0 498042 720008

49-80-42-72
(138.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-2

Место проведения Кисловодск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Хабахова Огана Артуровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
49-80-42-72	85	20	20	20	20	0	5		

Чер ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 85 (восемьдесят пять)

49-80-42-72 (138.2)

Черновик

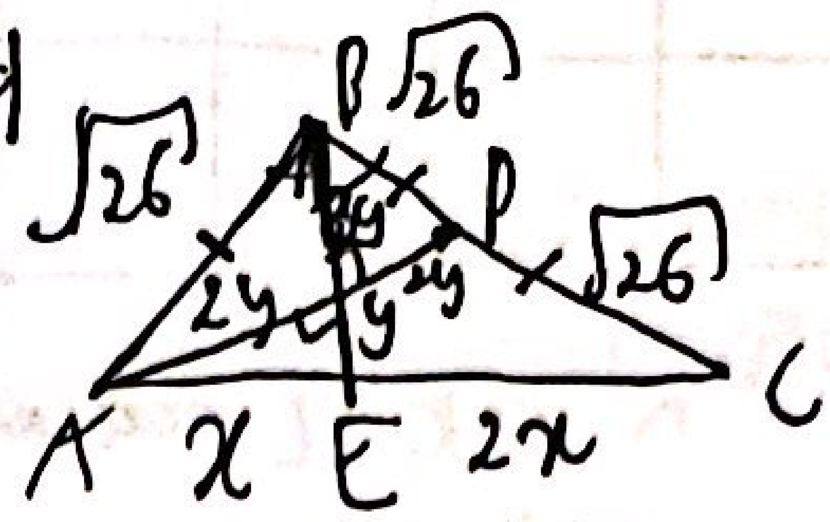
№1. ~~sinx+2cosx=~~

$1-\sqrt2\cos x\sin x-2\sqrt2\cos^2 x+2\sqrt2\sin^2 x-\sqrt2\sin x\cdot\cos x=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1-2\sqrt2\cos2x-\sqrt2\sin2x=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt2(2\cos2x+\sin2x)=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sin(\alpha+2x)=\underbrace{2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})}_{0}$

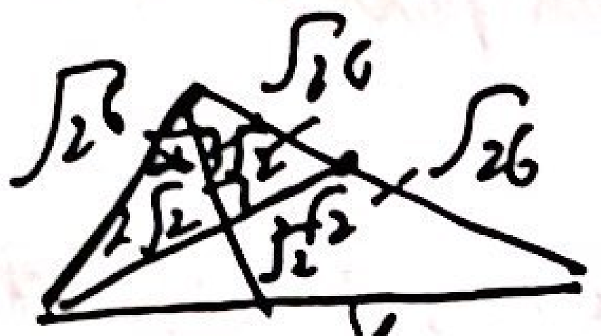


$\frac{2}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{2}=1$

$4y^2+9y^2=\sqrt{26}$ $13y^2=\sqrt{26}$

$y=\sqrt{\frac{\sqrt{26}}{13}}=\sqrt2$

$x^3+6x^2+7x+1=0$



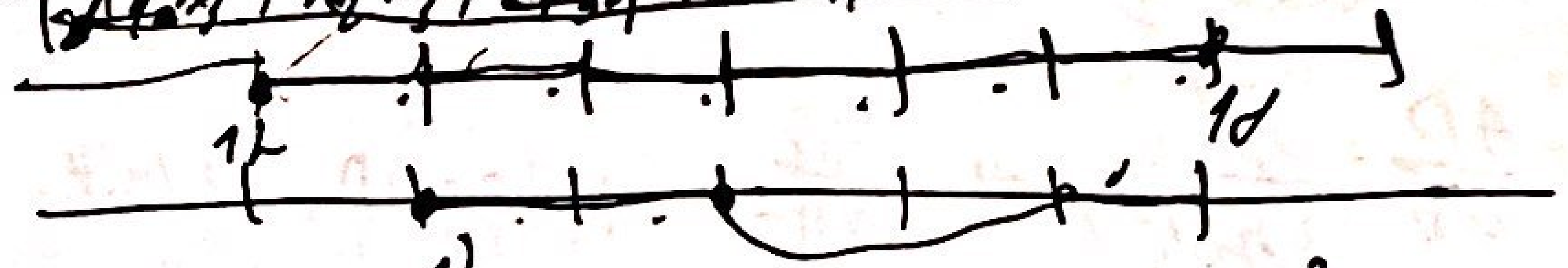
$\sin\alpha=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$S=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{26}\cdot\cancel{2}\sqrt{26}\cdot2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{26\cdot4\cdot3}{13}=\boxed{24}$

$x^3+6x^2+7x+1=0$ $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x-x_3)=$

$=x^3-(x_1+x_2)x^2+x_1x_2x-x_3x^2+(x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+\cancel{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0}$



$x_1+x_2+x_3=-6$

$x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2=7$

$x_1x_2x_3=-1$

$\boxed{a}=-(2x_1+2x_2+2x_3)=12$, $b=x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_3+x_1^2+x_2x_3+x_2x_1+$

$+x_2x_3+x_2x_1+x_3^2+x_2x_1=x_2^2+x_1^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$x_2^2+x_1^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_3+x$

$x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_1+x_2x_3+x_3^2+x_3x_1+x_3x_2=$

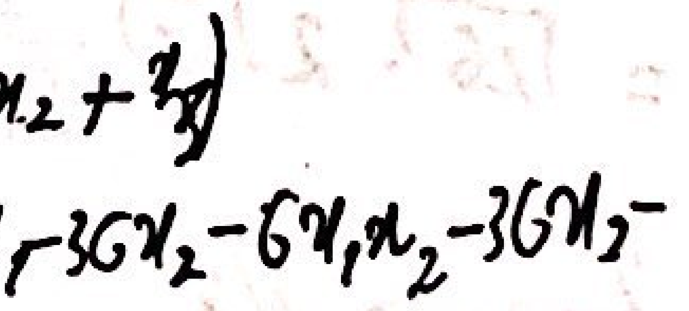
$b=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=36+7=\boxed{43}$

$c=(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_3+x_1)=x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+$

$+x_1x_2^2+x_1x_2x_3=2x_1x_2x_3+x_3^2(x_1+x_2)+x_2^2(x_1+x_3)+x_1^2(x_2+x_3)$

$(-6-x_1)(-6-x_2)(-6-x_3)=(36+6x_1+6x_2+x_1x_2)(-6-x_3)=-216-36x_1-36x_2-6x_1x_2-36x_3-$

$-6x_1x_3-6x_2x_3-x_1x_2x_3=-(216+36\cdot(-6))+6\cdot7-1$ вел



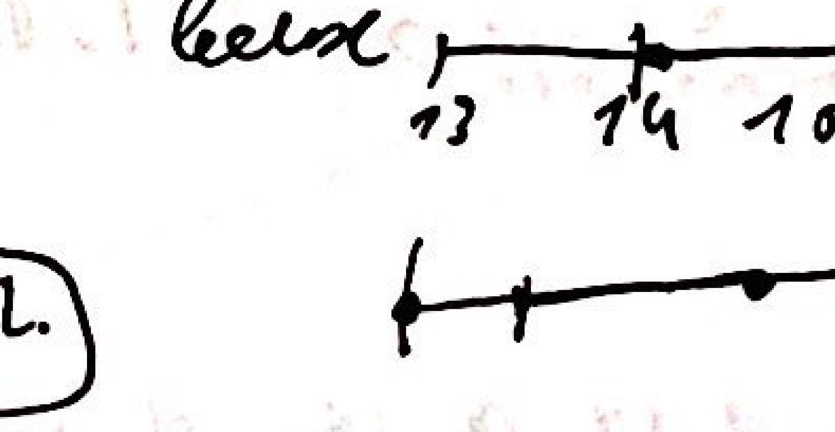
№2. вел, v, t, пешком $2v$, $t-3$.

$vt=2v(t-3)$ $t=2t-6$ $\boxed{t=6?}$

$vt=2v(t+3)$ $t=2t+6$ $t<0$ —

$vt=2v(t+1)$ ~~t=2t+2~~

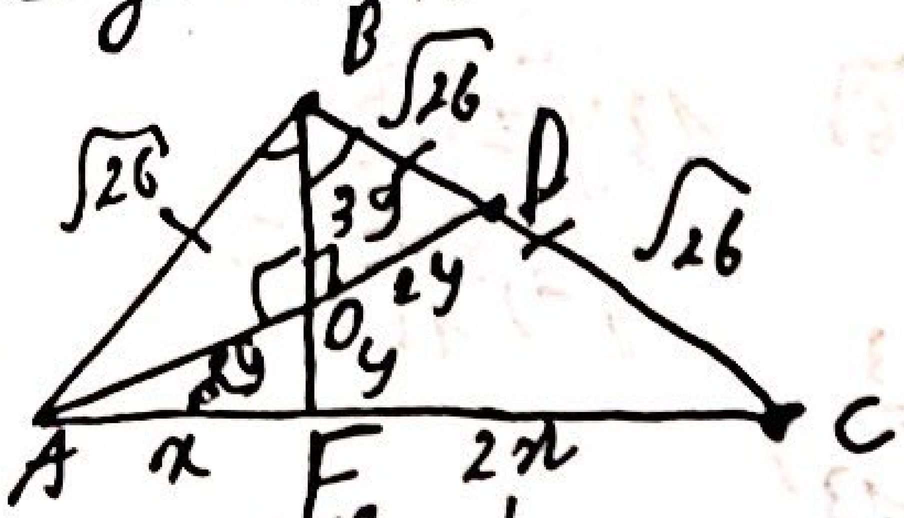
$vt=2v(t-1)$ $t=2t-2$ $t=2$



Чистовик.

1	2	3	4	5	6

Задача №4.



т.к. BE - биссектр, AD - медиана $\Rightarrow AD \perp BE$ по условию $\Rightarrow$ $BO \perp AD$, но также BO - биссектр для $\triangle ABD$, а т.к. BO - и высота и биссектр. в $\triangle ABD \Rightarrow$ он равнобедр $\Rightarrow$ $AB=BD=\sqrt{26}$.

по св-ву биссектр $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ пусть $AE=x$, тогда $EC=2x \Rightarrow AC=3x$

по Т. Менелая для $\triangle BEC$ и секущей $AD \Rightarrow \frac{CD}{DB}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}}\cdot\frac{BO}{OE}\cdot\frac{x}{3x}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO}{OE}=3$, пусть $BO=3y$, тогда $OE=y$, тогда $BE=4y$.

по Т. Менелая для $\triangle ACD$ и секущей $EB \Rightarrow \frac{CE}{EA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}=1$

$\frac{2x}{x}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}}=1 \Rightarrow \frac{AO}{OD}=1 \Rightarrow AO=OD$, но т.к. $BE=AD$ (по условию) $\Rightarrow$

$\cancel{AD=2BE=BE=4y\Rightarrow B}$ $AD=2AO=BE=4y \Rightarrow AO=2y$.

Рассм. $\triangle AOB$ ($\angle AOB=90^\circ$): по Т. Пифагора: $4y^2+9y^2=26 \Rightarrow 13y^2=26 \Rightarrow y=\sqrt{2} \Rightarrow$

$AO=2y=2\sqrt{2}$, $BO=3y=3\sqrt{2}$, $\cos\angle ABO=\frac{BO}{AB}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin\angle ABO=\frac{AO}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot 2\sin\angle ABO\cdot\cos\angle ABO=$

$=\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{26}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{26\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{13}=24$. Ответ: 24.

Задача №3.

$x^3+6x^2+7x+1=0$ по Т. Виета $x_1+x_2+x_3=-6$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7$

$x_1x_2x_3=-1$

Если x_1+x_2, x_2+x_1, x_3+x_1 - корни $x^3+ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$ также по Т. Виета

$x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1=2(x_1+x_2+x_3)=\boxed{-12=-a} \Rightarrow \boxed{a=12}$

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_3+x_1)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=36+7=\boxed{43}$

49-80-42-72
(138.2)

Чистовик.

$-c=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) \Rightarrow$

т.к. $x_1+x_2+x_3=-6 \Rightarrow x_1+x_2=-6-x_3$, $x_1+x_3=-6-x_2$; $x_2+x_3=-6-x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -c=(-6-x_1)(-6-x_2)(-6-x_3)=-(6+x_1)(6+x_2)(6+x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c=}\cancel{216}(36+6x_1+6x_2+x_1x_2)(6+x_3)=216+36x_1+36x_2+6x_1x_2+36x_3+6x_1x_3+6x_2x_3+x_1x_2x_3=$

$=216+36(x_1+x_2+x_3)+6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+x_1x_2x_3=\cancel{216}+\cancel{36(-6)}+6\cdot 7-1=$

$=\boxed{41}$

Ответ: $a=12$; $b=43$; $c=41$.

Задача №2. Пусть скорость велос. равна v, и время в пути t.

Тогда скорость мотоцикл. будет равна $2v$.

Всего сущ. 4 случая:

1) велос. выехал на час позже мотоцикл. и делал остановку 2 часа, тогда время мотоцикл. равно $t+3$ ч.

т.к. расстояние они проехали одинаковое $\Rightarrow vt=2v(t+3) \Rightarrow t=2t+6 \Rightarrow t=-6$,

но время не может быть отрицательным $\Rightarrow$ неверно.

2) велос. выехал на час позже, но остановку делал мотоциклист, тогда время мотоциклиста равно $t-1 \Rightarrow vt=2v(t-1) \Rightarrow t=2t-2 \Rightarrow t=2$, тогда если велос. выехал на час позже мотоцикл. $\Rightarrow$ он как раз выехал в 13:00 $\Rightarrow$ будет в B в 15:00.

3) велос. выехал на час раньше мотоцикл. и сделал 2-ух часовую остановку, тогда время мотоцикл. равно $t+1 \Rightarrow vt=2v(t+1)$ $t=2t+2 \Rightarrow t=-2$ неверно

4) велос. выехал на час раньше мотоцикл. но остановку делал мотоцикл., тогда время движения мотоцикл. равно $t-3 \Rightarrow vt=2v(t-3)$

$t=2t-6$ $t=6$ ч, и т.к. велос. выехал на час раньше мотоцикл., то есть в 12:00 (по условию) $\Rightarrow$ ~~при~~ будет в B в 18:00.

Ответ: 15:00 или 18:00.

Черновик.

$\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ $\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt2}+1}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt2}{2\sqrt2}}$

$\sin^2(x+\alpha)=(\sin x\cdot\cos\alpha+\cos x\cdot\sin\alpha)^2=\sin^2x\cos^2\alpha+\cos^2x\cdot\sin^2\alpha+2\sin x\cos x\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$ $\quad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt2}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt2-1}{2\sqrt2}}$

$\sin^2x\cdot\frac{1+\sqrt2}{2\sqrt2}+\cos^2x\cdot\frac{\sqrt2-1}{2\sqrt2}+\frac{1}{2}\sin2x\cdot\cos\alpha$

$\sqrt2-1=\frac{1}{\sqrt2+1}$ $\quad \sin^2x\left(\frac12+\frac{1}{2\sqrt2}\right)+\cos^2x\left(\frac12-\frac{1}{2\sqrt2}\right)+\frac12\sin2x\cdot\frac{1}{\sqrt2}=$

$100=2^2\cdot5^2=3\cdot3=9$

$=1-\frac{1}{2\sqrt2}\cdot\cos2x+\frac{1}{2\sqrt2}\sin2x.$

1 2 4 5 10 20 25 50 100

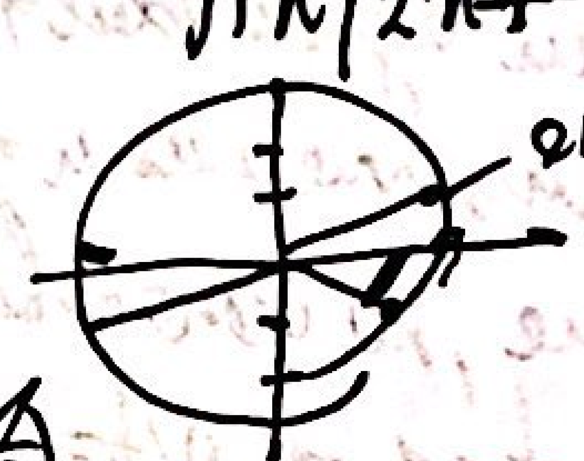
$1-2\sqrt2\cos2x-\sqrt2\sin2x=2-\frac{1}{\sqrt2}\cos2x+\frac{1}{\sqrt2}\sin2x$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9

8

100 100 100

$-\frac{3}{\sqrt2}\sin2x-\frac{3}{\sqrt2}\cos2x=1$ $\quad -\frac{3}{\sqrt2}(\sin2x+\cos2x)=1$ $\quad <13$

$-\frac{3}{\sqrt2}\cdot\sqrt2\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin2x+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\cos2x\right)=1$ $\quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac13$ $\quad p_3\cdot p_{1699}\geq N$



$2x+\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(-\frac13\right)$ $\quad \arcsin\frac13$

$2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(-\frac13\right)$

$=\pi+\arcsin\left(\frac13\right)$

1200 3·2·2·2

$98=2^1\cdot7^2$

1·2·7·14·49·98

1 2 3 4 5 6

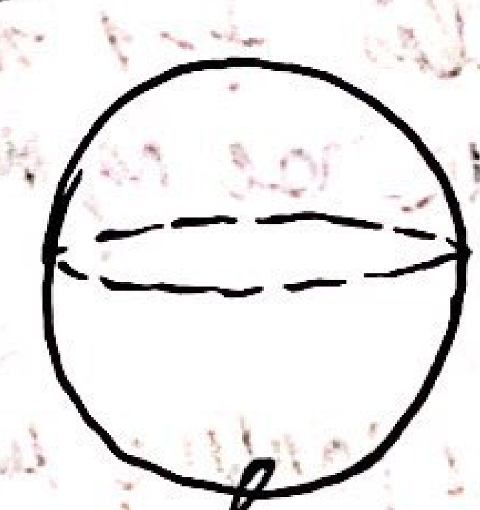
$2x+\frac{\pi}{4}=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

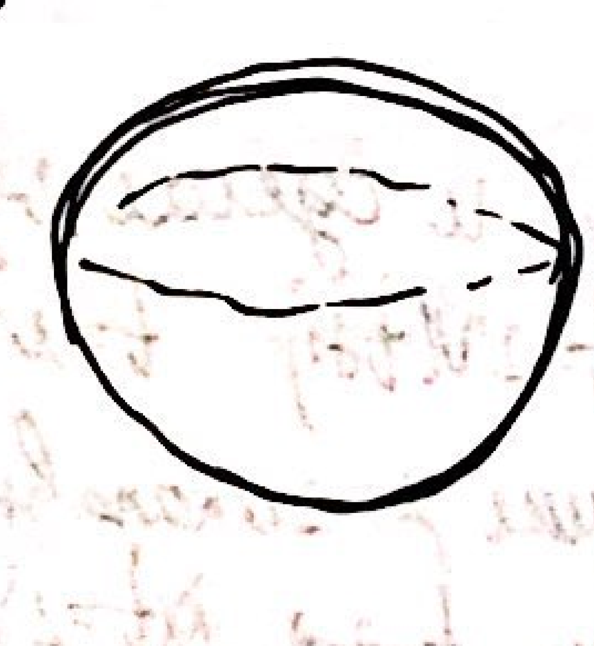
114416

$p_3\cdot p_8\cdot p_4\cdot p_7$

4·4·13·13·49

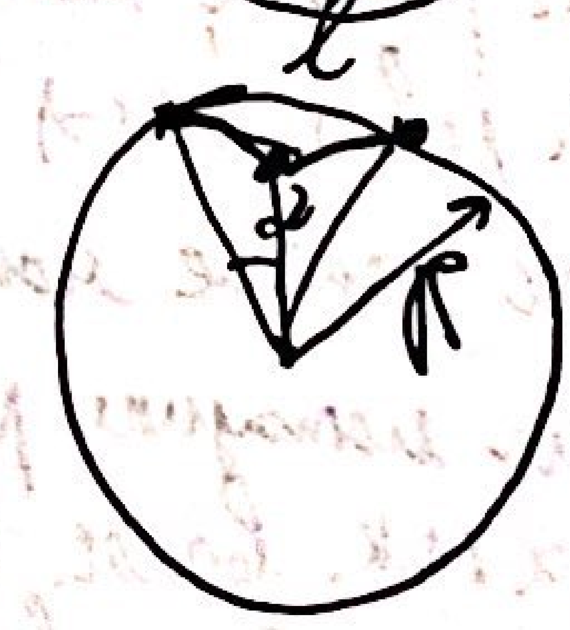
169 · 49 = 76 ... 6





$2\pi R$

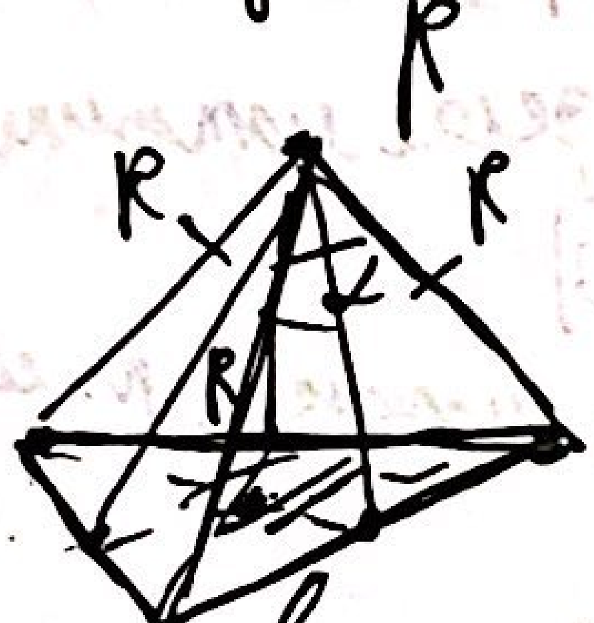
$l=\frac{\alpha\cdot2\pi R}{2\pi}=\alpha R$

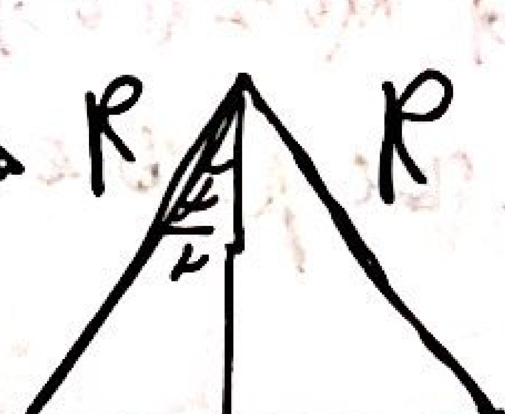


$4\pi=\alpha R$

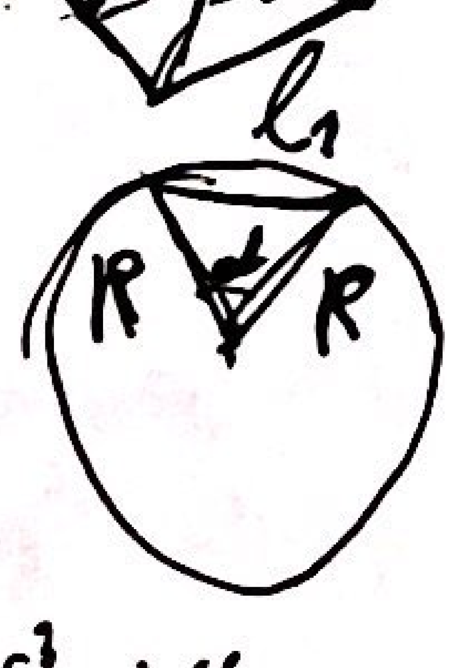
$\alpha_1=\frac{4\pi}{R}$

$\alpha_2=\frac{\pi}{R}, \alpha_3\frac{\pi}{R}$





$l_1=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$



$l_1^2=R^2+R^2-2R^2\cdot\cos\alpha=2R^2(1-\cos\alpha)\to l_1=R\cdot\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

1696 · 3 = 5088

$\alpha_2+\alpha_3=2\alpha_1$ $\quad$ 6: 1 2 3 6 $\quad 6=2^1\cdot3^1$

$n(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=4$

5091

$6^3=216$ $\quad 20=1,2,4,5,10,20.$

$2^3\cdot3^3=8\cdot27$

$20=2^2\cdot5^1$ $\quad n=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=3\cdot2=6.$

$N=a^{\alpha_1}\cdot b^{\alpha_2}\cdot c^{\alpha_3}\cdots z^{\alpha_k}$ $\quad \sigma=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\ldots(\alpha_n+1)$

1699 | 3

$N^3=a^{3\alpha}\cdot b^{3\alpha}$ $\quad \sigma(N^3)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)(3\alpha_3+1)$

$(3x+1)(3b+1)(3c+1)=3^3abc\ldots ab\ldots bc+ac+1$ $\quad 1699=1698+1$

Чистовик.

Задача №1. Преобразуем правую часть

$\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{1}{\sqrt2}+1}{2} = \frac{1+\sqrt2}{2\sqrt2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = 1-2\sin^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt2}}{2} = \frac{\sqrt2-1}{2\sqrt2}$

$\sin^2(x+\frac{\pi}{8}) = (\sin x\cos\frac{\pi}{8} + \cos x\sin\frac{\pi}{8})^2 = \sin^2 x\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2 x\cdot\sin^2\frac{\pi}{8} + 2\sin x\cos x\cdot$

$\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sin^2 x\left(\frac{1+\sqrt2}{2\sqrt2}\right) + \cos^2 x\left(\frac{\sqrt2-1}{2\sqrt2}\right) + \frac12\sin2x\cdot\sin\frac{\pi}{4} =$

$= \sin^2 x\cdot\frac{1}{2\sqrt2} + \underbrace{\sin^2x\cdot\frac12+\cos^2x\cdot\frac12}_{\frac12} - \cos^2 x\cdot\frac{1}{2\sqrt2} + \sin2x\cdot\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt2} =$

$= \frac12 - \frac{1}{2\sqrt2}(\cos^2x-\sin^2x) + \frac{1}{2\sqrt2}\cdot\sin2x = \frac12 - \frac{1}{2\sqrt2}\cos2x + \frac{1}{2\sqrt2}\sin2x$

$2\cdot\sin^2(x+\frac{\pi}{8}) = 1 + \frac{1}{\sqrt2}\sin2x - \frac{1}{\sqrt2}\cos2x$

Левая часть:

$1-\sqrt2\cos x\sin x - 2\sqrt2\cos^2x + 2\sqrt2\sin^2x - \sqrt2\sin x\cdot\cos x = 1-\sqrt2\cdot2\sin x\cdot\cos x -$

$-2\sqrt2(\cos^2x-\sin^2x) = 1-\sqrt2\sin2x - 2\sqrt2\cdot\cos2x$

из равенства левой и правой части $\Rightarrow \cancel{1} - \sqrt2\sin2x - 2\sqrt2\cos2x = \cancel{1} + \frac{1}{\sqrt2}\sin2x - \frac{1}{\sqrt2}\cos2x$

$\sin2x\left(\frac{1}{\sqrt2}+\sqrt2\right) + \cos2x\left(2\sqrt2 - \frac{1}{\sqrt2}\right) = 0$

$\frac{3}{\sqrt2}\sin2x + \frac{3}{\sqrt2}\cdot\cos2x = 0 \;\Big|:\frac{3}{\sqrt2} \Rightarrow \sin2x+\cos2x=0$

$\cancel{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin2x + \cos2x\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right) = 0 \;\Big|:\sqrt2$

$\sin(2x+\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow 2x+\frac{\pi}{4} = \pi k, k\in Z \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}, k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{8}, k\in Z.$

Чистовик.

Задача №6. Если $N=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot\ldots k^{\alpha_n} \Rightarrow \sigma(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1)$

$N^3=(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\ldots k^{\alpha_n})^3 = 2^{3\alpha_1}\cdot 3^{3\alpha_2}\cdot 5^{3\alpha_3}\cdot\ldots k^{3\alpha_n} \Rightarrow \sigma(N^3)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)(3\alpha_3+1)\ldots$

$\ldots(3\alpha_n+1)$

если номера делителей в сумме дают одно и то же число, то их произведения равны $\Rightarrow$ $p_3\cdot p_{1697}=p_4\cdot p_{1696}=a \Rightarrow$ т.к. $3+1697=4+1696=1700$ $a^2\geq N^2 \Rightarrow a\geq N \Rightarrow p_3\cdot p_{1697}=p_4\cdot p_{1696}\geq N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ количество делителей ~~[illegible]~~ меньше ~~[illegible]~~ ~~$3+1697+1=1699$~~ $3+1697=1700$

$\sigma(N) \leq 1700 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_n+1)=2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot17$

, одновременно с этим $\sigma(N)\geq 1697$

1700	2
850	2
425	5
85	5
17	17
1	

$\sigma(N)=1697=\alpha+1 \Rightarrow \alpha=1696 \Rightarrow \sigma(N^3)=3\alpha+1=3\cdot1696+1=5089$

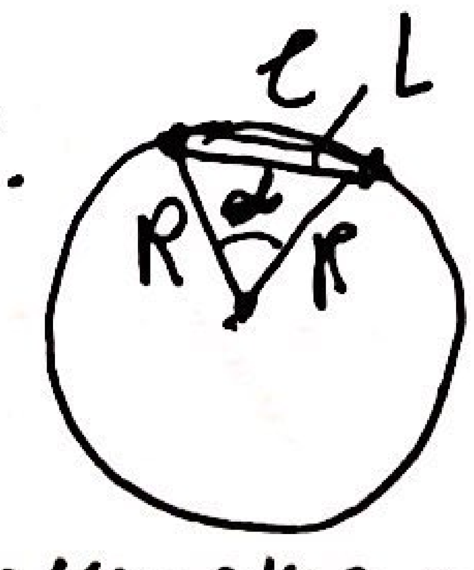
$\sigma(N)=1698=\alpha+1 \Rightarrow \alpha=1697 \Rightarrow \sigma(N^3)=3\alpha+1=5092$

$\sigma(N)=1699=\alpha+1 \Rightarrow \alpha=1698 \Rightarrow \sigma(N^3)=3\alpha+1=5095$.

Ответ: 5089, 5092, 5095.

Черновик.

Задача №5.



Если радиус сферы $R \Rightarrow l = R \cdot \alpha \to \alpha = \frac{l}{R}$

$\alpha_1 = \frac{3\pi}{R}, \alpha_2 = \frac{4\pi}{R}, \alpha_3 = \frac{5\pi}{R}$

тогда расстояние между 2 точками равно $L = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

периметр $P = L_1 + L_2 + L_3 = R\sqrt{2(1-\cos\alpha_1)} + R\sqrt{2(1-\cos\alpha_2)} + R\sqrt{2(1-\cos\alpha_3)}$