0 238129 680005

23-81-29-68
(123.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сиротина Алексея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
23-81-29-68	90	20	20	20	20	5	5		

Чистовик.

№2

	Машина выезд +1 час	Машина стоянка +2 часа	Велосипед выезд +1 час	Велосипед стоянки +2 часа
①	+	+	−	−
②	+	−	−	+
③	−	+	+	−
④	−	−	+	+

скорость велосипедиста – V, км/ч
l, км рас-е из A в B.

① $1+2+\frac{l}{2V}=\frac{l}{V}=\tau_1$

$3=\frac{l}{2V}$ $\quad l=6V$

$\tau_1=\frac{6V}{V}=6$ ч

② $1+\frac{l}{2V}=2+\frac{l}{V}$

$\frac{l}{2V}=-1$

невозможно

③ $2+\frac{l}{2V}=1+\frac{l}{V}=\tau_3$

$\frac{l}{2V}=1$

$l=2V$

$\cancel{\tau_3=2+\frac{2V}{V}}$ $\tau_3=1+\frac{2V}{V}=3$ ч

④ $\frac{l}{2V}=3+\frac{l}{V}$ $\quad \frac{l}{2V}=-3$ невозможно

в первом случае они приедут в 20:00

в третьем случае в 17:00

1 из 6

~~Н~~ чистовик

№3

$x^3-6x^2+7x-1=0$

т.к. есть корни, используем т. Виета для куб. урн.

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$

$x_1x_2x_3=1$

$x^3+ax^2+bx+c=0$

~~$x_1+x_2+x_3=-a$~~

$x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1=-a=2(x_1+x_2+x_3)=12$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)=b$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=-c$

$b=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=36+7=43$

(все вычисления есть в черновике)

$-c=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3=6\cdot7-1=41$

(все вычисления в черновике)

$a=-12$

$b=43$

$c=-41$

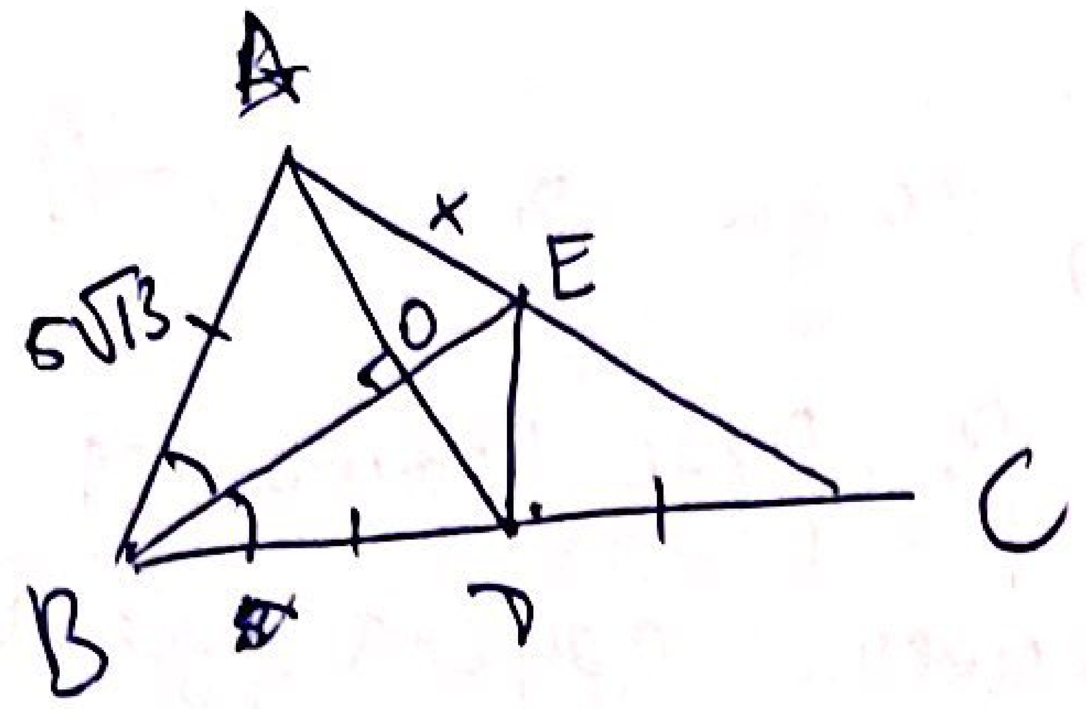
Ответ: $(-12;43;-41)$

2 шуб

№4. чистовик

$AD = BE = m$

$AE = x$



$\triangle ABO = \triangle DBO$ (по кат. и остр. углу)

$AB = BD = 5\sqrt{13} = CD$.

в $\triangle ABD$ BO – ~~медиа~~ высота и бис-са $\Rightarrow$ медиана

$AO = OD$

$\Rightarrow S_{ABE} = BE \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = S_{DBE}$

в $\triangle BEC$ ED медиана. $S_{DBE} = S_{CED}$.

значит $S_{ABE} = \frac{1}{3} S_{ABC}$

т. Менелая для $\triangle BCE$ и прям AD.

$\frac{CD}{DB} \cdot \frac{BO}{OE} \cdot \frac{AE}{AC} = 1$

$\frac{1}{1} \cdot \frac{BO}{OE} \cdot \frac{1}{3} = 1$

$BO = 3OE$

$BO = \frac{3m}{4}$ $\quad OE = \frac{m}{4}$

т. пифагора в $\triangle ABO$

$25 \cdot 13 = \frac{9}{16} m^2 + \frac{m^2}{4}$ $\quad 9m^2 + 4m^2 = 100 \cdot 13 \cdot 4$

$m^2 = 100 \cdot 4$ $\quad m = 20$

$S_{ABE} = m \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m^2}{4} = 100 = \frac{1}{3} S_{ABC}$

$S_{ABC} = 300$

3из6

№6

~~равенство будет в случае~~

равенство будет в случае, когда $p_3 \cdot p_{1877} = N$

т.к тогда p_3 и p_{1877} парные, p_4 и p_{1876} парные и т.д (парные делители дают при умножении друг на друга N).

тогда p_1 и p_{1879} - парные делители, но

т.к $p_1 = 1$, $p_{1879} = N$ значит p_{1879} - последний делитель числа N и $G(N) = 1879$.

если $G(N) = \cancel{1879}\ 1879 + k$, $k \in N$, то p_3 будет парным с делителем p_{1877+k}, а p_4 парным с p_{1876+k}

тогда $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876+k} \cdot p_{1877+k} = N^2$

но $p_{1876+k} > p_{1876}$ и $p_{1877+k} > p_{1877}$

Значит $p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876+k} \cdot p_{1877+k} > p_3 \cdot p_4 \, p_{1876} \, p_{1877}$

значит $p_3 p_4 p_{1876} p_{1877} < N^2$

$G_{max}(N) = 1879$ но такой же логике можно понять, что если $G(N) < 1879$, то $p_3 p_4 p_{1876} p_{1877} > N^2$

Так же G не может быть меньше, чем 1877

значит $G(N) = 1877; 1878; 1879$. ~~но так же ло~~

при умножении двух чисел с a и b ~~делителями~~ делителей у их произведения будет $a+b-1$ делителей

тогда $G(N^2) = 2G(N) - 1$ $\quad G(N^3) = 3G(N) - 2$

$G(N^3) = 3 \cdot 1877 - 2;\ 3 \cdot 1878 - 2;\ 3 \cdot 1879 - 2.$

$G(N^3) = 5629; 5632; 5633$

$G(N^3) = 5629; 5632; 5633.$

Ответ: 5629; 5632; 5633

№1 Чистовик

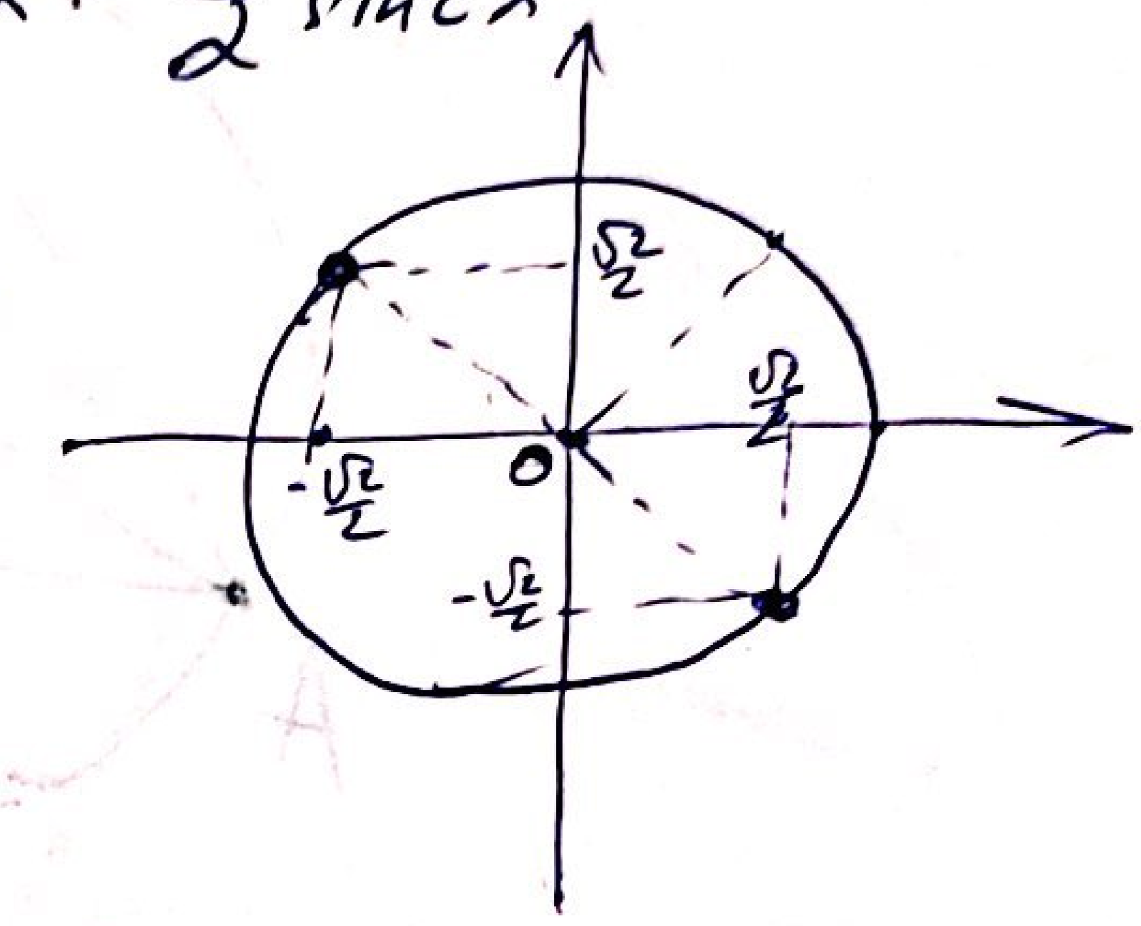
$1+\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

$2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x-2\sqrt{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$

$\sin 2x+2\cos 2x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

$3\sin 2x+3\cos 2x=0$



$\cancel{\sin 2x=-\cos 2x}$

$\cancel{2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$

$\cancel{x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}}$

$\sin 2x+\cos 2x=0$

$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=0$

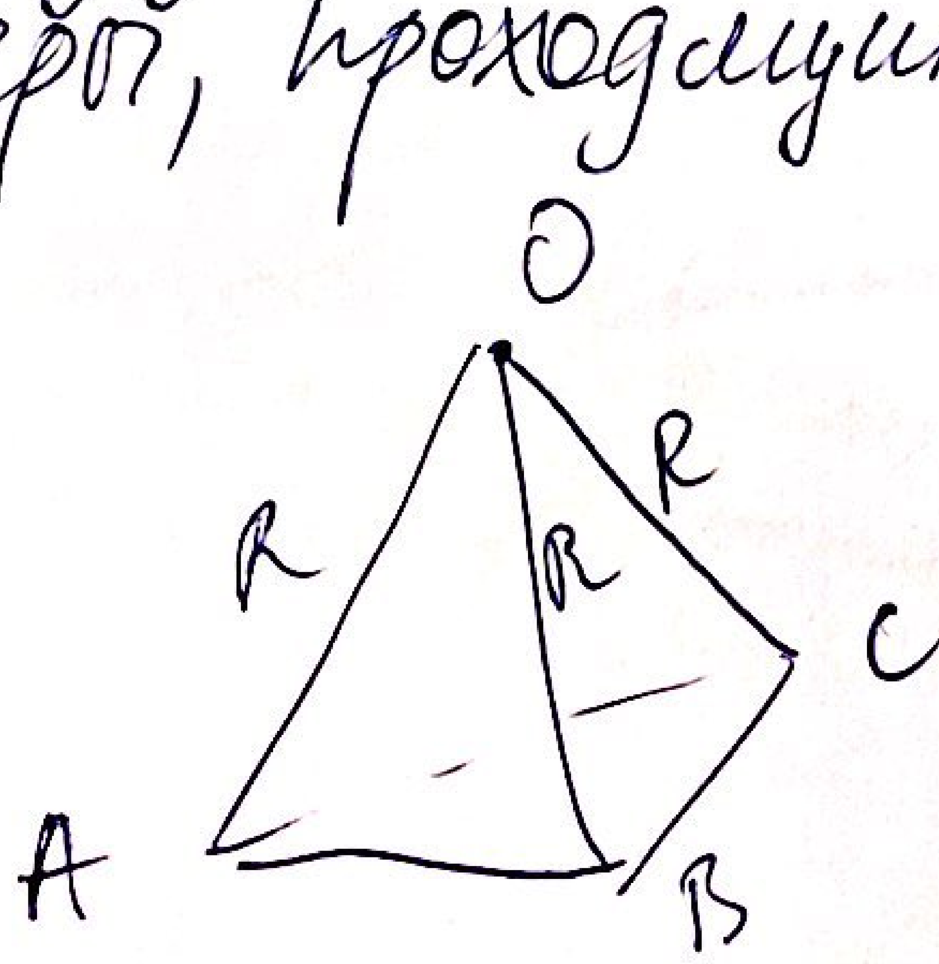
$2x+\frac{\pi}{4}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

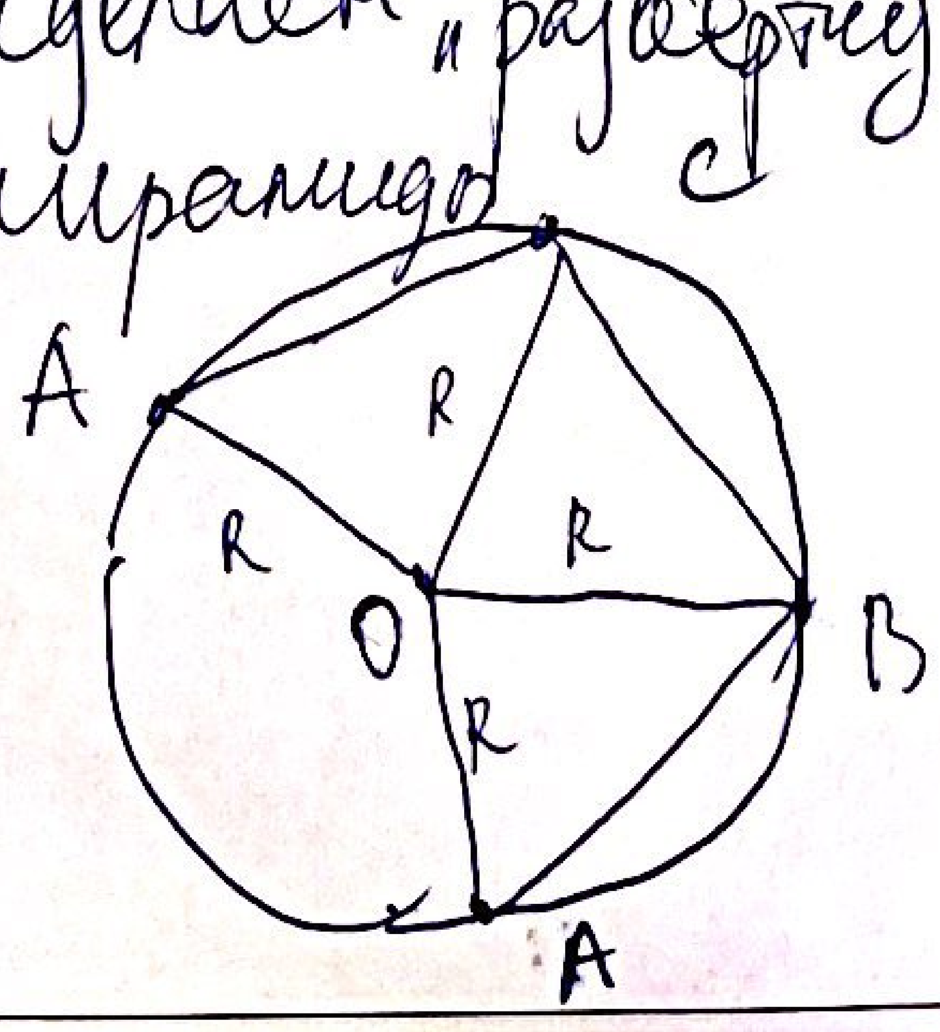
Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ k\in\mathbb{Z}$

№5

наим рас-е по поверхности сферы — дуги окр-ей, явл сечениями данной сферы, проходящими через её центр.



сделаем „развёртку" этой пирамиды

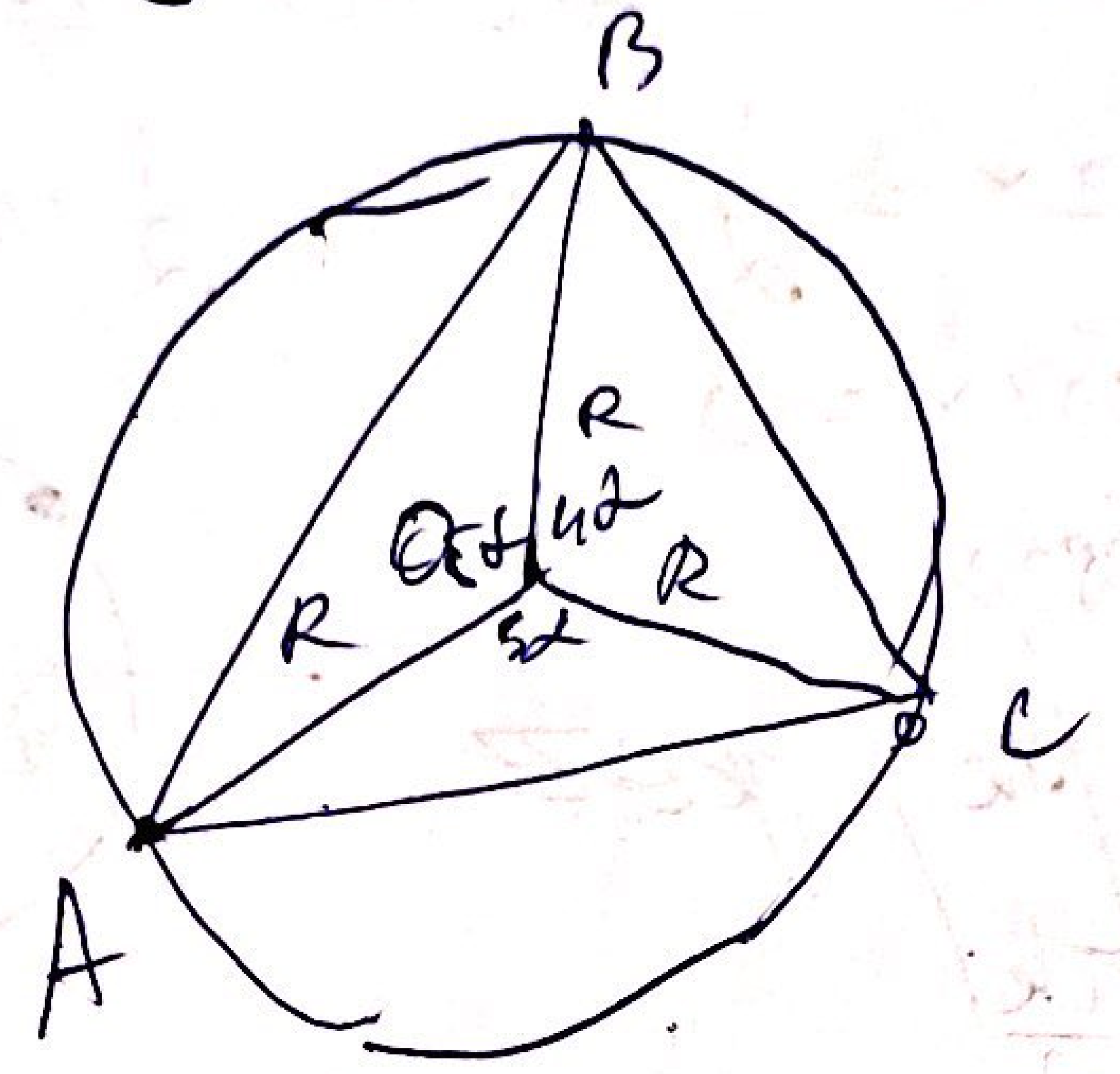


5 из 6

листовик №5 продолж.

$AB+BC+AC$ есть периметр ΔABC

нетрудно заметить, что наим. сумма этих сторон будет когда точки A на окр. совпадут



$2\pi R = 48\pi$

$R = 24$

$12\alpha = 2\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\angle AOC = \frac{\pi}{2}$

$\angle AOB = \frac{5\pi}{6}$

$\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$

$AC = 24\sqrt{2-2\cdot 0} = 24\sqrt{2}$

$AB = 24\sqrt{2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 24\sqrt{2+\sqrt{3}}$

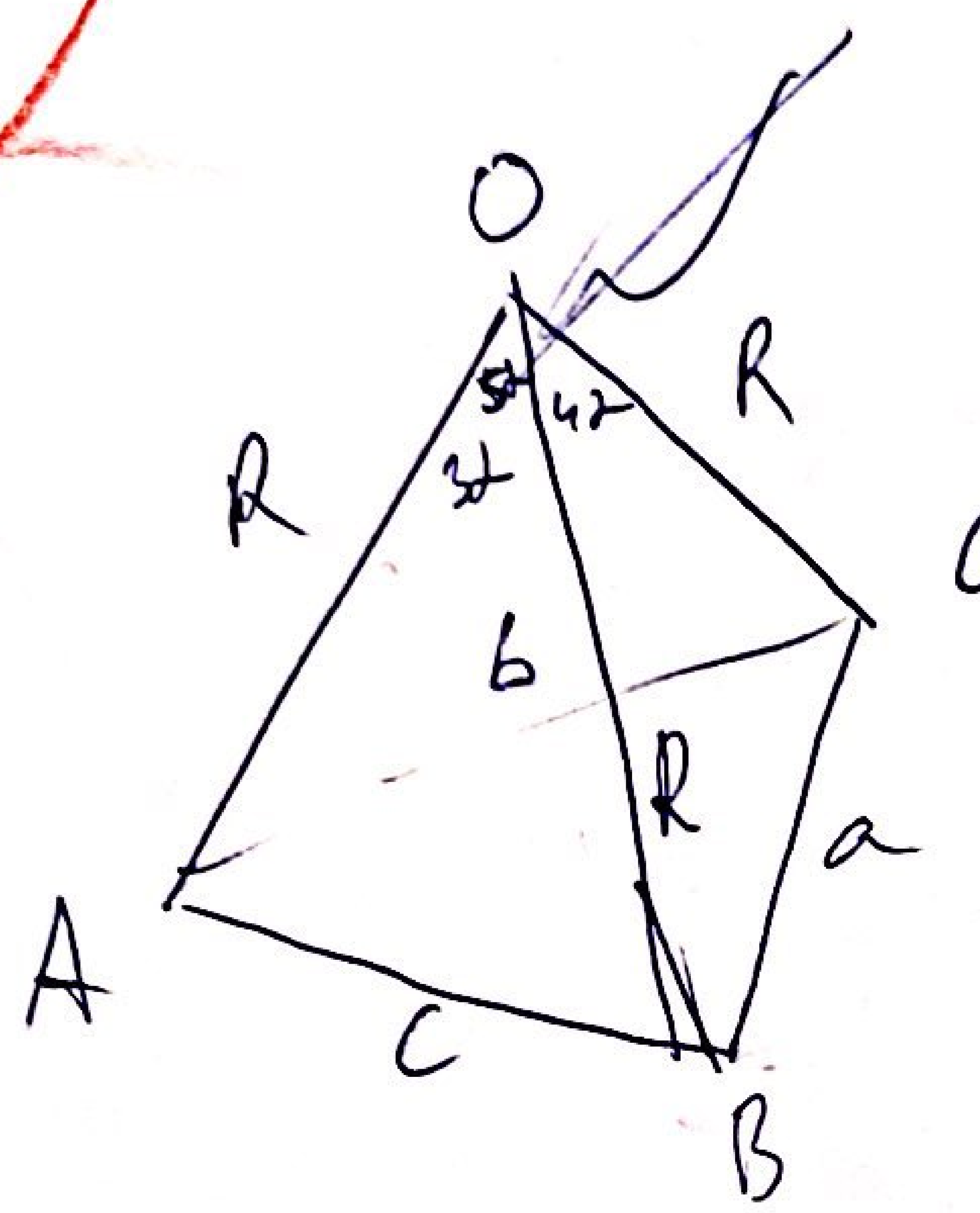
$BC = 24\sqrt{2+2\cdot\frac{1}{2}} = 24\sqrt{3}$

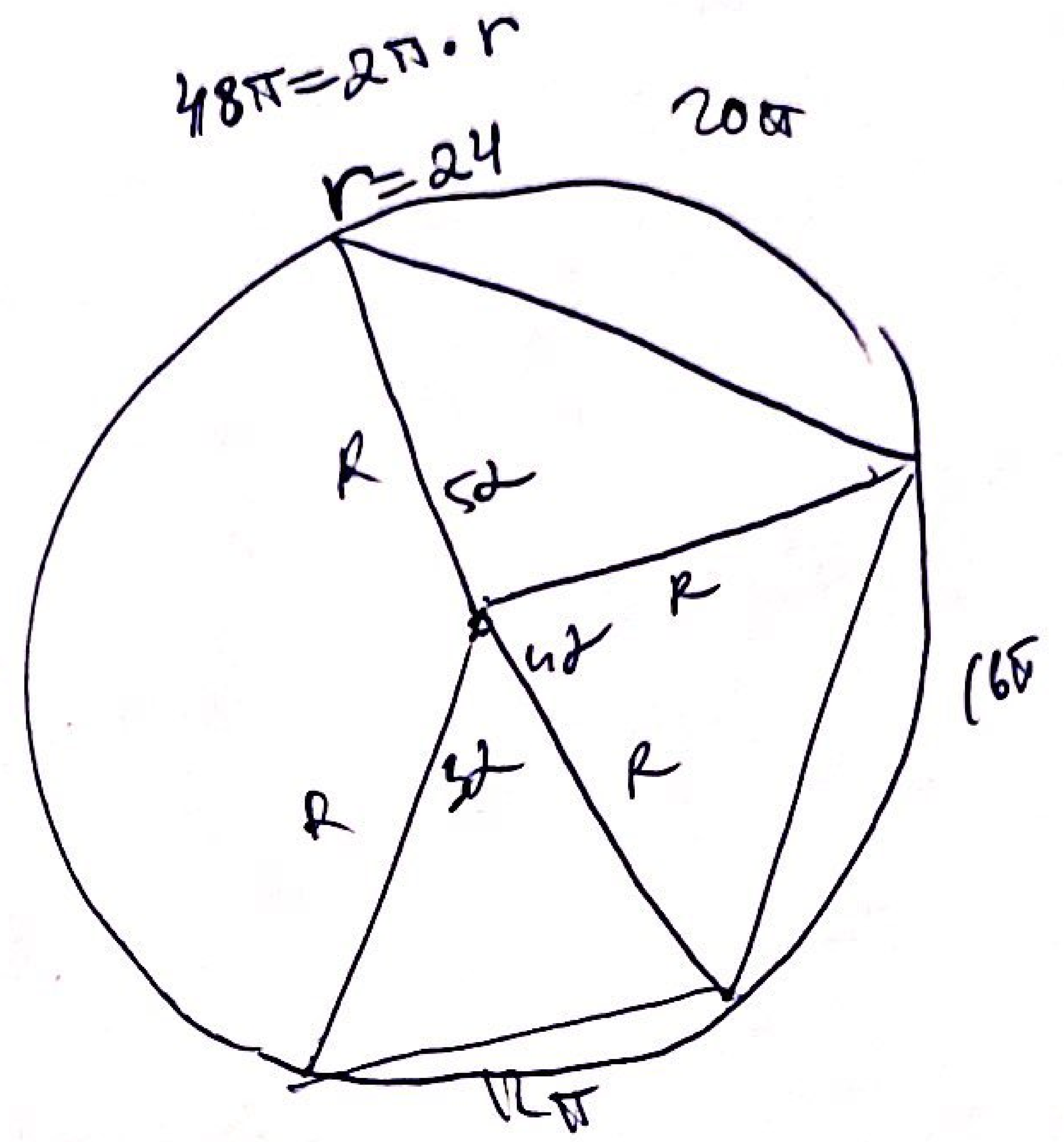
$P_{max} = 24\sqrt{2} + 24\sqrt{2+\sqrt{3}} + 24\sqrt{3}$

6 из 6

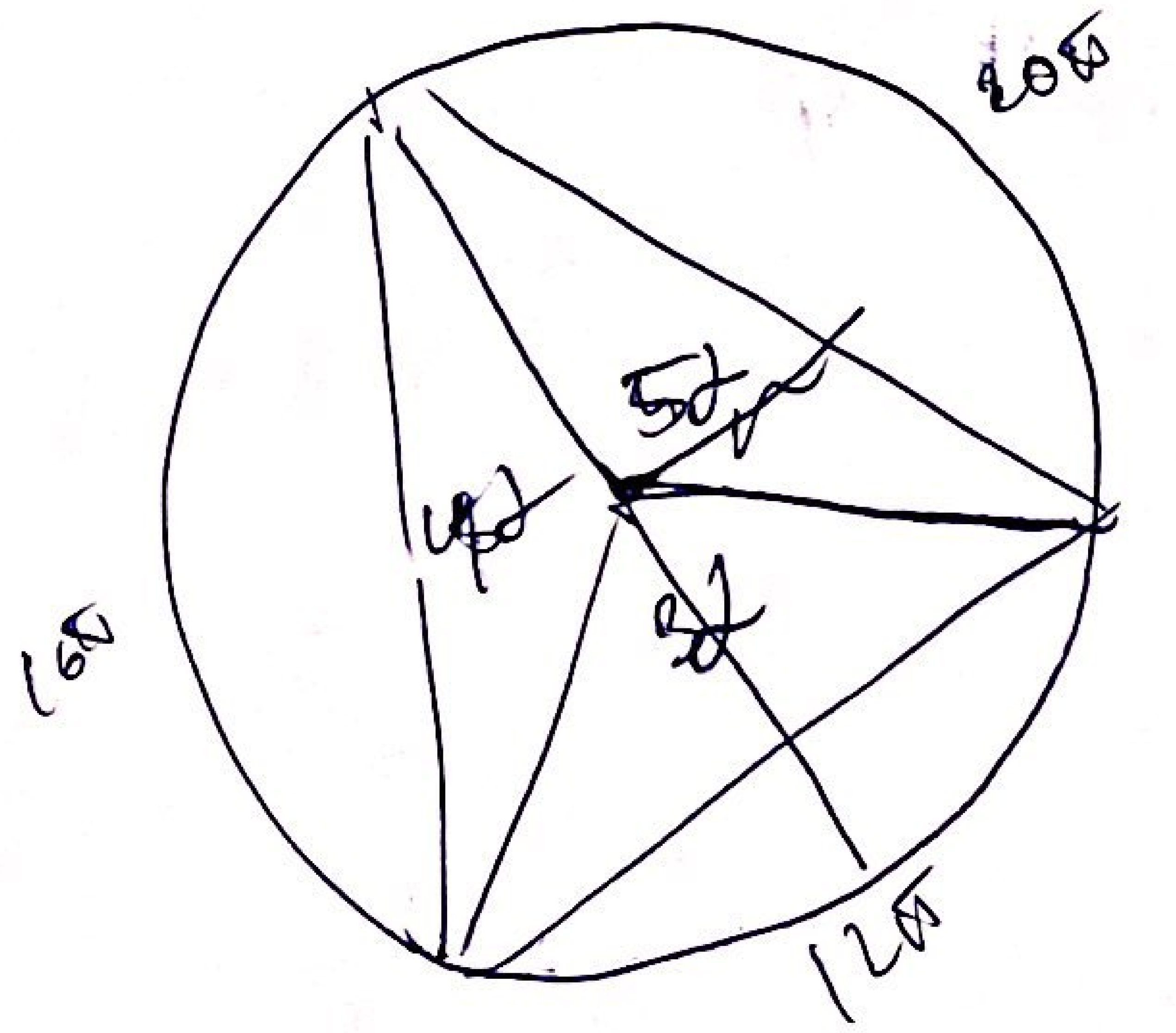
черновик

$$2\sin x(\cos x-2\sin x)+2\cos x(2\cos x+\sin x)=\cos 2x-\sin 2x$$





$$P'=\sqrt{2-2\cos\frac{20\pi}{R}}+\sqrt{2-2\cos\frac{16\pi}{R}}+\sqrt{2-2\cos\frac{12\pi}{R}}+\frac{R\sin\frac{20\pi}{R}}{\sqrt{2-2\cos\frac{20\pi}{R}}}+\frac{R\sin\frac{16\pi}{R}}{}+\dots$$



$12\alpha=48\pi$

$\alpha=\frac{48\pi}{12}=4\pi$

$12\alpha=2\pi$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$

Черновик

$6 \cdot 4 = 24$

(1)(2)(3)(4)(5)(6)

1 2 3 4 6 8 12 24

8)

$\angle AOB = \frac{20\pi}{R}$

$AB_3' = \sqrt{R^2 + R^2 - 2 \cdot \cos\frac{20\pi}{R} \cdot R^2}^2$

$\angle AOC = \frac{12\pi}{R}$

$= R\sqrt{2 - 2\cos\frac{20\pi}{R}}$

$\angle BOC = \frac{16\pi}{R} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{20\pi}{R}} + R\sqrt{2} \cdot \frac{\sin\frac{20\pi}{R}}{R\sqrt{2 - 2\cos\frac{20\pi}{R}}}$

$P = R\left(\sqrt{2 - 2\cos\frac{20\pi}{R}} + \sqrt{2 - 2\cos\frac{12\pi}{R}} + \sqrt{2 - 2\cos\frac{16\pi}{R}}\right)$

равенство когда $p_3 \cdot p_{1877} = N$ ~~$p_4 \cdot p_{1876} = N$~~

для 16

~~1 2 4 8 16~~ для 24

1 2 3 4 6 8 12 24

1877 1878 1879

2 2
4 3
8 4
4 3
16 5
64 7

1 2 3 6 12 18 36 18

3 2
9 3
27 4
6 4
36 7
10

~~6 = 12~~ 3

1 2 3 6 9 18 6

324

Черновик

$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_2+x_2^2+x_2x_1+$

$+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)(x_1+x_2+x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1^2x_3+$

$+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2+x_1x_3^2=42$

№4.

$\frac{9}{16}m^2+\frac{m^2}{4}=325$

$9m^2+4m^2=100\cdot 4\cdot 13$

$m^2=100\cdot 4$

$m=20$

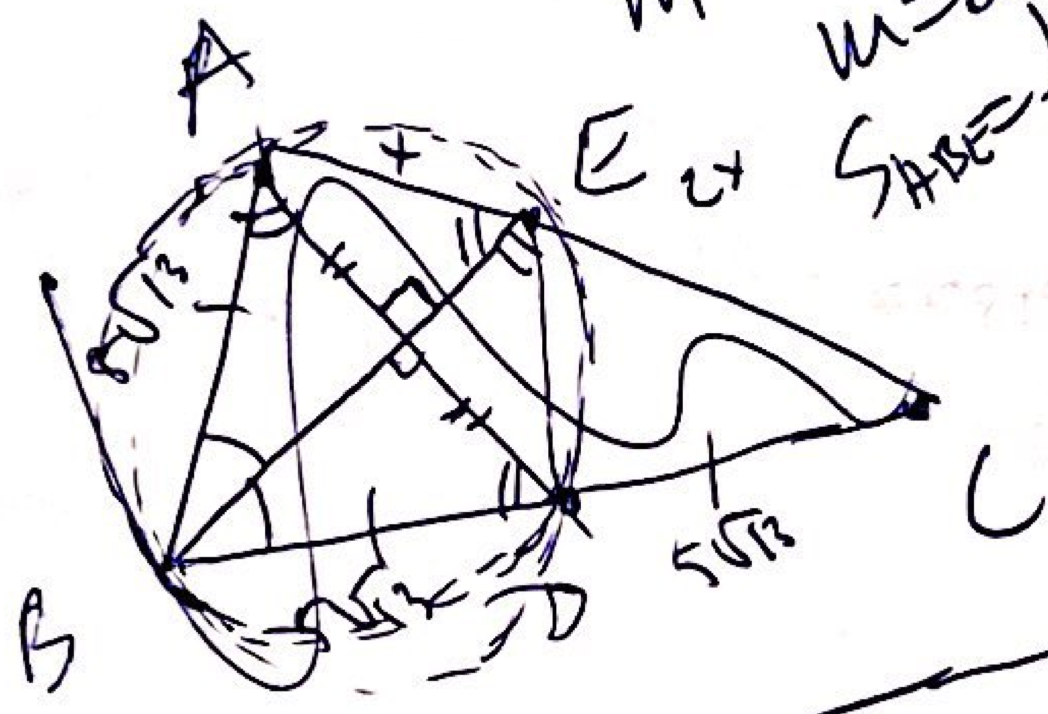
$S_{ABE}=\frac{1}{2}$

$\frac{2x\cdot 5\sqrt{13}}{2}\sin C=\frac{x\cdot 5\sqrt{13}}{2}\sin A$

$2\sin C=\sin A$

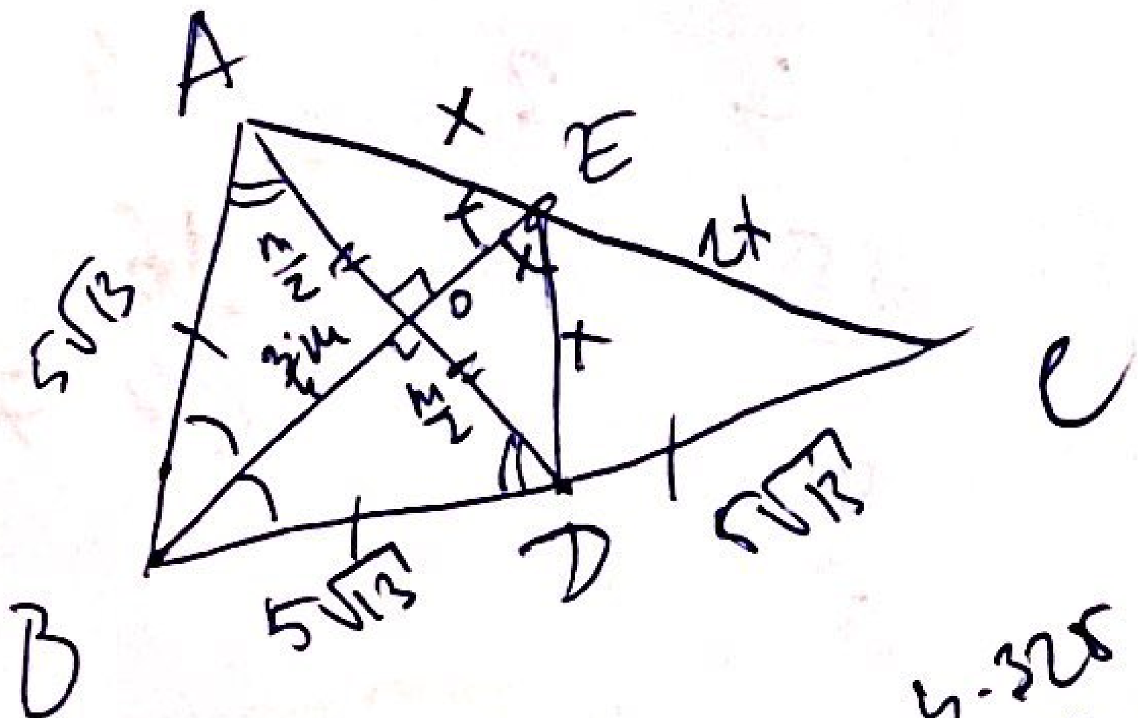
$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20\cdot 100$

$S=300$



$BO=\sqrt{25\cdot 13-\frac{m^2}{4}}=\sqrt{250+75-\frac{m^2}{4}}=\sqrt{325-\frac{m^2}{4}}$

$OE=m-\sqrt{325-\frac{m^2}{4}}$



$x^2=m^2-325+\frac{m^2}{4}-2m\sqrt{325-\frac{m^2}{4}}$

$18x^2=650+m^2$

$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}=1$

$1\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{1}{3}=1$

$\frac{BO}{OE}=3$

$BO=\frac{3}{4}m$

$OE=\frac{1}{4}m$

$18x^2+325\cdot 2=\frac{4\cdot 325}{1300}+4m^2$

$\frac{m^2}{4}-36m\sqrt{325-\frac{m^2}{4}}=0$

$\frac{19m^2}{2}-20\cdot 325-36m\sqrt{1300-m^2}=0$

$19m^2-40\cdot 20\cdot 650-36m\sqrt{1300-m^2}=0$

$-19(-m^2+1300)+18\cdot 650-36m\sqrt{1300-m^2}$

$t=\sqrt{1300-m^2}$

черновик

$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=0$

$2x+\frac{\pi}{4}=\pi k$

$x^3-6x^2+7x-1=0$ $\quad x_1;\ x_2;\ x_3$

$x^3+ax^2+bx+c=0$ $\quad x_1+x_2;\ x_2+x_3;\ x_3+x_1$

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$

$x_1x_2x_3=1$

$(x-1)(x-2)(x-3)=$

$=(x^2-3x+2)(x-3)=$

$=x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6=$

$=x^3-6x^2+11x-6$

$$\begin{array}{r}\times\ 1877\\ 3\\ \hline 5631\end{array}$$

$6=-a$

$2+6+3=11=b$

$6=-c$

$a=-12$ $\quad b=43$ $\quad c=-41$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)=$

$=x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+$

$+x_2x_3+x_3^2+x_1x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_1^2+x_1x_2+x_2x_3=$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=7+36=43$

$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=(x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3)\cdot(x_1+x_3)=$

$=x_1^2\cdot x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2=$

$=\cancel{2x_1x_2x_3}\ 42-1=41$

$-19t^2-36m\cdot t+18\cdot 650$

Черновик

$1+\sqrt{2}\sin(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})$

$\sqrt{2}\sin(\cos x-2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x+\sin x)=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\cdot(\sin(\cos x)\cdot\cos(2\sin x)-\sin(2\sin x)\cos(\cos x)+\cos(2\cos x)\cdot\cos(\sin x)-\sin(2\cos x)\cdot\sin(\sin x))$

$=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\cos 2x\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sin(\cos x-2\sin x)+2\cos x(2\cos x+\sin x)=\cos 2x-\sin 2x$

M B

$+2V$ V $+2l$ $+1$

$2+\frac{l}{2V}=1+\frac{l}{V}$

$2+1+\frac{l}{2V}=\frac{l}{V}$

$2+\frac{l}{2V}=1+\frac{l}{V}$

$1+\frac{2V}{V}=3$

17:00

$1=\frac{l}{2V}$ $l=2V$

$\frac{l}{2V}=3$

$l=6V$

$1+\frac{6V}{V}=7$ 20:00

$\frac{l}{2V}=3+\frac{l}{V}$

$\frac{l}{2V}=-3$

$1+\frac{l}{2V}=2+\frac{l}{V}$

$-1=\frac{l}{2V}$