0 838086 690002

83-80-86-69
(122.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Калинина Александра Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
83-80-86-69	95	20	20	20	20	15	X	X	X

83-80-86-69 (122.1)

Черновик

95 (девяносто пять)

$1-\sqrt{2}\sin x(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x-\sin x)=2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$1-\sqrt{2}\sin x\cos x \underbrace{-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x}-\sqrt{2}\sin x\cos x=2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$

$2\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\sqrt{2}\cos 2x$

$1+\underbrace{2\sqrt{2}\cos 2x}-\sqrt{2}\sin 2x=2\cos^2(x-\frac{\pi}{8}) \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\sqrt{2}(2\cos^2 x-1+2\sin x\cos x$

$313 : 19 = 1$, 19, 123

~~$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos 2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x=\cos^2(x-\frac{\pi}{8})$~~

$2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})-1=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

5, $19 \cdot 6 = 124$

$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\cos(2x-\frac{\pi}{4})=$

$=\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}+\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x$

$k=1877,\ k=1878,\ k=1879$

$1876 \ge k-3$

$1877 \le k \le 1879$

$1879-2=1877$

$p_1<p_2<\dots<p_k<q<p_k^3$

$q=\frac{N^3}{p_2}$

C_k^3

$(p_1+p_2+\dots+p_k)^3$

$\sigma(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\dots)(\alpha_t+1)$

$17\cdot 9=$

$=(10+7)9=90+63=153$

$\cos(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

$1878 : 3 = 626$, 18, 7, 6, 18

$p_3=\frac{N}{p_{k-2}}$

$\frac{p_{1876}\cdot p_{1877}}{p_{k-2}\,p_{k-3}} \ge 1$

$313 : 17 = 1$, 17, 143

$p_4=\frac{N}{p_{k-3}}$

$1876 \ge k-2$

$626 : 2 = 313$

$313 : 7 = 4$, 28, 33

~~$313 : 11 = 2$, 22, 93~~

$17 \cdot 8 = 136$

$136+17=153$

Черновик

$x^3-6x^2+7x-1=0$ – x_1, x_2, x_3 корни

$x^3+ax^2+bx+c=0$ - x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1 - корни

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

$a=-2(x_1+x_2+x_3)$

$b=(x_1+x_2)$ . .

$(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+$

$A=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2=$

$=x_1(x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_3^2)+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=A+3x_1x_2x_3$

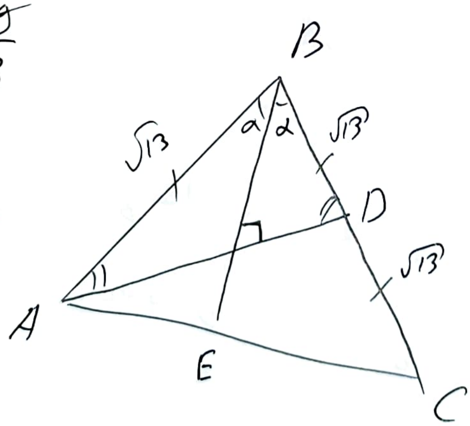
$BE=AD=x$

$\cancel{1-\frac{4}{13}}=\frac{9}{13}$

S_{ABC} - ?

$AB=\sqrt{13}$

x



$S=\frac{1}{2}\sin\alpha\, x(\sqrt{13}+2\sqrt{13})=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot 2\cdot 13$

$\cos\alpha=\frac{26-x^2}{2\cdot 13}$

$x\cdot 3\sqrt{13}=4\cdot 13\cos\alpha$

$\cos\alpha=x\cdot\frac{3}{4\sqrt{13}}$

$x^2=26-2\cdot 13\cos\alpha$

$x^2=26-\frac{2\cdot 13x}{4\sqrt{13}}$

$x^2=26-\frac{\sqrt{13}x}{2}$

$2x^2+\sqrt{13}x-52=0$

$D=13+8\cdot 52$

x.

Чистовик

Задача 3

x_1, x_2, x_3 - корни $x^3-6x^2+7x-1=0$

$x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_3+x_1$ - корни $x^3+ax^2+bx+c=0$

Из т. Виета для многочлена:

$x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$, $x_1x_2x_3=1$;

$a=-2(x_1+x_2+x_3)=-12$

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)=$

$=3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1^2+x_2^2+x_3^2=3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+$

$+(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=(x_1+x_2+x_3)^2+$

$+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=6^2+7=36+7=43$

$c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=\cancel{(x_1x_2+x_3x_1+x_2^2)(x_3+x_1)=}$

$\cancel{=x_1^2x_2+\underbrace{x_1x_2x_3}_{1}+x_1x_3^2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_1x_2^2}$

$=-(\underbrace{2x_1x_2x_3}_{2}+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2)=$

$=-(2+(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-3x_1x_2x_3)=$

$=-(6\cdot 7-1)=-41$. Проверка не требуется т.к. выполняется т. Виета для многочлена

Ответ: $(a,b,c)=(-12,43,-41)$

Лист 1 из 6

Чистовик

Задача 5.

т.е. делители разбиваются на пары, кроме $p_{\frac{k}{2}}, k \vdots 2$

Легко видеть, что $p_i = \frac{N}{p_{k-i+1}}$, $i \leq \frac{k}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_3 = \frac{N}{p_{k-2}}$, $p_4 = \frac{N}{p_{k-3}}$, тогда

$$\frac{N}{p_{k-2}} \cdot \frac{N}{p_{k-3}} \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_{1876} \cdot p_{1877}}{p_{k-2}\, p_{k-3}} \geq 1 \Leftrightarrow \cancel{1876 \geq p_{k-2}, p_{k-2}}$$

$1876 \geq k-3$ (в противном сл. будет <1)

$k \leq \cancel{1878}$ 1879, но т.к. $\exists p_{1877}$

$k \geq 1877$

$k=1877$ и $k=1878$ и $k=1879$ достигаются т.к. все переходы были равносильны.

Пусть $N = \cancel{p}\, q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_t^{\alpha_t}$, где q_i - простые, тогда по известной формуле

~~Ответ:~~ $\sigma(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_t+1) = k$, тогда

$\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\ldots(3\alpha_t+1)$, значит

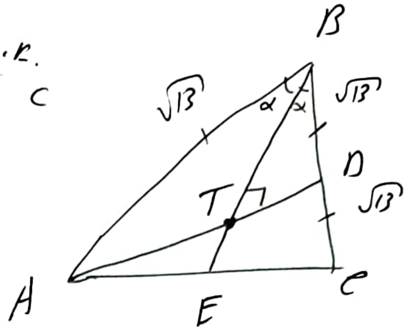
разложив k на простые множители можно найти всевозможные значения α_i $\cancel{\Rightarrow \sigma(N^3)}$, а при помощи них находятся всевозможные значения $\sigma(N^3) = (3\alpha_1+1)\ldots(3\alpha_t+1)$

См. лист 6.

83-80-86-69
(122.1)

Чистовик
Задача 4

Пусть $\angle ABE = \angle EBC = \alpha$.
Заметим, что $\triangle ABD$ р/б, т.к. ~~нас~~ биссектр. совпадает с высотой $\Rightarrow AB = BD = \sqrt{13}$



~~Ает~~ Пусть $AD = BE = x$, то
легко видеть, что
$S_{ABE} + S_{BCE} = S_{ABC}$
$\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \sqrt{13} \cdot x + \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot 2\sqrt{13}x = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}$
$x(\sqrt{13} + 2\sqrt{13}) = 4\cos\alpha \cdot 13$; $3x = 4\sqrt{13}\cos\alpha$; $\cos\alpha = \frac{3x}{4\sqrt{13}}$
$\cos^2\alpha = \frac{9x^2}{16 \cdot 13}$
~~т. косинусов $\triangle ABD$:~~
~~$x^2 = 26 -$~~

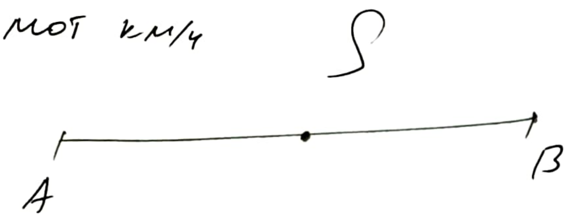
Пусть $BE \cap AD = T$, тогда из равнобедренности $\triangle ABD$ $AT = TD = \frac{x}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{TD}{BD} = \frac{x}{2\sqrt{13}}$; $\sin^2\alpha = \frac{x^2}{4 \cdot 13}$
Легко видеть, что
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4 \cdot 13} + \frac{9x^2}{16 \cdot 13} = 1$;
$16x^2 + 36x^2 = 4 \cdot 13 \cdot 16$
$x^2 = \frac{4 \cdot 13 \cdot 16}{52}$; $x^2 = 16$, $x = 4$, т.к. $\sin\alpha = \frac{x}{2\sqrt{13}} > 0$,
тогда $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha =$
$= \frac{12}{13} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13} = \frac{12}{13} \cdot 13 = 12$

Ответ: 12

Черновик

V - вел. км/ч

2V - мот км/ч



$$p_{1876} = \frac{N}{p_{k+1-1876}} = \frac{N}{p_{k-1875}}$$

$1876 \geq k-1875$

1) мот. выехал раньше => он делал ост.

$$\begin{cases} \frac{S}{V} = t \\ 2V(t-1) = S \end{cases}$$

$2(t-1) = t$

$2t - 2 = t$

$\boxed{t=2}$

2) вел. выехал раньше

a) вел. ост.

$$\begin{cases} \frac{S}{V} = t-1 \\ \frac{S}{2V} = t+1 \end{cases}$$

$2 = \frac{t-1}{t+1}$ $\quad 2t+2 = t-1$

$\cancel{2t = t-1}$ $\boxed{t=-3}$ - неок

$\cancel{t = -1}$

b) мот. ост.

$$\begin{cases} \frac{S}{V} = t+1 \\ \frac{S}{2V} = t-1 \end{cases}$$

$2 = \frac{t+1}{t-1}$ $\quad 2t-2 = t+1$

$t = 1$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2$ $\quad p_3 = \frac{N}{p_{k+1-3}} = \frac{N}{p_{k-2}}$

$$\frac{p_{1876} \cdot p_{1877}}{p_{k-3} \cdot p_{k-2}} \geq 1$$

$1877 \geq k-2$

$k \leq 1877+2 = 1879$

Чистовик

Задача 2

Пусть $V\frac{км}{ч}$ – скорость велосипедиста, тогда $2V$ – скорость мотоциклиста. Пусть S - км - расстояние между A и B, t час. – время через которое вело и мото встретились после начала движения в 13:00.

1) Допустим, мото выехал первым, тогда он делал остановку 2 ч. ~~(в противном случае~~ (если мото не делал остановку, тогда он всегда будет впереди вело $\Rightarrow$ они не попадут одновременно в B), тогда

$$\begin{cases} \frac{S}{2V} = t-2 \\ \frac{S}{V} = t-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{t-2}{t-1};\ t-1 = 2t-4;\ \boxed{t=3}$$

после проверки подходит

2) Велосипедист выехал раньше.

a) вел. останавливался, тогда

$$\begin{cases} \frac{S}{V} = t-2 \\ \frac{S}{2V} = t-1 \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{t-2}{t-1};\ 2t-2 = t-2$$

$t=0$ – не ок

$t>0$

b) мото останавливался, тогда

$$\begin{cases} \frac{S}{V} = t \\ \frac{S}{2V} = t-3 \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{t}{t-3};\ 2t-6 = t;\ \boxed{t=6}$$

подходит после проверки

Ответ: в 16:00 или в 19:00

Чистовик

Задача 1.

$1-\sqrt{2}\sin x\left(\cos x+2\sin x\right)+\sqrt{2}\cos x\left(2\cos x-\sin x\right)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

$-\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x\cos x=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-1$

Заметим, что $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-1=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,

~~2sinx~~ $-\sqrt{2}\cdot 2\sin x\cos x=-\sqrt{2}\sin 2x$,

$2\sqrt{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2\sqrt{2}\cos 2x$, тогда

$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

По формуле косинуса ~~суммы~~ разности

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos 2x+\sin 2x\right)$, тогда

$2\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \,\Big|\cdot\sqrt{2}$

$4\cos 2x-2\sin 2x=\cos 2x+\sin 2x$

~~3cos2x−3cos~~ $3\cos 2x-3\sin x=0$

~~cos2x+~~ ~~cos2x=sin2x~~

~~cos2x−sin2x=0 | 1/cos2x~~

$\cos 2x-\sin 2x=0\,\Big|\cdot\frac{1}{\sin(2x)\neq 0}$

$\sin 2x=0$
$\Downarrow$
$\cos 2x=0$
$\Downarrow$
$\sin^2 2x+\cos^2 2x=0$
противоречие

$\mathrm{ctg}\,2x=1$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$

Лист 5 из 6

Черновик

$x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7$, $x_1x_2x_3=1$

$A: x_1^2x_2+x_1x_2^2+\ldots+x_3^2x_1+x_3x_1^2=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-$
$-3(x_1x_2x_3)=6\cdot7-3=42-3=39$

$a=-2(x_1+x_2+x_3)=-12$

$b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)=$
$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x)=22+21=43$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=$
$=36-14=22$

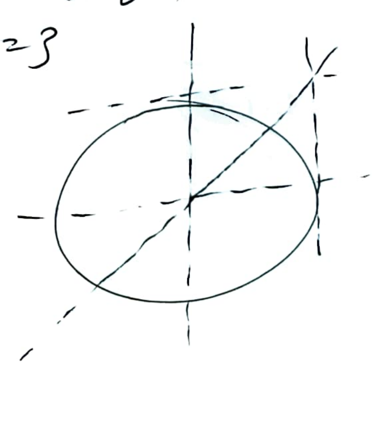
$c=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=2x_1x_2x_3+A=\cancel{2?}$
8 $=-39-2=-41$

Вело позже

$$\begin{cases}\frac{S}{V}=t-1\\ \frac{S}{2V}=t-2\end{cases}$$

$2=\frac{t-1}{t-2}$

$2t-4=t-1$
$t=3$



Вело раньше мото бол:

$\cancel{\frac{V}{S}=t}$

$$\begin{cases}\frac{S}{V}=t\\ \frac{S}{2V}=t-3\end{cases}$$

$2=\frac{t}{t-3}$
$2t-6=t$
$t=6$

Вело бол:

$$\begin{cases}\frac{S}{V}=t-2\\ \frac{S}{2V}=t-1\end{cases}$$

$2=\frac{t-2}{t-1}$
$2t-2=t-2$
$t=0$

Чистовик

Задача 5 (продолжение)

$k = 1878 = 2\cdot 3\cdot 313$, где $2, 3, 313$ – простые

$313 \not\vdots\ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ $\quad \sqrt{313} < \sqrt{400} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ у 313 нет пр. дел ≥ 20

$\Rightarrow$ ~~$\sigma(N) = 2\cdot 3\cdot 313$~~

~~или~~

~~$\sigma(N) = 6\cdot 313$~~ $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 312 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sigma(N^3) = 4\cdot 7\cdot(3\cdot 312+1)}$

или $\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 312 \end{cases} \Rightarrow \sigma(N^3) = \boxed{16\cdot(3\cdot 312+1)}$

или $\begin{cases} \alpha_1 = 2\cdot 313-1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \sigma(N^3) = \boxed{5\cdot(3(2\cdot 313-1)+1)}$

или $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 3\cdot 313-1 \end{cases} \Rightarrow \sigma(N^3) = \boxed{2(3(3\cdot 313-1)+1)}$

или $\alpha_1 = 1877 \Rightarrow \sigma(N^3) = \boxed{3\cdot 1877+1}$

Аналогично для $k = 1877$ и $k = 1879$

или $\alpha_1 = 1876 \Rightarrow \sigma(N^3) = \boxed{3\cdot 1876+1}$

$\alpha_1 = 1878 \Rightarrow \sigma(N^3) = \boxed{3\cdot 1878+1}$

но $k = 1877$ и $k = 1879$ – простые $\Rightarrow$ больше нет возможных значений $\sigma(N^3)$

Ответы в рамочках

Черновик

~~13~~

1877 | 11
11 | 1
77
77
0 7

1877 | 13
13 | 14
57
52
57

(10+3)·4 = 40+12 =
= 52
(20+3)·7 = 140+21 =
= 161

8
19
9
171

23·6 =
(20+3)6 =
= 120+18 =
~~(20+3)8 =~~
~~= 160+~~

1877 | 17
17 | 11
17
17
07

1877 | 19
171 | 9
167

1877 | 23
184 | 8
37

160+24 =
= 184

$\sqrt{1877} < \sqrt{2000} \approx 50$
$\sqrt{3600}$
60

1877 | 27
162 | 6
257

(20+7)5 =
= 100+35
(20+7)6 =
= 120+42 = 162
(20+7)7 = 140+49 =
= 189

42+7 = 49

1877 | 29

~~257~~ 27
(20+7)9 =
= 180+63 =
= 243

1879 | 7
14 | 25
40
35
59

~~1879 | 11~~
~~11~~
~~77~~

~~1879 | 13~~
~~13 | 1~~
~~57~~
~~52~~
~~59~~

1879 | 17
09

~~1879 | 19~~
~~171 | 9~~
~~169~~

~~1879 | 23~~
~~184 | 8~~
~~39~~
?
259 / 27

87
(20+7)7 =
140+49 =