89-26-85-62
(118.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Рылева Артемия Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр 89-26-85-62	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
89-26-85-62	91	21	0	21	21	21	7	X	X

91 (девяносто один) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 0

89-26-85-62
(118.1)

№1 Черновик

$101-1=100 \,|\, 4$

25

$25 \cdot 5 = 125$

126

№4

10

23

$(10-1)\cdot 23+(23-1)\cdot 10=$

$=460-33=427$

$427-229=198$

№2

$p^q-q^p+3=2^{p-1}$

2 и 3

$p^2-2^p+3=2^{p-1}$

$p^2+3=2^{p-1}(3)$

$p^2=3(2^{p-1}-1)$

$9=3(2^2-1)$

$9=9$

Черновик

$2^{q} \cdot q^2 + 3 = 2^{p}$

2^0 1

2 2

2^2 1

2^3 2

2^4 1

$\cancel{3 = q^2 = 2(2^{q-1}+1)}$

$2(2^{q-1}-1) = q^2 - 3$

$2(2^2-1) = 9 - 3$

$6 = 6$

$p = 2$ $q = 3$

$p = 3$ $q = 2$

$\cancel{x \cdot 1 = 2 \cdot 2^3}$ $x \cdot 2 = 1 \cdot 16^3$

2 1 2 16 2048

~~1 2 3~~

1 2 3 4

2^4

2^1 2^0 2^1 2^4 2^{11}

$x \cdot (2^0)^3 = 2 \cdot 2^3 \Rightarrow 2^4$

$x \cdot (2^1)^3 = 1 \cdot (2^4)^3$

$x \cdot 2^3 = 2^{12} \Rightarrow x = 2^9$

Черновик

$2^1 \quad 2^0 \quad 2^1 \quad 2^4 \quad 2^9 \cdot 2^{16} \cdot 2^{25}$

$x \cdot (2^4)^3 = 2 \cdot (2^9)^3$

$x \cdot 2^{12} = 2 \cdot 2^{27}$

$x = 2^{16}$

$x \cdot (2^9)^3 = 2^4 \cdot (2^{16})^3$

$x \cdot 2^{27} = 2^4 \cdot 2^{48}$

$x = 2^{25}$

$$\begin{array}{r} \times\ 2021 \\ 2021 \\ \hline +\ 2021 \\ +\ 4042 \\ 4042 \\ \hline 4084441 \end{array}$$

$2^{(2020)^2}$

$2^{4084441}$

$x \cdot (2^{(n+1)^2})^3 = 2^{n^2} \cdot (2^{(n+2)^2})^3$

$x \cdot 2^{3(n+1)^2} = 2^{n^2+3(n+2)^2}$

$x = 2^{n^2+3n^2+12n+12-3n^2-6n-3}$

$x = 2^{n^2+6n+9}$

$x = 2^{(n+3)^2}$

Черновик

№6

~~Покори Во~~

Покори воробьёвы горы

~~о – 5~~
~~р – 3~~
~~ы – 2~~
~~п – 1~~
~~к – 1~~
~~и – 1~~
~~в – 2~~
~~б – 1~~
~~ь – 1~~
~~е – 1~~
~~г – 1~~

~~3~~
~~2~~
~~1~~
~~1~~
~~1~~
~~1~~
~~1~~
~~1~~
~~1~~

о – 5
р – 3
в – 2
ы – 2
п – 1
к – 1
и – 1
ь – 1
е – 1
г – 1

3
2
2
1
1
1
1
1
1
1

89-26-85-62

№1

Чистовик

Вынем ~~оду~~ (мысленно) из самого большого пакета все пакеты, которые в нём есть останется ~~оди~~ просто один пустой пакет. Начнём возвращать в него непосредственно вложенные пакеты (по усл их либо 5, либо 9, но т.к. у нас минимум 101 пакет => в самом большом 5 непосредственно вложенных пакета). Эти непосредственно пока пустые. Был 1 ~~о~~ пустой пакет, добавилось 5 пустых, а один пустой стал полным (в который мы добавили непосредственно вложенные пакеты) => с одной такой операцией ~~добав~~ общее кол-во пустых пакетов увеличивается на 4, а общее число пакетов (любых) увеличивается на 5. Вконце оказался 101 пустой пакет, а ~~вначале~~ вначале был 1 пакет (пустой) => добавилось 101 − 1 = 100 пустых пакетов => => было совершено 100 : 4 = 25 описанных выше операций => было добавлено 25 · 5 пакетов (любых) => всего стало 1 + 125 = 126 пакетов

Ответ: 126 пакетов

Чистовик

№3

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$$

Т.к. $q, p > 1 \Rightarrow 2^{p-1} > 2^0 = 1 \Rightarrow 2^{p-1}$ - чётное
Если p-неч и q-неч, тогда p^q-неч и q^p-неч, тогда $p^q - q^p$ - чёт, а $p^q - q^p + 3$ - неч. Противор $\Rightarrow$ либо q-чёт, либо p-чёт, а т.к. p и q - прост числа $\Rightarrow$ либо $q = 2$, либо $p = 2$. Если оба ~~х~~ равны 2,

$$2^2 - 2^2 + 3 = 2$$

$$3 = 2$$

Противоречие.

Пусть $p = 2$. Тогда:

$$2^q - q^2 + 3 = 2$$

~~$2(2^{q-1} + 1) = q^2 - 3$~~

$$2(2^{q-1} + 1) = q^2 - 3$$

Рассмотрим ост степеней 2 по (mod 3):

x	x по (mod 3)
2^0	1
2^1	2
2^2	1
2^3	2
2^4	1

Продолжение №3 Чистовик

Мы видим зацикливание $\Rightarrow$ четные степени 2 дают ост 1 по (mod 3), а нечетные ост 2 по (mod 3). Если q - чет $\Rightarrow q=2$, Но мы показали что одновременно $p=2$ и $q=2$ не возможно $\Rightarrow$ q - неч $\Rightarrow q-1$ - чет $\Rightarrow 2^{q-1} \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow 2^{q-1}+1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 2(2^{q-1}+1) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^2-3 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow q^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow q \equiv 0 \pmod 3$, а т.к. q - прост $\Rightarrow$

$\Rightarrow q=3$

$2^3-3^2+3=2^1$

$\underline{2=2}$

подходит $\boxed{p=2,\ q=3}$

Теперь пусть $q=2$

$p^2-2^p+3=2^{p-1}$

$2^p+2^{p-1}=p^2+3$

$2^{p-1}(2+1)=p^2+3$

$3\cdot 2^{p-1}=p^2+3$

Т.к. $2^{p-1}>1 \Rightarrow$ левая часть $\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ правая часть $\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2+3 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3$, а т.к. p - прост $\Rightarrow$

Продолжение № 3 | Шифр

$\Rightarrow p=3$:

$3^2-2^3+3=2^2$

$4=4$

подходит $q=2$ $p=3$

Ответ: $(q=3; p=2)$; $(q=2; p=3)$.

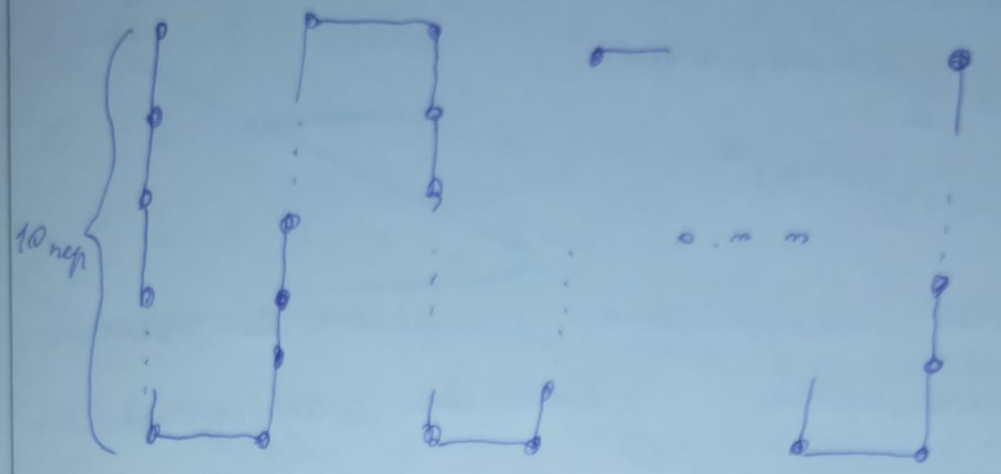
№ 4

Оценка:

Всего $23\cdot10=230$ - перекрестков.

Возьмем граф, где перекрестки - это вершины, а участок дороги, соединяющий два перекрёстка - это ребро. Тогда по усл у нас должен остаться связанный ~~граф~~ граф с минимальным количеством рёбер, а по определению это дерево, в нем рёбер на 1 меньше чем вершин (в этом можно убедиться, если каждый раз отсоединять от дерева вершину с ребром (висячую)) $\Rightarrow$ должно остаться 229 участков дорог. А было их $(9-1)\cdot23+(23-1)\cdot10=460-33=\underline{427}$ $\Rightarrow$ максимум можно закрыть $427-229=198$ участок дорог.

Пример: Продолжение №4 Чистовик



№5

Посчитаем первые несколько членов:

$$\cancel{x\cdot(1)^3 = 2\cdot(2)^3 \Rightarrow}$$

$$b_4\cdot(1)^3 = 2\cdot(2)^3 \Rightarrow b_4 = 2^4$$

$$b_5\cdot(2^1)^3 = 2^0\cdot(2^4)^3 \Rightarrow b_5 = 2^9$$

Итого

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2^1	2^0	2^1	2^4	2^9

И начиная с b_3 показатели степени 2 будут принимать значения последовательных квадратов. Докажем это

$$\cancel{b_n\cdot\left(2^{(n+1)^2}\right)^3 = 2^n}$$

$$b_k\left(2^{(n+1)^2}\right)^3 = 2^{n^2}\cdot\left(2^{(n+2)^2}\right)^3 \quad (\text{где } n\geq 1, k\geq 6)$$

$$b_k = 2^{n^2+3(n+2)^2-3(n+1)^2}$$

Продолжение ~~№~~ N5

Чистовик

$$b_k = 2^{n^2+3n^2+12n+12-3n^2-6n-3}$$

$$b_k = 2^{n^2+6n+9}$$

$$b_k = 2^{(n+3)^2}$$

То есть показатель степени 2 числа b_k принимает значение следующего квадрата $(n+3)^2$, а было $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2$.

Нетрудно заметить, что по выше доказанному начиная с b_3:

$$b_m = 2^{(m-2)^2} \quad (\text{где } m \geq 3)$$

$\Downarrow$

$$b_{2023} = 2^{(2023-2)^2}$$

$$b_{2023} = 2^{(2021)^2}$$

$$b_{2023} = 2^{4084441}$$

Ответ: $b_{2023} = 2^{4084441} = 2^{(2021)^2}$.

№ 6

Ответ: Алиса

Черновик

Посчитаем количество различных букв в слове "Покори воробьевы горы"

о – 5; р – 3; в – 2; ы – 2; п – 1; к – 1; и – 1; ь – 1; е – 1; г – 1; б – 1

Приведем стратегию за Алису: первым ходом она вычеркивает все буквы о, остается:

р – 3; в – 2; ы – 2; п – 1; к – 1; и – 1; ь – 1; е – 1; г – 1; б – 1.

Если Боря вычеркнет какую-нибудь букву, которая только одна осталась (п; к; и; ь; е; г; б), то Алиса вычеркивает все буквы р и далее разбивает количества оставшихся букв на пары (2; 2); (1; 1); (1; 1); (1; 1). И как только Боря изменяет количество в какой-будь паре Алиса изменяет второе количество в этой паре, то есть играет симметрично, при этом если у Бори есть ходы, то и у Алисы есть ходы ⇒ она выигрывает. Если Боря уменьшит количество букв в или ы на 1, то Алиса вычеркивает одну букву р, и ~~оставшиеся~~

Продолжение №6 Чистовик

количества оставшихся букв разбиваются на пары

(2; 2); (1; 1); (1; 1); (1; 1); (1; 1)

И Аня играет ~~все~~ симметрично.

Если Боря уменьшит количество букв В или Ы на 2 (то есть вычеркнет их всех) то Аня вычеркивает две буквы Р и ~~оставшихся~~ количества оставшихся букв разбиваются на пары.

(2; 2); (1; 1); (1; 1); (1; 1); (1; 1)

Если Боря вычеркнет одну букву Р, то Аня вычёркивает ещё одну букву Р, и количества оставшихся букв разбиваются на пары.

(2; 2); (1; 1); (1; 1) (1; 1) (1; 1)

Если Боря вычеркивает две буквы Р, то Аня вычеркнет все буквы В, и количества оставшихся букв разбиваются на пары.

(2; 2) (1; 1); (1; 1); (1; 1) (1; 1)

Если Боря вычеркнет все буквы Р, то Аня вычеркнет букву Б, и ост. кол-ва разб. на пары.

(2; 2); (1; 1); (1; 1); (1; 1)

Выиграет Аня!