0 514188 360004

51-41-88-36

(122.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Долгова Владислава Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
51-41-88-36	95	20	20	20	20	15	X	X	X

51-41-88-36 (122.1)

Чистовик: 95 (дедлайн 17ч)

№1

$1-\sqrt{2}\cos x(\sin x+2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x-\cos x)=$
$=2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})$

$\left(1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})\right)-\sqrt{2}(\cos x\sin x+2\cos^2 x-2\sin^2 x+\sin x\cos x)$
$=0$

$\cos(2x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}(\sin 2x+2\cos 2x)=0$

$\cos 2x\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cdot 2\cos 2x=0$

Пусть $\sin 2x=\pm 1$; а $\cos 2x=0$:

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{2}\neq 0$

Тогда можно поделить уравнение на $\cos 2x$:

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{tg}2x\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\operatorname{tg}2x-2\sqrt{2}=0 \quad |:\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}-\operatorname{tg}2x(\frac{1}{2}+1)-2=0 \quad |\cdot 2$

$1-\operatorname{tg}2x(1+2)-4=0$

$\operatorname{tg}2x=-1$

$2x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик:

№3

Запишем теорему Виета для уравнения

$x^3+6x^2+7x+1=0$:

$$\begin{cases} 6=-(x_1+x_2+x_3) \\ 7=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \\ 1=-x_1x_2x_3 \end{cases}$$

Если x_1+x_2; x_2+x_3; x_3+x_1 — корни $x^3+ax^2+bx+c=0$,

то по теореме Виета:

$$\begin{cases} a=-(x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1) \\ b=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2) \\ c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2(x_1+x_2+x_3) \\ b=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \\ c=-(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2+2x_1x_2x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2(x_1+x_2+x_3) \\ b=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \\ c=-((x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2\cdot(-6) \\ b=(-6)^2+7 \\ c=-(-6\cdot7+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=12 \\ b=43 \\ c=41 \end{cases}$$

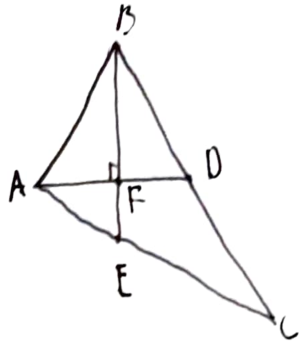
Ответ: $a=12$
$b=43$
$c=41$

стр2

51-41-88-36
(122.1)

Чистовик:

№1



Решение:

1) Пусть $BE \cap AD = F$, тогда в △ABD BF - высота и биссектриса, тогда △ABD - р/б (по пр. р/б △), значит $BC = 2BD = 2AB = 2\sqrt{26}$

2) Пусть $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$ и $\angle ABC = 2\beta$;

$AD = m_a$; $BE = l_b$

$S_{ABC} = S_{ABE} + S_{BEC}$

$\frac{1}{2}\sin 2\beta\, ac = \frac{1}{2} l_b c \sin\beta + \frac{1}{2} l_b a \sin\beta$

$\sin 2\beta\, ac = l_b \cdot \sin\beta\,(a+c)$

$\sin 2\beta\, \sqrt{26}\cdot 2\sqrt{26} = l_b \cdot \sin\beta(\sqrt{26} + 2\sqrt{26})$

$2\sqrt{26}\sin 2\beta = 3 l_b \cdot \sin\beta \quad | : \sin\beta$ ($\sin\beta \neq 0$, т.к $\beta \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, т.к β - половина угла треугольника)

$3 l_b = 4\sqrt{26}\cos\beta$

$l_b = \frac{4\sqrt{26}\cos\beta}{3}$

3) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

4) $m_a = l_b$

$\frac{4\sqrt{26}}{3}\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

$\frac{16\cdot 26}{9}\cdot\cos^2\beta = \frac{1}{4}(2b^2 + 2\cdot 26 - 4\cdot 26)$

$\frac{16\cdot 26}{9}\cdot\frac{\cos 2\beta + 1}{2} = \frac{1}{4}(2b^2 + 26(2-4))$

$\frac{16\cdot 26}{9}\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + 1\right) = \frac{1}{2}(2b^2 - 2\cdot 26)$

$\frac{16\cdot 26}{9}\cdot\left(\frac{26 + 4\cdot 26 - b^2}{2\cdot 2\cdot 26} + 1\right) = \frac{1}{2}(2b^2 - 2\cdot 26)$

$\frac{16\cdot 26}{9}\cdot\left(\frac{5\cdot 26 - b^2}{4\cdot 26} + 1\right) = b^2 - 26$

$\frac{4(5\cdot 26 - b^2)}{9} + \frac{16\cdot 26}{9} = b^2 - 26$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик:

Продолжение №4

$$\frac{4(5\cdot 26-b^2)}{9}+\frac{16\cdot 26}{9}=b^2-26$$

$$20\cdot 26-4b^2+16\cdot 26=9b^2-9\cdot 26$$

$$13b^2=26(20+16+9)$$

$$b^2=2\cdot 45$$

$$b=3\sqrt{10}$$

5) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sin 2\beta\, a\cdot c=\frac{1}{2}\sin 2\beta\cdot 2\cdot 26=$

$$=26\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=26\sqrt{1-\left(\frac{5\cdot 26-90}{4\cdot 26}\right)^2}=26\sqrt{1-\left(\frac{40}{4\cdot 26}\right)^2}=$$

$$=26\sqrt{1-\left(\frac{10}{26}\right)^2}=\cancel{26\sqrt{\frac{16}{26}}}=\cancel{\frac{2\cdot 4}{\sqrt{26}}}=\cancel{4\sqrt{26}}$$

$$=26\sqrt{\frac{26^2-10^2}{26^2}}=26\sqrt{\frac{(26-10)(26+10)}{26^2}}=\sqrt{16\cdot 36}=4\cdot 6=24$$

Ответ: $S_{ABC}=24$

№6

Заметим, что $p_m\cdot p_{\sigma(N)+1-m}=N$, где $m\in\mathbb{N}$.

Если $\sigma(N)>1699$, то $\sigma(N)+1-3>1697$ и $\sigma(N)+1-4>1696$,

значит $p_3\cdot p_{1697}<p_3\cdot p_{\sigma(N)+1-3}=N$ и

$p_4\cdot p_{1696}<p_4\cdot p_{\sigma(N)+1-4}=N$, тогда

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1697}<N^2$, получили противоречие с усл.

Получили, что $\sigma(N)\le 1699$, с другой стороны

$\sigma(N)\ge 1697$ (т.к. существует p_{1697}); $1697\le\sigma(N)\le 1699$

I $\sigma(N)=1697$:

Заметим, что 1697 - простое число (для этого поделили столбиком 1697 на все простые числа от 2 до 41)

Заметим, что если $N=q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\dots q_n^{\alpha_n}$, где q_i - простые, и α_i - натуральные,

то $\sigma(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1)$

Получили, что $N=q_1^{1696}$, тогда $N^3=q^{3\cdot 1696}$,

значит $\sigma(N^3)=3\cdot 1696+1=5089$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

51-41-88-36
(122.1)

чистовик; продолжение №6

II $\sigma(N) = 1698$;

$1698 = 2\cdot 3\cdot 263$

1) Тогда $N = q_1^{1}\cdot q_2^{2}\cdot q_3^{262}$, $N^3 = q_1^{3}\cdot q_2^{6}\cdot q_3^{786}$

$\sigma(N^3) = (3+1)(6+1)(786+1) = 28\cdot 787$

~~III $\sigma(N) = 1699$:~~

~~$1699 =$~~

2) $N = q_1^{5}\cdot q_2^{262}$, $N^3 = q_1^{15}\cdot q_2^{786}$;

$\sigma(N^3) = 16\cdot 787$

3) $N = q_1^{2}\cdot q_2^{525}$, $N^3 = q_1^{6}\cdot q_2^{1575}$;

$\sigma(N^3) = 7\cdot 1576$

4) $N = q_1^{1}\cdot q_2^{788}$, $N^3 = q_1^{3}\cdot q_2^{2364}$;

$\sigma(N^3) = 4\cdot 2365$

5) $N = q_1^{1697}$; $N^3 = q_1^{5091}$;

$\sigma(N^3) = 5092$

III $\sigma(N) = 1699$:

1699 — простое число (для того, чтобы убедиться в этом, разделим 1699 на простые числа от 2 до 41)

$N = q_1^{1698}$; $N^3 = q_1^{5094}$;

$\sigma(N^3) = 5095$

Ответ: $\sigma(N^3)$ может быть равен 5089; $28\cdot 787$; $16\cdot 787$; $7\cdot 1576$; $4\cdot 2365$; 5092; 5095.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик.

№2

Пусть скорости велосипедиста и мотоциклиста равны $v_в$ и $v_м$; $v_м = 2v_в$; расстояние между A и B s; и время в пути велосипедиста t.

Рассмотрим 4 случая:

I Велосипедист выехал в 12:00 и совершил остановку:

$s = v_в(t-2)$

$s = v_м(t-1)$

$v_в(t-2) = v_м(t-1)$

$t-2 = 2t-2$

$t = 0$, такого быть не может.

~~Они прибыли в B в 14:00~~

II Велосипедист выехал в 13:00 и совершил остановку:

$s = v_в(t-2)$

$s = v_м(t+1)$

$v_в(t-2) = v_м(t+1)$

$t-2 = 2t+2$

$t = -4$, такого быть не может

III Велосипедист выехал в 12:00 и не совершил остановку:

$s = v_в t$

$s = v_м(t-3)$

$v_в t = v_м(t-3)$

$t = 2t-6$

$t = 6$

Они прибыли в 18:00

IV Велосипедист выехал в 13:00 и не совершил остановку:

$s = v_в t$

$s = v_м(t-1)$

$v_в t = v_м(t-1)$

$t = 2t-2$

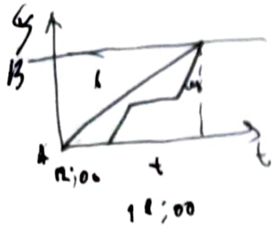
$t = 2$

Они прибыли в 15:00

Ответ: в 18:00 или в 15:00.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик:



$S = v_в t$

$2v_в = v_м$

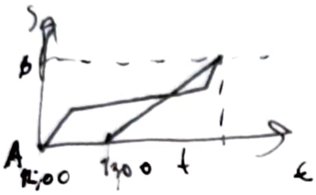
$S = v_м (t - 3)$

$t = 2(t - 3)$

$t = 2t - 6$

$S = 2 \cdot 5 - 6$

$t = 6$

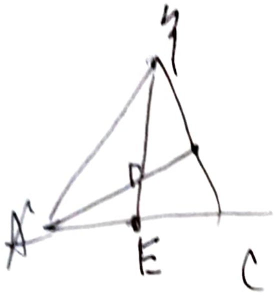
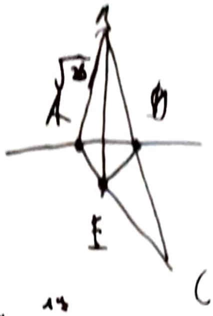
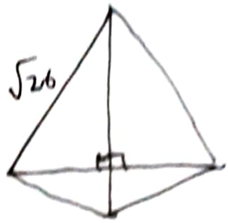


$v_в t = 2v_в (t - 1)$

$t = 2$

15;00

Черновик

$1698 : 6 = 283$

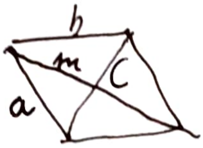
$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

$\cos^2\beta = \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$

$\sin\beta \, l_b (c + a) = \sin 2\beta \, ca$

$\sin\beta \, l_b (c+a) = 2\sin\beta \cos\beta \, ca$

$l_b = \frac{\cos\beta \, ca}{c+a} =$



$m = \sqrt{\frac{2c^2+2b^2-c^2}{4}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{\cos 2\beta+1}{2}}{} ac} \Big/ (c+a) =$

$\frac{2c^2+2b^2-a^2}{4} = \frac{ac(a+c-b)(a+b+c)}{4(a+c)^2}$

$(a+c)^2(2c^2+2b^2-a^2) = ac(a^2+c^2-b^2 \ldots)$

$= \frac{\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+1}{2} ac}}{c+a} =$

$\frac{1}{2}\sqrt{}$

$= \frac{\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{4ac} ac}}{c+a} =$

$= \sqrt{\frac{ac((a+c)^2-b^2)}{4(a+c)^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6(9\cdot 26-b^2)}{4\cdot 9\cdot 26}}$

Не вскрывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик:

$(x-(x_1+x_2))(x$

$a = -2(x_1+x_2+x_3) = 12$

$b = (x_1+x_2)(x_2+x_3) + (x_2+x_3)(x_3+x_1) + (x_3+x_1)(x_1+x_2) =$

$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_3 + x_2x_1 + x_3^2 + x_3x_1$

1697 | 7 ; 14 | 24

1697 | 11 ; 11 | 15 ; 59 ; 55 ; 47

$1-6+9-7$ ... =

$19 \cdot 8 = 152$

1697 | 13 ; 13 ; 39

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

1697 | 19 ; 152 ; 177

1697 | 17 ; 153 ; 87

$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$

$23 \cdot 6 = 138$

1697 | 23 ; 161 ; 87

$= 36 + 7 = 43$

1697 | 29 ; 145 ; 248

$c = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2^2)(x_1+x_3) =$

$29 \cdot 6 = 174$

$= -(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_1 +$

$+ x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_3x_2^2) =$

$29 \cdot 5 = 145$

$41 \cdot 39$

$= -((x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) - x_1x_2x_3) =$

$24 \cdot 7 = 203$

$(40+1)(40-1) = 40^2 - 1 =$

$= -(-6 \cdot 7 + 1) = 42 - 1 = 41$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) =$

232

1697 | 31 ; 155 ; 147

$= x_1^2x_2 + x_1^2 + x_3 + x_1x_2x_3$

$31 \cdot 5 = 155$

$37 \cdot 3 = 111$

$\sigma(N) > 1700$ $\quad 1698 \le \sigma(N) \le 1700$

1697 | 37 ; 148 ; 217

$p_3 \cdot p_{1697} < p_8 \cdot p_{\sigma(N)-3} = N$

1697 | 39

$37 \cdot 4 = 148$

217

$37 \cdot 6 = 222$

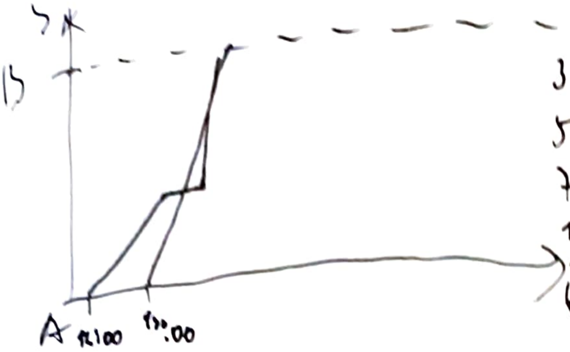
$39 \cdot 4 = 156$

1697 ; 156 ; 137

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№2

Черновик



3 x
5 x
7 x
11 x
13 x
17 x
17 x
17 x
23

1649 | 7
14
29

1694 | 14
153
169

1694 | 19
132

1694 | 23
169
89

17
42
16
17
56
136
19
32
16
132
23
21
14

I

$v_м = 2v_б$

$S = v_м(t-1)$

$S = v_б t$

$\times\ 262$
6
18
6
786

$\times\ 787$
56
61
56
6296

$\times\ 787$
28
6296

$v_б t = v_м(t-1)$

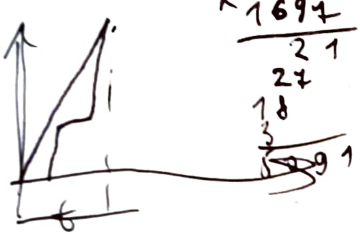
$t = 2(t-1)$

$t = 2t-2$

$2 = t$

$\times\ 1696$
24
27
18
3
5094

II



$\times\ 1697$
21
27
18
3
5091

$v_м = 2v_б$

$S = v_м(t-3)$

$S = v_б t$

$t = 2(t-3)$

$t = 2t-6$

$t = 6$

$\times\ 1696$
18
27
18
3
4088

$v_б t = v_м($

Черновик

$$1-\sqrt{2}\,(\cos x\sin x+2\cos^2 x+2\sin^2 x-\sin x\cos x)=$$
$$=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1-2\sqrt{2}=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

1

$$1-\sqrt{2}\,(\cos x\sin x+2\cos^2 x-2\sin^2 x+2\cos x\sin x)=$$
$$=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1-\sqrt{2}\,(\sin 2x+2\cos 2x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=0$$

$\cancel{\cos^2 x}$

$$\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x-\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x=0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,2x-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,2x-2\sqrt{2}=0$$
$$\mathrm{tg}\,2x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{tg}\,2x=-\frac{2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1-4}{1+2}=-1$$

стр 12