82-51-59-74
(123.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробъёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Радотшича Бойко Бранковича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
82-51-59-74	85	20	20	20	20	0	5		

82-51-59-74 (123.9)

чистовик

№1

$1+\sqrt{2}\cos x(\sin x - 2\cos x) + \sqrt{2}\sin x(2\sin x + \cos x) = 2\sin^2(\frac{\pi}{8} - x)$

$1+\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x\cos x = 2\sin^2(\frac{\pi}{8} - x)$

$\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sin^2(\frac{\pi}{8} - x) - 1$

$\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos 2x = -\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$

$\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$

$\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2x = 0$

$(\sqrt{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x) + (-2\sqrt{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x) = 0$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x = 0 \quad | : \frac{3\sqrt{2}}{2} (\neq 0)$

$\sin 2x = \cos 2x \quad | : \cos 2x$

1) если $\cos 2x = 0$, то

$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$ — нет реш $\Rightarrow \cos 2x \neq 0$

$\Rightarrow$ иначе:

$\operatorname{tg} 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (\cos(\frac{\pi}{4} + \pi n) \neq 0)$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

№2

Заметим, из условия следует 4 варианта развития событий:

I) A_b выехал на 1ч. раньше и сделал остановку на 2ч.

II) A_b выехал на 1ч. раньше, а B_{a} сделал ост. на 2ч.

III) B_a выехал на 1ч. раньше и сделал ост на 2ч.

IV) B_a выехал на 1ч. раньше, а A_b сделал ост на 2ч.

Разберём их!

Пусть S — расст от A до B; $v_a = 2v_B$ (по усл.)

I) Пусть t_b — время, кот ехал ~~велосипед~~ B_a, тогда

$t_a = \underset{\text{раньш}}{t_b+1} - \underset{\text{остан}}{2} = t_b - 1.$ (t_a — время езды)

тогда $S = v_b \cdot t_b = v_a \cdot t_a.$

$v_b \cdot t_b = 2v_b \cdot (t_b - 1)$

$v_в \cdot t_в = 2v_в \cdot t_в - 2v_в$ $| : v_в \,(\neq 0)$

а время приезда а $11:00 + t_a + 2ч = 14:00$ — одновременно ($2ч$ — ост)

$t_в = 2t_в - 2$

$t_в = 2$ часа $\Rightarrow t_a = 1ч.$ $\Rightarrow$ время приезда вел. $14:00 \,(12:00 + t_в)$

II) t_a — время езды автомоб. (выезжал в 11:00)

тогда $t_в = t_a - \underset{\text{позже}}{1} - \underset{\text{ост}}{2} = (t_a - 3)ч.$

тогда $S = v_в \cdot t_в = v_a \cdot t_a$

$v_в \cdot (t_a - 3) = 2v_в \cdot t_a$ $| : v_в (\neq 0)$

$t_a - 3 = 2t_a$

$t_a = -3$, но время езды > 0 (физ см) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ этого случая быть не могло

III) t_a — время езды авт (выезжал в 12:00)

тогда $t_в = t_a + \underset{\text{раньше}}{1} - \underset{\text{ост}}{2} = t_a - 1$

тогда $S = v_в \cdot t_в = v_a \cdot t_a$

$v_в \cdot (t_a - 1) = 2v_в \cdot t_a$ $| : v_в \,(\neq 0)$

$t_a - 1 = 2t_a$

$t_a = -1$, но время езды > 0 (физ см) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ этого случая быть не могло

IV) $t_в$ — время езды вел (выехал в 11:00)

тогда $t_a = t_в - \underset{\text{позже}}{1} - \underset{\text{ост.}}{2} = t_в - 3$

тогда $S = t_a \cdot v_a = t_в \cdot v_в$

$2v_в (t_в - 3) = t_в \cdot v_в$ $| : v_в \,(\neq 0)$

$2t_в - 6 = t_в$

$t_в = 6ч. \Rightarrow t_a = 3ч.$

тогда приехали в п. в вел ~~авт~~ в $17:00 \,(11:00 + t_в)$

~~а авт~~ а авт в $12:00 + t_a + \underset{\text{ост}}{2ч} = 17:00$

одновременно

Ответ: в 14:00 если авт выехал на 1ч. раньше и сделал ост.

в 17:00 если вел. выехал на 1ч. раньше, а авт сделал. ост

82-51-59-74 (123.9)

№3

1) т.к. x_1, x_2, x_3 – корни $x^3+6x^2+7x+1=0$, то по кубич. Т Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-6 \ (\bullet) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \ (\times) \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1 \end{cases}$$

чтобы числа (x_1+x_2); (x_2+x_3); (x_1+x_3) были корнями ур-я $x^3+ax^2+bx+c=0$

должно вып. Т Виета для кубич. ур-я

т.е.
$$\begin{cases} (x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_1+x_3)=-a \ (1) \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)=b \ (2) \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=-c \ (3) \end{cases}$$

Заметим! (1) $2x_1+2x_2+2x_3=-a$, а из п.1. $x_1+x_2+x_3=-6$,

$\Rightarrow -12=-a$.

$\underline{a=12}$

(2)

$\underline{x_1x_2}+\underline{\underline{x_1x_3}}+x_2^2+\underset{\sim}{x_2x_3}+\underline{x_1x_2}+\underset{\sim}{x_2x_3}+\underline{\underline{x_1x_3}}+x_3^2+x_1^2+\underline{\underline{x_1x_3}}+\underline{x_1x_2}+\underset{\sim}{x_2x_3}$

$=3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3)+$

$+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)$

из (•) $x_1+x_2+x_3=-6$

из (×) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2=7$

$\Rightarrow b=(-6)^2+7=36+7=43$. $\underline{b=43}$

(3) $(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_1+x_3)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1\cdot x_2^2+\underline{x_1x_2x_3}+x_2x_3x_3+$

$+x_1x_3^2+x_3x_2^2+x_2x_3^2$ ~~$+2(x_1+x_2+x_3)+$~~ $=-c$

Заметим: если $(\bullet)\cdot(\times)$, то

$(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)(x_1+x_2+x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_2x_3+$

$+x_1x_2x_3+x_2\cdot x_3^2+x_1\cdot x_3^2=(3)-x_1x_2x_3=-c-x_1\cdot x_2\cdot x_3$

тогда $7\cdot(-6) = -c-1(-1)$

$-42 = -c+1$

$c = 43$

Итого $a = 12$

$b = 43$

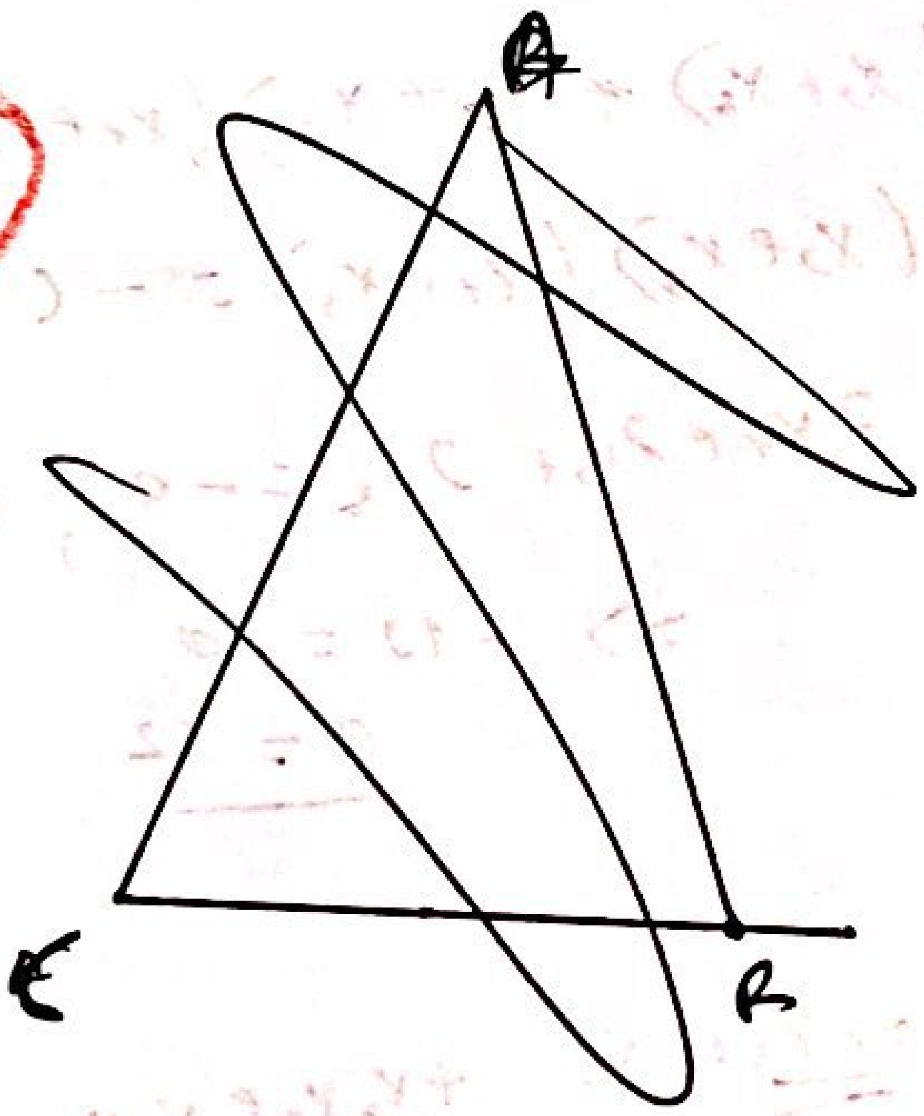
$c = 43$

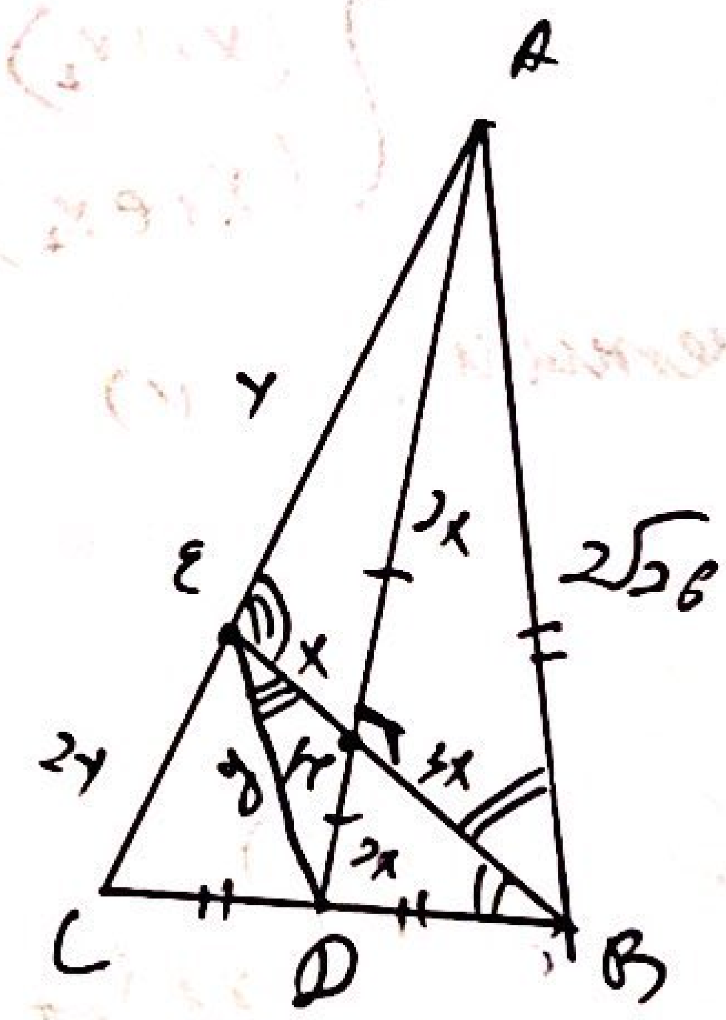
Ответ: $a = 12$

$b = 43$

$c = 43$

№4





Решение:

1) $BE \cap AD = H$, тогда в $\triangle ADB$: BH – бис и выс $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ADB$ – р/б (осн AD) и BH – мед (по св-ву)

тогда $DB = AB = 2\sqrt{26}$

и $CB = 4\sqrt{26}$; $CD = 2\sqrt{26}$

2) BE – бис $\triangle ACB$; $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$

3) Заметим: в $\triangle AED$: EH – мед и выс $\Rightarrow \triangle AED$ – р/б (осн ED и EH – бис (по св-ву)

тогда $AE = ED = y$

4) $\triangle CED$: по Т cos: $\cos\angle C = \frac{EC^2 + CD^2 - ED^2}{2EC\cdot CD} = \frac{AC^2 + CB^2 - AB^2}{2\cdot AC\cdot CB}$

$\frac{4y^2 + (2\sqrt{26})^2 - y^2}{2\cdot 2y\cdot 2\sqrt{26}} = \frac{9y^2 + (4\sqrt{26})^2 - (2\sqrt{26})^2}{2\cdot 3y\cdot 4\sqrt{26}}$ $\Big| \cdot (2y\cdot 4\sqrt{26}) \neq 0$

$3y^2 + 4\cdot 26 = \frac{9y^2 + 16\cdot 26 - 4\cdot 26}{3}$

4) △CEB и секущая AD! по т Менелая

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EH}{HB} = 1 \Rightarrow EH = \frac{1}{3}HB$$

Пусть BE = AD = x (по усл.)

тогда $HB = 3x$

$AH = 2x$

△AHB — прям ⇒ $9x^2 + 4x^2 = 4 \cdot 26$

$x^2 = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

тогда $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot HB = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 3x =$

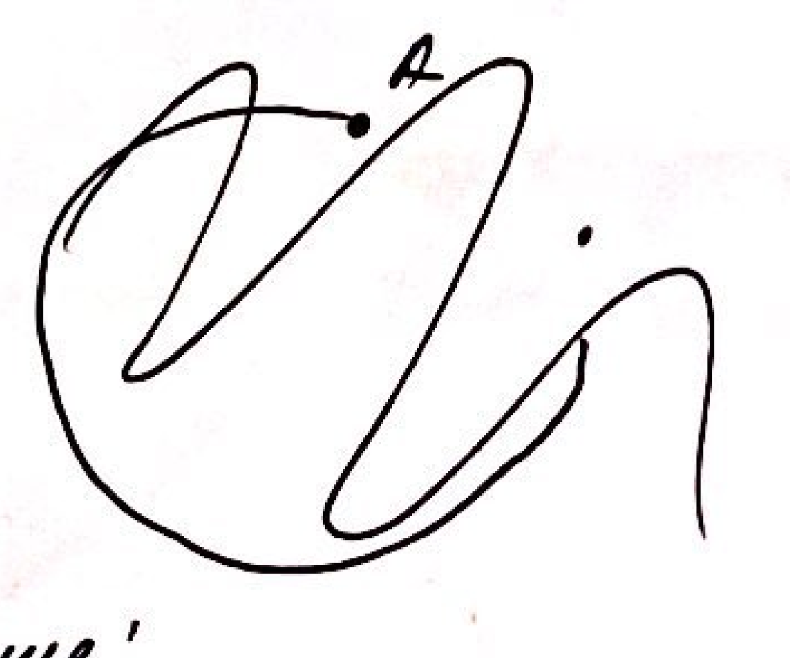
$= 6x^2 = 48$

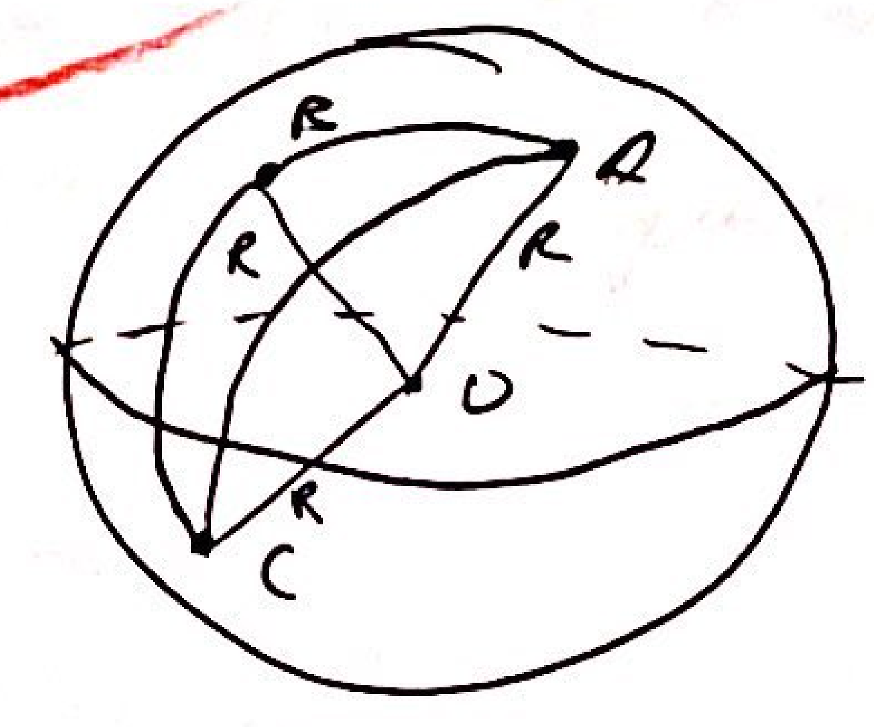
5) AD — мед ⇒ △ADB и △CDB — равновелики

т.е. $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle CDB} = 48 = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 96$

Ответ: 96

№5

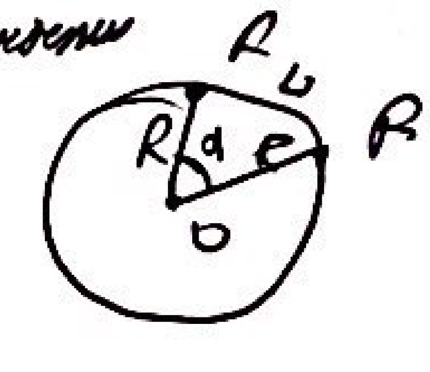




Решение:

1) Заметим, что через O и любые 2 из 3х точек можно провести сечение, образ круг с рад R тем же что и у сферы

т.е. для определенности вершин A и B



тогда $\alpha = \frac{L}{R}$ радиан, $L = 15\pi$ (т.к. малая ∪AB — мин. расст)

$\triangle AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\left(\frac{L}{R}\right)$ (по т. косинусов)

тогда $P_{ABC} = AB + BC + AC = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\frac{15\pi}{R}} + \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\frac{12\pi}{R}} +$
$+ \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\frac{9\pi}{R}} = \sqrt{2}R\left(\sqrt{1 - \cos\frac{15\pi}{R}} + \sqrt{1 - \cos\frac{12\pi}{R}} + \sqrt{1 - \cos\frac{9\pi}{R}}\right)$

Итого мы получили ф-ю $P(R) = \sqrt{2}R\left(\sqrt{1 - \cos\frac{15\pi}{R}} + \sqrt{1 - \cos\frac{12\pi}{R}} + \sqrt{1 - \cos\frac{9\pi}{R}}\right)$

 Чистовик

а её наим. знач. на промеж. $[7,5; +\infty)$ — и есть наш R

заметим, если $\cup AB > l\omega$, то это не подх. по усл.
(т.к. min рассм. было $\cup AB = 2\pi R$)

тогда $D(R)$: $\begin{cases} 13\pi \geqslant 2\pi R \\ 9\pi \geqslant 2\pi R \\ 15\pi \geqslant 2\pi R \end{cases}$

$R \geqslant 7,5$

~~Заметим, что при увелич. R~~

 чистовик

№6

Заметим, как устроены упорядоченные делители числа ~~[illegible]~~ n: $\frac{n}{p_k}\,\frac{n}{p}$ у которых кол-во делит k; $p_1 = 1 < p_2 < \ldots < p_k = n$

$$p_1 \cdot p_k = p_2 \cdot p_{k-1} = p_3 \cdot p_{k-2} = \ldots$$

значит

если $(p_3 \cdot p_{1697}) \cdot (p_4 \cdot p_{1696}) \geq N^2$, что

кол-во делителей $\sigma(N) \in \{1697, 1698, 1699, ~~[illegible]~~\}$

т.к. при $\sigma(N) \geq 1620$, $p_3 \cdot p_{\sigma(N)-2} = N = p_4 \cdot p_{\sigma(N)-3}$

$p_{\sigma(N)-2} > p_{1697}$ ан-но про $p_{\sigma(N)-3}$

т.к. $p_{\sigma(N)-2} > 1697$, а делители упорядочены и им присвоен номер так, что у большего делителя больший номер

Итого

$\sigma(N) = 1697$ или $\sigma(N) = 1698$ или $\sigma(N) = 1699$

Есть ф-ла ~~общего~~ кол-ва делителей числа $N = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots$

степени

простые

$$\sigma(N) = (k_1+1)(k_2+1) \cdot \ldots$$

т.е. если $(k_1+1)(k_2+1) \cdot \ldots = 1697$

~~то k_1+1~~

то $N^3 = p_1^{3k_1} \cdot p_2^{3k_2} \cdot \ldots$

$$\sigma(N^3) = (3k_1+1)(3k_2+1) \cdot \ldots$$

Найдём для каждого объявленного нами $\sigma(N)$

1) $\sigma(N) = 1697$

Заметим: 1697 — простое $\Rightarrow$ оно могло получиться только

$\Rightarrow$ у этого числа $N = p_1^{1696} \Rightarrow$ ~~$\sigma(N^3) = 3 \cdot 1696$~~ $\sigma(N) = (1696+1)$ $N^3 = p_1^{5088} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(N^3) = (\cancel{2}\cdot 5088+1) = \underline{5089}$

$2)\ \sigma(N) = 1698 = 2 \cdot \cancel{849} = 2 \cdot 3 \cdot 283$

~~прост~~ прост

$\Rightarrow$ ед. вариант: $\sigma(N) = (1+1)\cdot(\cancel{1698}+1)$ $(282+1)\cdot(2+1)$

тогда $N = p_1 \cdot p_2^{282} \cdot p^2$

$N^3 = p_1^3 \cdot p_2^{\cancel{2544}\ 850} \cdot p^6$

$\sigma(N^3) = (3+1)(850+1)(6+1) = \cancel{4 \cdot 2545 = 10180}$

$= 4 \cdot 7 \cdot 851 = \underline{23828}$

$3)\ \sigma(N) = 1699 =$

$\Rightarrow$ ед. вариант $\sigma(N) =$

$\begin{array}{r|l} 849 & 3 \\ -6 & 283 \\ 24 & \\ -24 & \\ 09 & \\ -9 & \\ 0 & \end{array}$

$\begin{array}{r} 282 \\ \times\ 3 \\ \hline 846 \end{array}$

$\begin{array}{r} 848 \\ \times\ 3 \\ \hline 2544 \end{array}$

$\begin{array}{r} 851 \\ \times\ 28 \\ \hline 6808 \\ 1702 \\ \hline 23828 \end{array}$

$1699\ |\ 3$

$$\begin{array}{r|l} 1600 & 12 \\ 14 & 2 \\ \hline 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1600 & 13 \\ 13 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -1600 & 12 \\ 163 & 0 \\ \hline 160 & \end{array}$$

16.97 | 7
14
27

16.97 | 13
13
39

16.97 | 17
153
167

16.97 | 19
152
177

16.97 | 23
161
87

16.97 | 70
145 | 58
247
222
75

16.97 | 31
153 | 5
167

16.97 | 37
148 | 46
217
222

16.97 | 41
164 | 4
57

16.97 | 43
129
407

16.98 | 7
16 | 2
08
8
18

8.49 | 7
7 | 12
14

7 7 1
1696
3
5088

849

$h_{\triangle ABC} = h$

$h_{\triangle TDA} = 2h = h_{\triangle AKD}$

$S_{\triangle CKD} = hy\cdot\frac{1}{2} = \frac{hy}{2}$

$S_{\triangle COA} = \frac{1}{2}\cdot 2h\cdot 3y = 3hy$

$4S_1 =$

$3hy = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{EH}{HA}\cdot\frac{1}{1} = 1$

$\frac{EH}{HB} = \frac{4}{3}$

в $\triangle ABD$: BH – бисс. и выс. ⇒ BH – мед. и $\triangle ADB$ – р/б

$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BDA} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot BH\cdot AD$

$\cos\angle C = \frac{(2y)^2+(2\sqrt{26})^2-y^2}{2\cdot 2y\cdot 2\sqrt{26}} = \frac{(3y)^2+(4\sqrt{26})^2-(2\sqrt{26})^2}{2\cdot 3y\cdot 4\sqrt{26}}$

$\cos\angle A = \frac{2}{2\sqrt{26}}$

~~$AD = \frac{1}{2}\sqrt{(3y)^2+4\cdot 54-16\cdot 54}$~~

$KD = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 9y^2+8\cdot 54-16\cdot 54} =$

$AD^2 = \frac{18y^2-8\cdot 54}{4} =$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\beta$

$y^2z^2 = 4\cdot 26$

$S_{ABC} = 2yz = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{26}\cdot 4\sqrt{26}\cdot\sin\angle ABC =$

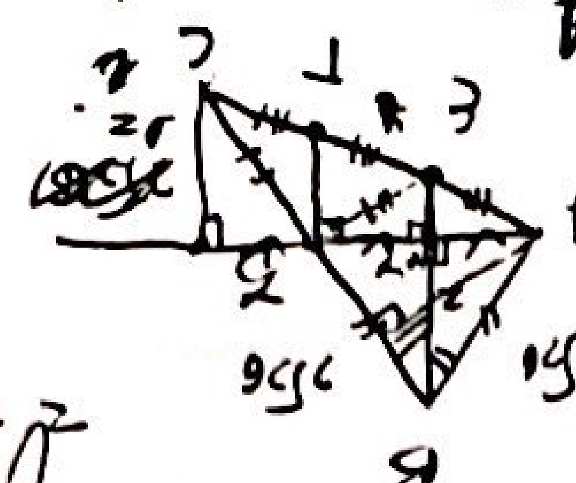
$2z\cdot 2y\cdot\frac{1}{2} = 2yz =$ $HE = \frac{4}{3}z$ $S_{ABD} = yz$

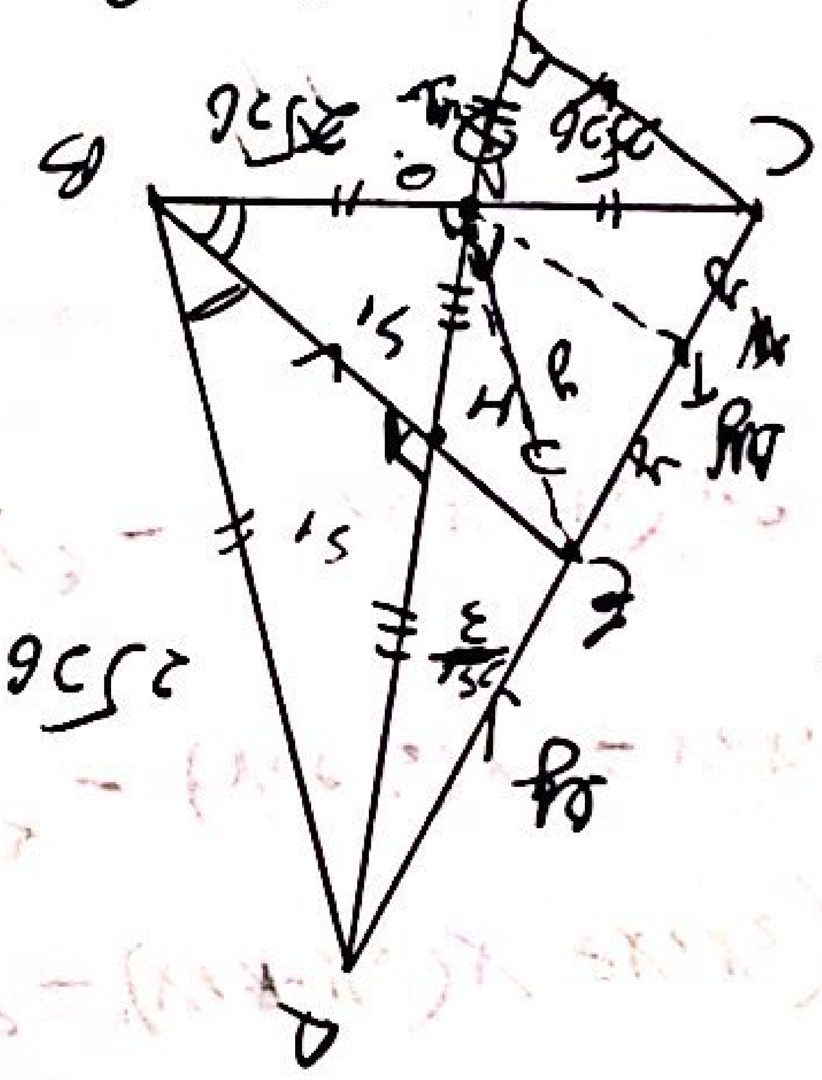
$DT = \frac{4}{3}z$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}z\cdot 2y = \frac{8}{3}zy$

$\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\frac{4}{3}z = \frac{4}{3}yz$

$= \frac{1}{2}h\cdot 4\sqrt{26}$

$h = \sin\angle B\cdot 2\sqrt{26}$





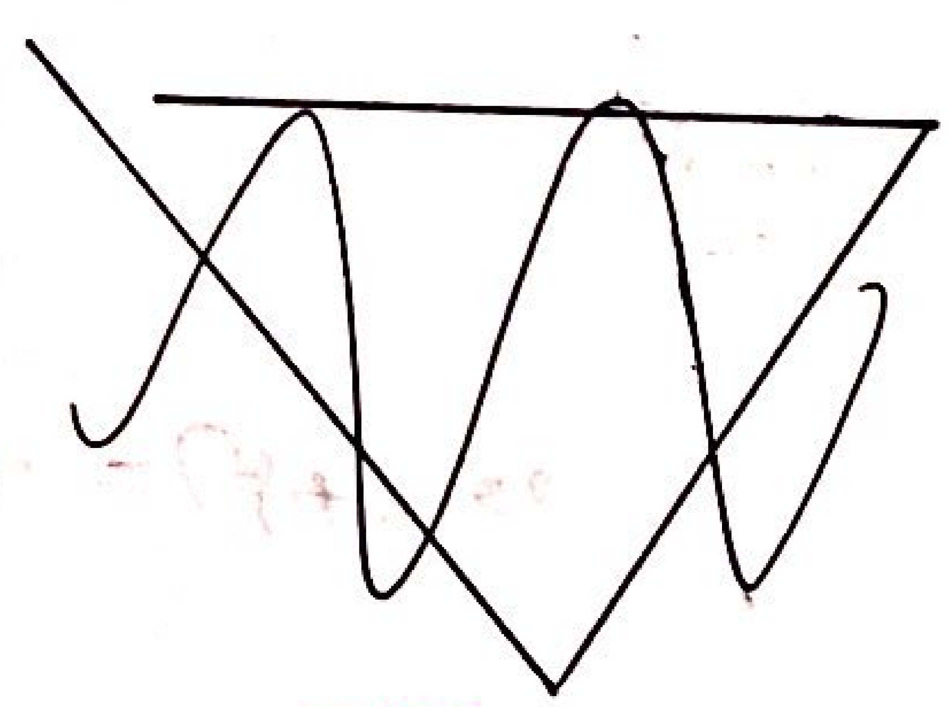
$\frac{1}{2}EH\cdot BP = S_{\triangle AHB}$

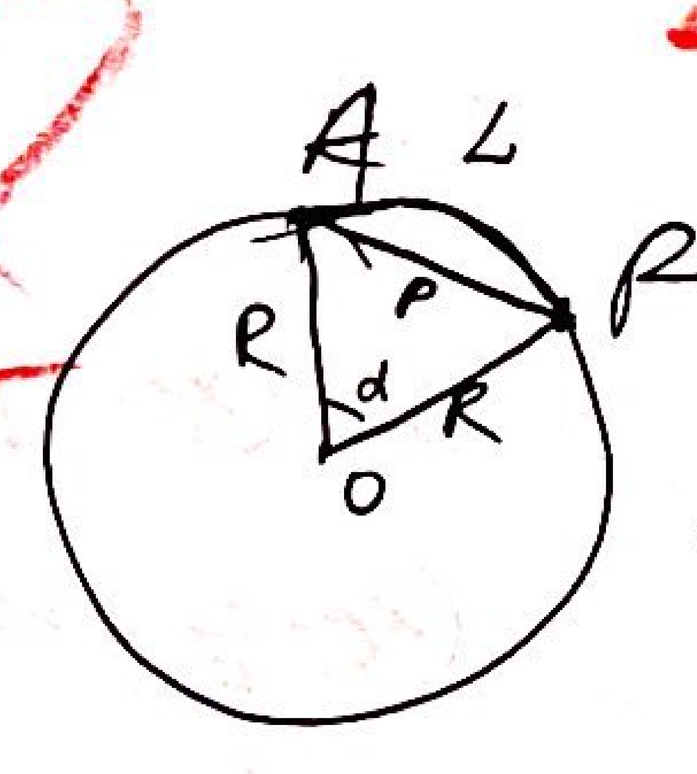
$S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2}\cdot 3EH\cdot 2\cdot AH =$

$= 3EH\cdot AD = S_{ABD}\cdot\frac{1}{2}$

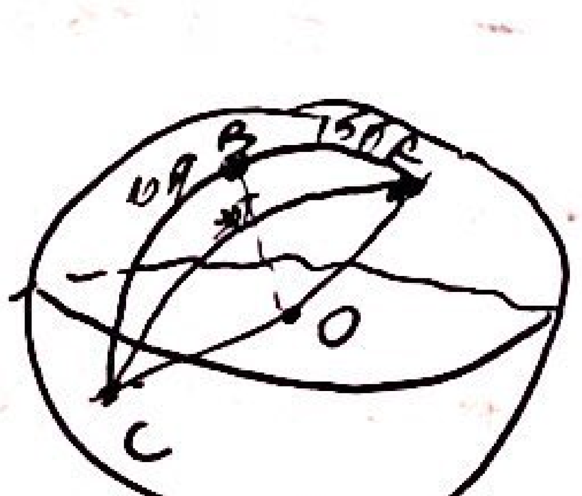
$\frac{1}{2}\cdot BH\cdot BH = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

$AH\cdot\frac{3}{4}EH = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$





$\alpha = \frac{L}{R}$ | в рад



$P = 2R^2 - 2R^2\cdot\cos\left(\frac{L}{R}\right) =$

$\ell = 2R^2 - 2R^2\cdot\cos\left(\frac{15\pi}{R}\right) + 2R^2 - 2R^2\cdot\cos\left(\frac{12\pi}{R}\right) + 2R^2 - 2R^2\cdot\cos\left(\frac{9\pi}{R}\right)$

$= 2R^2\left(3 - \left(\cos\left(\frac{15\pi}{R}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{R}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{R}\right)\right)\right) =$

$1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x+\cos x)=2\sin^2(\frac{\pi}{8}-x)$

$1+\underline{\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x}-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x+\underline{\sqrt{2}\sin x\cos x}=2\sin^2(\frac{\pi}{8}-x)$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}(\cos 2x)=2\sin^2(\frac{\pi}{8}-x)-1$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=-\cos(\frac{\pi}{4}-2x)$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x+\cos(\frac{\pi}{4}-2x)=0$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

№2

$v_k=2v_a$

$t_1=10:00$

$t_2=11:00$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$

$=(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)(x-x_3)=$

$=(x^3-(x_1+x_2)x^2+x_1x_2x-x^2\cdot x_3+(x_3(x_1+x_2))x-x_1x_2x_3$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+x(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-x_1x_2x_3=0$

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=-1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \\ x_1+x_2+x_3=-6 \end{cases}$$

$(x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3)(x_1+x_3)$

$(7+x_2^2)(x_1+x_3)=7x_1+7x_3+x_2^2$

$(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)(x_1+x_2+x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1^2x_3+x_2^2x_1$

4088
$\times 3$
16996