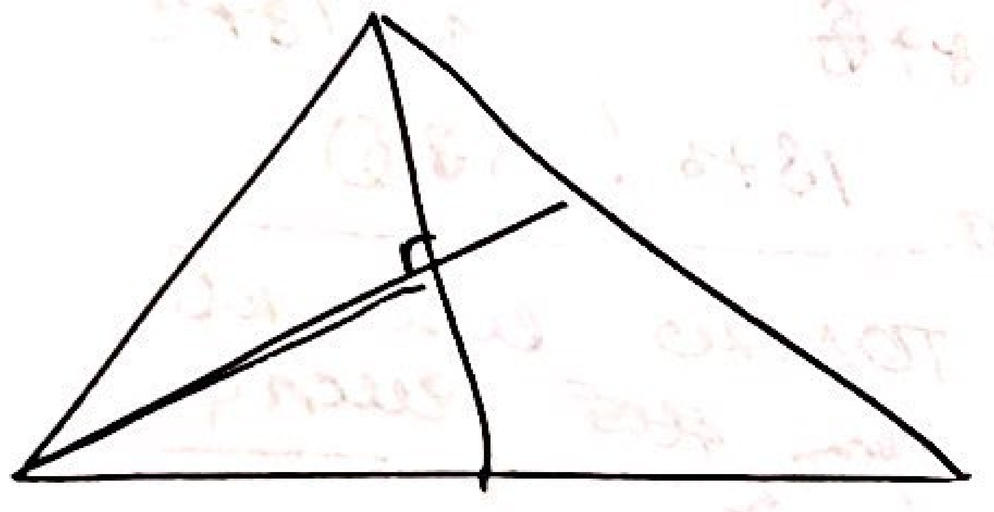
ЧЕРНОВИК 3

4



$10\sqrt{13}$

$(3x)^2 = 9x^2$ $\quad 9-2=7$



$\times\frac{13\cdot 5}{65}$

$l^2 = 5\sqrt{13}\cdot 10\sqrt{13} - 2x^2 =$
$= 650 - 2x^2$

$m^2 = \frac{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}{4} =$

$\times\frac{75}{13}$, 225, 75, 975

$= \frac{18x^2 + 2\cdot 25\cdot 13 - 100\cdot 13}{4} =$

$= \frac{18x^2 - 50\cdot 13}{4}$

$4\,\cancel{(}\,50\cdot 13 - 2x^2 = \frac{18x^2 - 50\cdot 13}{4}$

$200\cdot 13 - 2x^2 = 18x^2 - 50\cdot 13$

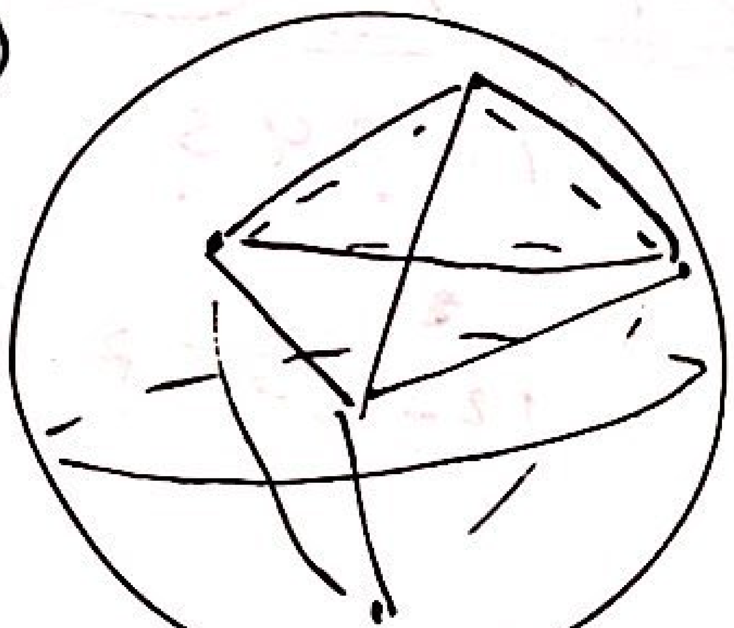
$20x^2 = 250\cdot 13$ $\quad 50+25$

$x = \ldots$ $\quad S = \ldots$

↑ ф-ла Р ф.

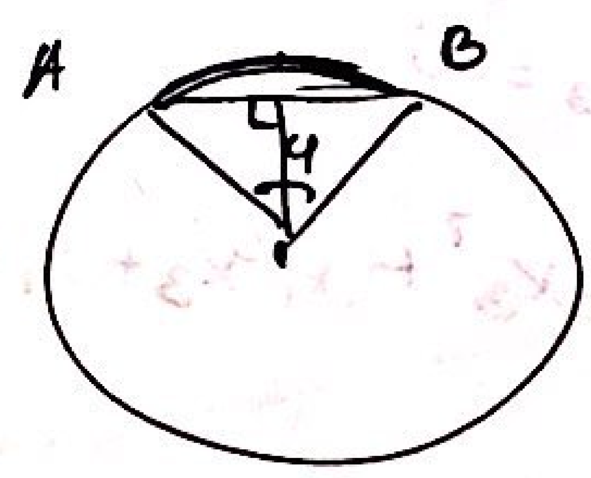
$15\sqrt{13} + 15\sqrt{\frac{13}{2}} -$
$- 10\sqrt{13}$

5



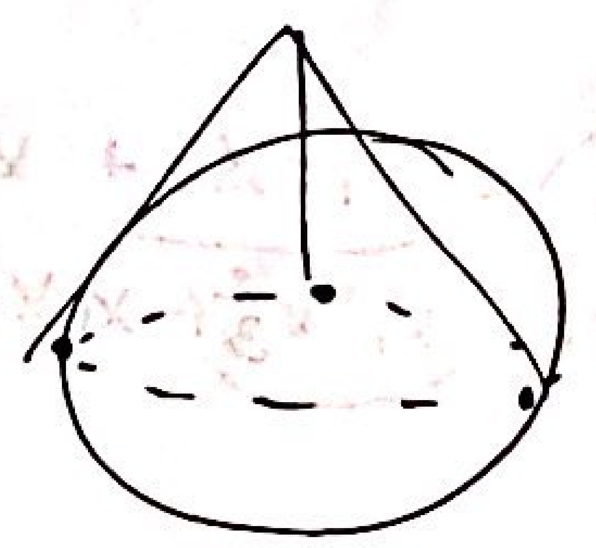
$20\pi,\ 12\pi,\ 16\pi$

↑ не на одной дуге



min p(ABC) − ?

Σ плоских углов < 360°

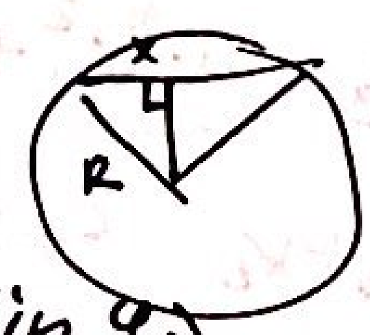


$\frac{\varphi}{360^\circ}\cdot 2\pi R = 20\pi$

$\frac{\varphi_1}{180^\circ}\cdot R = 20$

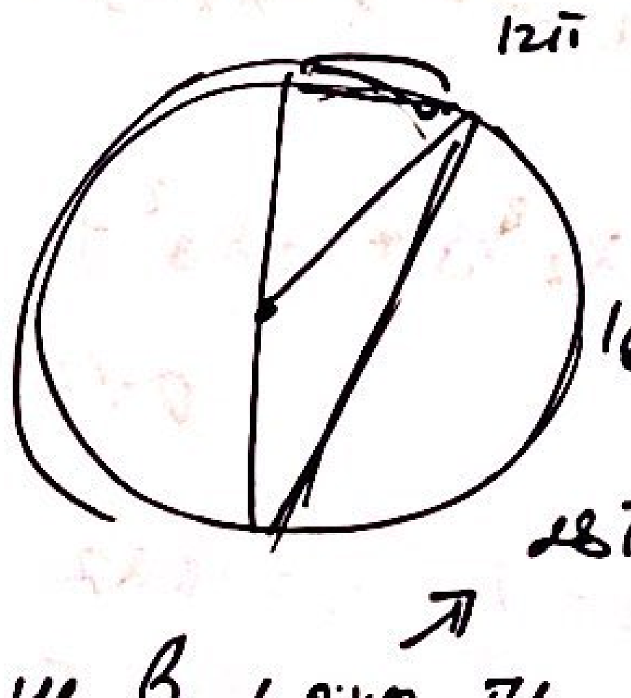
$\frac{\varphi_2}{180} = 12$
$\frac{\varphi_3}{180} = 16$ } 28

$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{48\cdot 180^\circ}{R}$



$\frac{x}{R} = \sin\frac{\varphi}{2}$ $\quad x = R\sin\frac{\varphi}{2}$

$P = R\left(\sin\frac{\varphi_1}{2} + \sin\frac{\varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_3}{2}\right)$

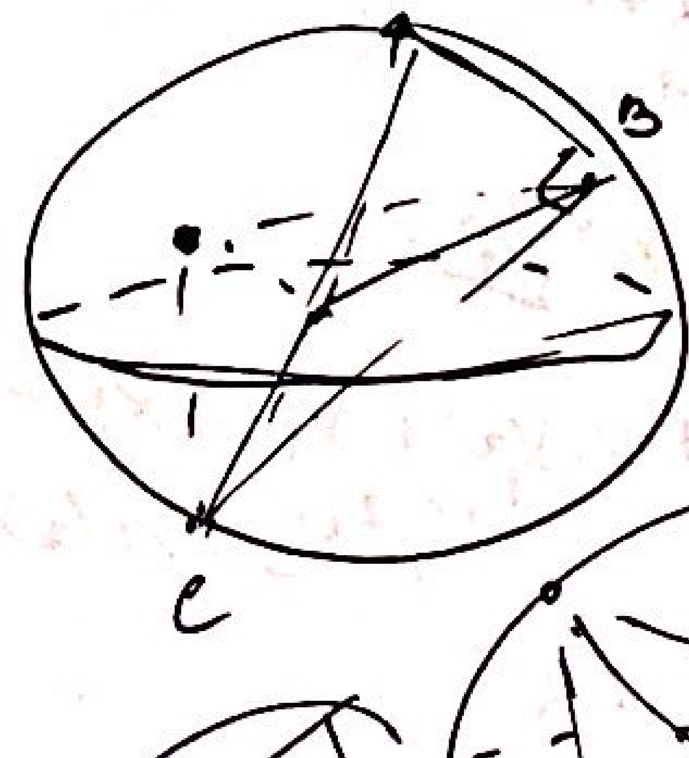


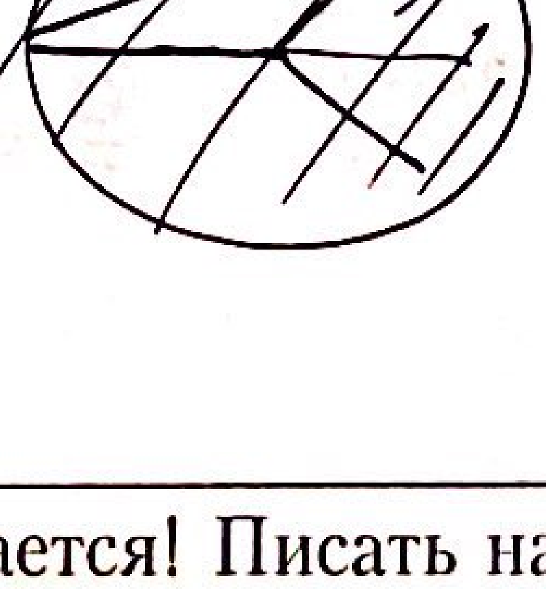
$2\pi R = 48\pi$

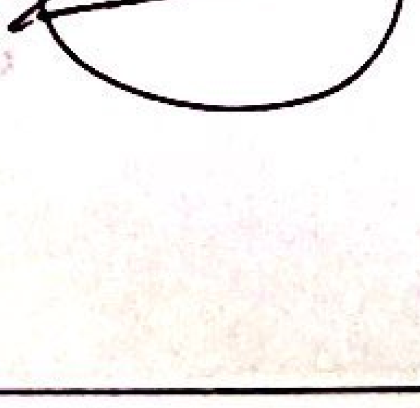
$R = 24$

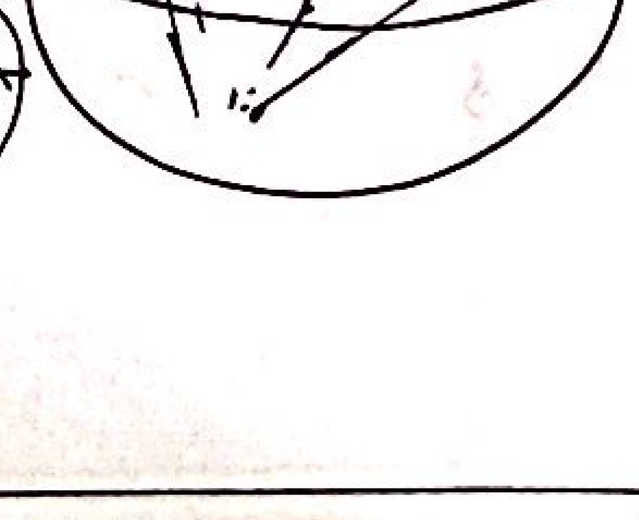
$28\pi > 20\pi$

↗ не в 1 окр-ти









ЧЕРНОВИК 4

6

$1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$ $\sigma(N) = \sum p_i$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2$

$1 = p_1\ p_2\ p_3\ p_4 \ldots p_{1876} \cdot p_{1877}\ p_{1878}\ p_{1879} = N$

$p_3 \cdot p_{1877} = p_4 \cdot p_{1876} \Rightarrow 1879$

1 2 4 8 – куб если для делителя нет пары => квадрат

3 – 1877 2 – 1878
4 – 1876 1 – 1879

124

дел. 1878 ? 1880

36: 1 2 3 4 6 9 12 18 36 только если кв. простого числа

$6^2 = 4 \cdot 9$

$p_1 \cdot p_k = N$ $p_i \cdot p(k-i+1) = N$
$p_2 \cdot p_{k-1} = N$ $k+1-i$

$\sigma(N^3)$ 1879 / 1877 / 1878

$k=3$ $p_i \cdot p_{k+1-i}$ $p_1 \cdot p_3 = N$ 1 2 3 4 5

$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2$ 1 2 3 4 5 6 7

$\frac{(x_1x_2)^2}{x_1x_2x_3} = \frac{x_1x_2}{x_3}$

$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1+x_2+x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2x_3 + x_3x_1^2 +$
$+ x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + \cancel{x_2x_3} x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_3^2x_1$

6: 1 2 3 6 $\cancel{x_1^2x_2 + x_1x_2x_3 + x_1}$ $x_1x_2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_3 +$
$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 +$
$k=4$ $\frac{k}{2} \cdot 2 + 1 =$ $+ x_1x_2x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_3^2$
$k \cdot 2 + 1 = 9$
$\cancel{x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 +}$ $x_1x_2x_3 +$
$\cancel{x_1^2x_2 +}$

$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + \cancel{x_1x_2^2}\ \cancel{x_2^2x_3}\ x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 +$
$+ x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2$

$\sigma(N^2)$

2: 12 3, 1887
4: i $k+1-i$ $k+1-3 = k-2 = 1882$
8: $\sigma(N) = k - \frac{k}{2}$ произв. $\frac{k}{2} \cdot 2 + 1 \neq A2$ $k = 1869 \Leftarrow N$ – точный квадрат

ЧИСТОВИК 3

№4 (продолжение)

7) $BE^2 = AD^2$, т.е. $50\cdot 13 - 2x^2 = \frac{18x^2 - 50\cdot 13}{4}$,

$200\cdot 13 - 8x^2 = 18x^2 - 50\cdot 13$

$26x^2 = 250\cdot 13$, $2x^2 = 250$, $x^2 = 125$, $x = 5\sqrt{5}$

$\cancel{2x^2 = 25\cdot 13}$ $\cancel{x^2 = \frac{25\cdot 13}{2}}$, $\cancel{x = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}}}$; $AC = 3x = \cancel{\frac{15\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{\frac{13}{2}}}$ $15\sqrt{5}$

8) Полупериметр ABC — $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \cancel{\frac{5\sqrt{13} + 10\sqrt{13} + 15\sqrt{\frac{13}{2}}}{2}} =$

$\cancel{= \frac{15\left(\sqrt{13} + \sqrt{\frac{13}{2}}\right)}{2}}$ $= \frac{15\sqrt{13} + 15\sqrt{5}}{2} = 15(\sqrt{13}$

9) По ф-ле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} =$

$\cancel{= \sqrt{\frac{15\left(\sqrt{13} + \sqrt{\frac{13}{2}}\right)}{2} \cdot \frac{15\left(\sqrt{13} - \sqrt{\frac{13}{2}}\right)}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13} + 15\sqrt{\frac{13}{2}}}{2} \cdot \frac{-5\sqrt{13} + 15\sqrt{\frac{13}{2}}}{2}} =}$

$\cancel{= \frac{15\cdot 5}{4}\sqrt{\left(\sqrt{13} + \sqrt{\frac{13}{2}}\right)\left(\sqrt{13} - \sqrt{\frac{13}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{13}\right)\left(3\sqrt{\frac{13}{2}} - \sqrt{13}\right)} =}$

$\cancel{= \frac{75}{4}\sqrt{\left(13 - \frac{13}{2}\right)\left(\frac{9\cdot 13}{2} - 13\right)} = \frac{75}{4}\sqrt{\frac{13}{2}\cdot\frac{7\cdot 13}{2}} =}$

$\cancel{= \frac{75\cdot 13\sqrt{7}}{8} = \frac{975\sqrt{7}}{8}}$

$S = \sqrt{\frac{15(\sqrt{13}+\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{15(\sqrt{13}-\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13}+15\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{5}-5\sqrt{13}}{2}} =$

$= \frac{15\cdot 5}{4}\sqrt{(13-5)(45-13)} = \frac{75}{4}\cdot\sqrt{8\cdot 32} =$

$= \frac{75}{4}\cdot 16 = 75\cdot 4 = 300$

Ответ: $\cancel{\frac{975\sqrt{7}}{8}}$. $\underline{300}$.

№3.

Для ур-я $x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$ по Теореме Виета:

$$\begin{cases} -(x_1+x_2+x_3) = -6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7 \\ -x_1x_2x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

Если (x_1+x_2), (x_2+x_3), (x_1+x_3) — корни ур-я $x^3+ax^2+bx+c=0$, то по теореме Виета:

$$\begin{cases} -((x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_2+x_3)) = a \quad (1) \\ (x_1+x_2)(x_1+x_3) + (x_1+x_2)(x_2+x_3) + (x_2+x_3)(x_1+x_3) = b \quad (2) \\ -(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1) = c \quad (3) \end{cases}$$

(1): $a = -(2x_1+2x_2+2x_3) = -2\cdot(x_1+x_2+x_3) = -2\cdot 6 = -12$

(2): $b = (x_1+x_2)(x_1+x_3) + (x_1+x_2)(x_2+x_3) + (x_2+x_3)(x_1+x_3) =$

$= x_1^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_3^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3 = (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) =$

$= 6^2 + 7 = 36 + 7 = 43$ (см. на след. листе)

№3 (продолжение) ЧИСТОВИК 4

(3): $-c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_1+x_3)=$

$=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2=$

$=(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3=7\cdot6-1=42-1=41,$

$c=-41.$

(x_1+x_2), (x_1+x_3), (x_2+x_3) будут корнями ур-я при

$a=-12$, $b=43$, $c=-41$

Ответ: $a=-12$, $b=43$, $c=-41$.

№6.

Выписаны все делители в порядке возр. =>

=> $p_i\cdot p_{k+1-i}=N$ $(p_1\cdot p_k=1\cdot N=N$, $p_2\cdot p_{k-1}=N$ и т.д.)

~~Если у числа~~ $\forall$ i от 1 до k

~~Если у числа N~~

$(k=1877)$

У числа N хотя бы 1877 дел-лей. Т.к. $p_1<p_2<\ldots<p_k$, то, если у N ровно 1877 дел-лей, то $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}>$ $>p_1\cdot p_{1877}\cdot p_2\cdot p_{1876}=N\cdot N=N^2$, нер-во $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geq N^2$ (*) выполняется.

$(k=1878)$

Если у N 1878 дел-лей: $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}>p_2\cdot p_{1877}\cdot p_3\cdot p_{1876}=$ $=N\cdot N=N^2$ — нер-во (*) выполняется.

$k=1879$: $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}=(p_3\cdot p_{1877})\cdot(p_4\cdot p_{1876})=N^2$ — нер-во (*) вып-ся.

$k=1880$: $p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}<p_5\cdot \overset{p_{1877}}{\cancel{1877}}\cdot p_4\cdot p_{1877}=N^2$ — нер. во (*) не вып-ся.

Значит, у числа N может быть 1877, 1878, 1879 нат. дел-лей. Пусть $N=q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_n^{\alpha_n}$, где $q_1, q_2, \ldots q_n$ — различные простые дел-ли N.

Тогда $N^3=q_1^{3\alpha_1}\cdot q_2^{3\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_n^{3\alpha_n}$, кол-во дел-лей N^3 — $\sigma(N^3)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\ldots(3\alpha_n+1)$ (**), числа N — $\sigma(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$.

$\sigma(N)=1877$, или $\sigma(N)=1878=2\cdot3\cdot313$ или $\sigma(N)=1879$. Числа 1877 и 1879 — простые =>

=> для $\sigma(N)=1877$ $\alpha_1=1876$, тогда $\sigma(N^3)=3\alpha_1+1=$ $=3\cdot1876+1=5628+1=5629$; для $\sigma(N)=1879=\alpha_1+1$ $\alpha_1=1878$, $\sigma(N^3)=3\alpha_1+1=5634+1=5635$

(см. на след. листе)