0 869443 440008

86-94-43-44
(123.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Коровайцевой Дарьи Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
86-94-43-44 123.6	100	20	20	20	20	0	20		

86-94-43-44 (123.6)

Черновик

$1+\sqrt2\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt2\sin x(2\sin x+\cos x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

$2\sqrt2(\sin^2 x-\sin^2x-\cos^2x)=-2\sqrt2\cos2x$

$1-\cos2x=2\sin^2x$

$2\sqrt2\sin2x$

$=1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

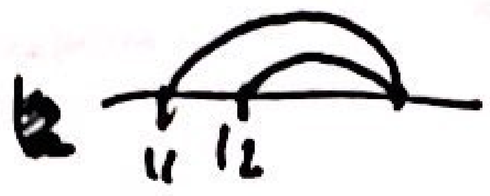
$\cancel{1}+\sqrt2\sin2x-2\sqrt2\cos2x=\cancel{1}-\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos2x+\frac{\sqrt2}{2}\sin2x\right)$

$2\sqrt2\sin2x-4\sqrt2\cos2x+\frac{\sqrt2}{2}\cos2x+\frac{\sqrt2}{2}\sin2x=0$

$3\sqrt2\sin2x-3\sqrt2\cos2x=0$

$v_a=2v$ $\quad t-a$

$v_b=v$ $\quad 2t-b$ $\quad t+2$



$2t+2-1=t$ $\quad 2t+2-t=1$

$t+2-t=2t$ $\quad t+2=2t-1$

$t=1$ $\quad t=3$

$\frac{s}{v}$ $\quad \frac{s}{2v}$

$\frac{s}{v}+1=\frac{s}{2v}+2$ $\quad \frac{s}{v}+3=\frac{s}{2v}$ $\quad \frac{s}{v}=\frac{s}{2v}+3$ $\quad \frac{s}{v}+2=\frac{s}{2v}+1$

$\frac{s}{2v}=1$ $\quad \frac{s}{2v}=3$

$\frac{s}{v}=2$ $\quad \frac{s}{v}=6$

$26\times4=104$ $\quad 128$ $\quad 24$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=$

$=$

$-x_1x_2x_3=1$

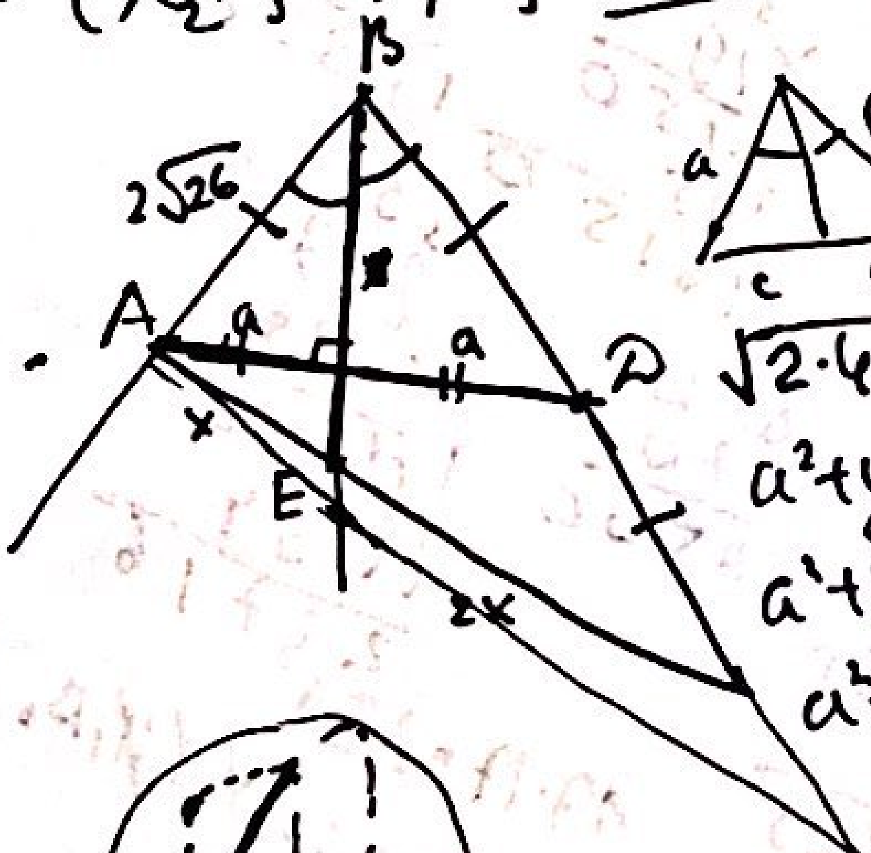
$-x_1-x_2-x_3=6$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7$

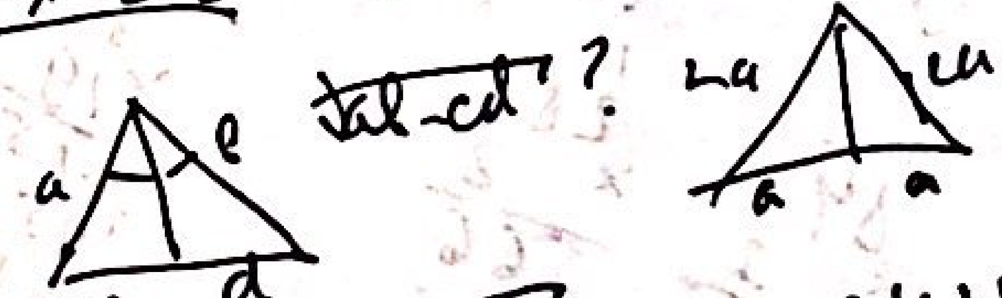
$(x_2^2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_3)(x_3+x_1)=$

$c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-(x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_1x_3+x_2x_3^2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1^2x_2+\underline{x_1x_2x_3})$

$=-(x_2^3x_3+x_1x_3^2+\underline{x_1x_2x_3}+x_2x_3^2+x_1x_2^2+\ldots$



$\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt3\cdot a$



$\sqrt{2\cdot4\cdot26-2x^2}=2a$

$a^2+y^2=4\cdot26$

$a^2+(2a-y)^2=x^2$

$a^2+4a^2-4ay+y^2=x^2$

$2\cdot4\cdot26-2x^2=4a^2$

$a^2+y^2=4\cdot26$

$a^2+4a^2-4ay+y^2=x^2$

$4\cdot26-a^2$

$2\cdot4\cdot26-4a^2=2a^2+8a^2-8ay$

$4\cdot26-4a^2=9a^2-8a\sqrt{4\cdot26-a^2}$

$4\cdot26=13a^2-8a\sqrt{4\cdot26-a^2}$

$8a\sqrt{4\cdot26-a^2}=13(a^2-8)$

$64a^2\cdot4\cdot26-64a^3=13^2a^4-13^2\cdot16\cdot a^2+13^2\cdot8^2$

$64a^2\cdot4\cdot26-64a^3=13^2a^4-13^2\cdot16\cdot a^2+13^2\cdot8^2=0$

$64a^2\cdot4\cdot26-64a^3\mp16\cdot(16\cdot26-13^2)a^2+13^2 8^2=0$

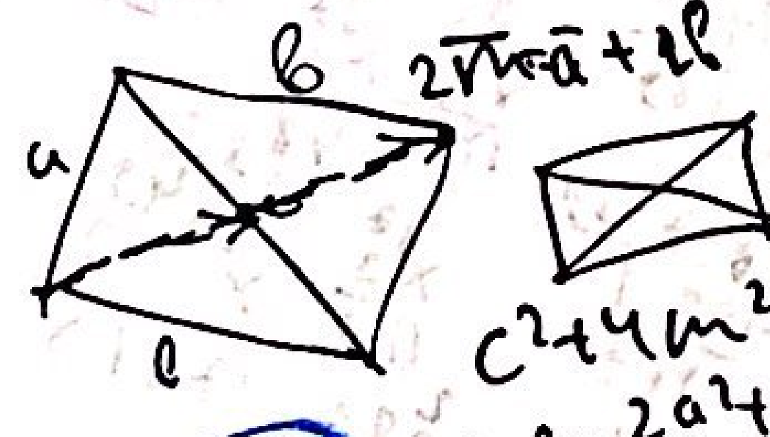
$\sigma(N^9)$ $\quad \sigma(N)=k$

$p_3\cdot p_4\cdot p_{1691}\cdot p_{1692}\geq N^2$ $\quad 1+\frac{1}{8}3\frac{1}{3}\to\frac{2}{\sqrt3}$

$2-\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{3}\to\frac{4}{3}\to\frac{2}{\sqrt3}$

$169a^4+64a^3\mp16\cdot(16\cdot26-13^2)a^2+2\cdot26=0$

$9a^2-4a+2\cdot26=0$



$c^2+4m^2=2a^2+2b^2$

$m^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=\frac{2\cdot4\cdot26+2\cdot4\cdot4\cdot26-9x^2}{4}=2a$

$8\cdot26\cdot5-9x^2=8a\to10\cdot8\cdot26-18x^2=16a$

$9\cdot8\cdot26-18x^2=36a^2$

$2\cdot4\cdot26-2x^2=4a^2\to$

$8\cdot26=16a-36a^2$

$36a^2-16a+8\cdot26=0$

Черновик

$\frac{\alpha}{\cancel{2\pi}} \cdot 2\pi R = \alpha R$

$\frac{\alpha}{\cancel{360}\ 180} \cdot 2\pi R$

$\frac{2\alpha R}{\cancel{180}\ 9} = 15$ $\quad \alpha = \frac{15 \cdot 90}{R} = 5x$

$\frac{2\beta R}{\cancel{180}\ 9} = 9$ $\quad \beta = \frac{9 \cdot 90}{R} = 3x \quad \le 90$

$\frac{2\gamma R}{\cancel{180}\ 9} = 12$ $\quad \gamma = \frac{12 \cdot 90}{R} = 4x \quad x \le \frac{90}{5} = 18$

$2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$

$\sin 5x + \sin 3x + \sin 4x$

$2\sin 4x \cos x + \sin 4x =$

$= \sin 4x (2\cos x + 1)'$

$\cos 4x \cdot 4 \cdot (2\cos x + 1) + \sin 4x \cdot 2 \cdot (-\sin x) =$

$= 4 \cdot 2\cos x \cos 4x$

за 1ч - сбо

за 2ч - лело

11:00+2 ⇒ 14:00

11:00+1+2 ⇒ 14:00

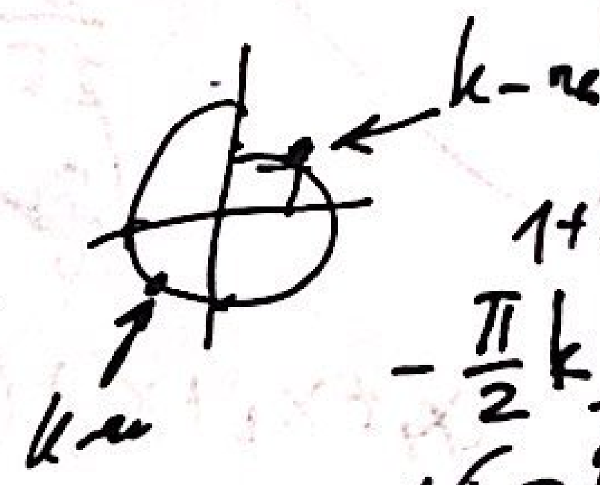
11:00+6 ⇒ 17:00

11:00+6 → 17:00

12:00+3+2 ⇒ 17:00

$15\pi \le \pi R$

$15 \le R$



k-ne

k-ne

$\frac{\pi}{4} + \pi k$

$-\frac{\pi}{2} k$

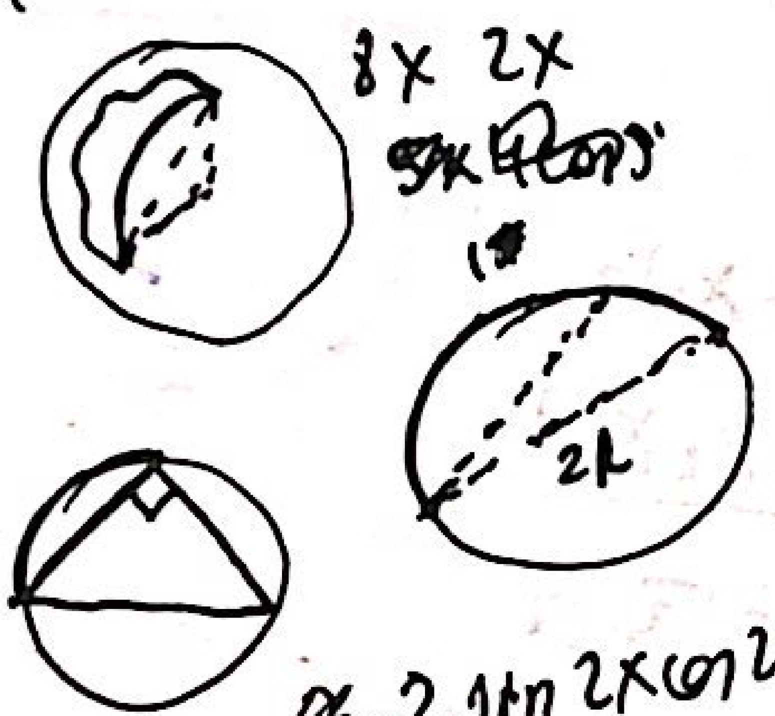
$1 + x = 0$

$1 - x =$

$1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$1 + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$1 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ②



8x 2x

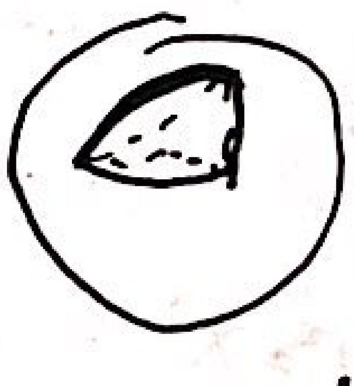
$2R \sin\alpha$

2R

$\cancel{2} \cdot 2\sin 2x \cos 2x (\cos x + 1)$

$5x = 180$

$4x =$



$43 \times 43 = 129 + 172 = 1849$

$41 \times 41 = 41 + 164 = 1681$

$1696 \times 7 = 11872$

$847 \times 16 = 5082 + 847 = 13552$

$848 \times 3 = 2544$

$283 \times 2 = 566$

$850 \times 19 = 7650 + 85 = 16150$

$1696 \times 3 = 5088$

$850 \times 70 = 59500$

$847 \times 28 = 6776 + 1694 = 23716$

$2545 \times 4 = 10180$

$565 \times 3 = 1695$

$17 \cdot 17 = 289$

$283 : 2, 5, 7, 11, 13$

$p_3 \cdot p_{k+1-3} = p_3 \cdot p_{k-2} = N$

$p_4 \cdot p_{k+1-4} = p_4 \cdot p_{k-3} = N$

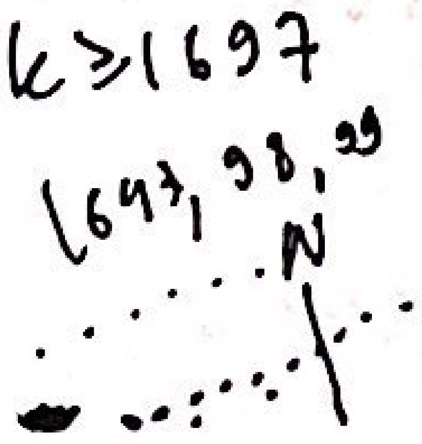
$1696 \ge k - 3$

$k \le 1699$

$k \ge 1697$

1697, 98, 99

N



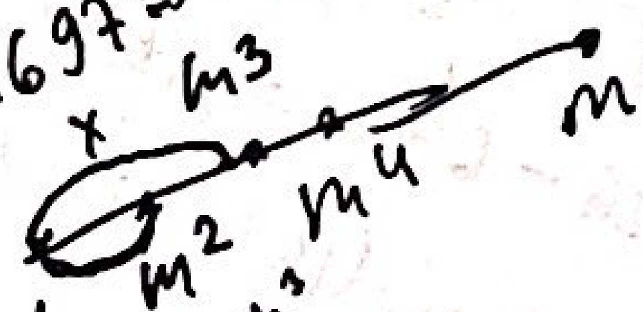
m^2, m^3, $m \times$ вида $m \cdot p_i$

$m\ d \times m$

$m^6 : d$

$m^2 < d < m^3$

$1697 \Rightarrow N = m^2$



x m3

1 m^2 m^4 m^6

m^3

$2x + 1$

от m_2 до m_3

$1698 \,|\, 6 = 283$, -12, 49, -48, 18

$2 \cdot 3 \cdot 283$

$283 \times 6 = 1698$

$283 \,|\, 11$, -22, 63

$283 \,|\, 13$, -26, 23

$1697 \,|\, 13$, -13, 39

$1697 \,|\, 17$, -153, 167

$1697 \,|\, 19$, -152, 177

$19 \times 6 = 114$

$19 \times 8 = 152$

$1697 \,|\, 31$, -155, 147

$37 \times 5 = 185$

$37 \times 4 = 148$

$1697 \,|\, 23$, -161, 87

$1697 \,|\, 29$, -145, 247

$1697 \,|\, 37$, -148, 117

$37 \times 3 = 111$

$2545 \times 7 = 17815$

$1697 \,|\, 41$, -164, 57

$283 \times 3 = 849$

1697 |

$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$

1697 – прост ⇒ $N = x^{1696}$, ≥ 2

$282 \times 3 = 846$

86-94-43-44
(123.6)

Чистовик

№ 1

$1+\sqrt{2}\cos x(\sin x-2\cos x)+\sqrt{2}\sin x(2\sin x+\cos x)=2\sin^2(\frac{\pi}{8}-x)$

$1+2\cdot\sqrt{2}\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)=1-\cos(\frac{\pi}{4}-2x)$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x+\cos(\frac{\pi}{4}-2x)=0$

$\sqrt{2}\sin 2x-2\sqrt{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2x=0$

$2\sqrt{2}\sin 2x-4\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{2}\sin 2x=0$

$3\sqrt{2}\sin 2x-3\sqrt{2}\cos 2x=0$

$\sin 2x-\cos 2x=0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x=0$

$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$

$2x-\frac{\pi}{4}=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$

№ 2

Тот, кто выехал в 12:00 потратил на дорогу T_8 часов, другой — T_8+1 час, т.к. выехал на час раньше. Т.к. скорость авт в 2 раза больше скорости велосип., то если авт. проходит путь (без ост.) за t часов, то велосип проходит этот же путь (без ост.) за 2t часов. Тот, кто делает ост., увелич. своё время на 2 часа. Тогда возм. 4 случ. (ост. — делает ост. в 2 часа, ран — выезж. раньше)

1) а — ост., а — ран.

$\begin{cases} t+2=T+1 \\ 2t=T \end{cases}$

$t+2=2t+1$

$t=1$

$2t=2=T$

Сл-но, приезж. в 14:00

2) в — ост., в — ран

$\begin{cases} 2t+2=T+1 \\ t=T \end{cases}$

$2t+2=t+1$

$t+1=0$ — не м.б., $t>0$

3) а — ост., в — ран

$\begin{cases} t+2=T \\ 2t=T+1 \end{cases}$

$t+2=2t-1$

$t=3$

$t+2=5=T$

Сл-но, приезж. в 17:00

4) в — ост., а — ран.

$\begin{cases} 2t+2=T \\ t=T+1 \end{cases}$

$2t+2=t-1$

$t=-3$ — не м.б., $t>0$

Т.о. они прибыли в В в 14:00 или в 17:00

Ответ: 14:00 или 17:00

Чистовик

№3

Заметим, что x_1, x_2, x_3 — корни ур-я $x^3+ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1x_2x_3=-c \\ x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b \end{cases}$ $((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+ax^2+bx+c$ — раскр. скобки и привед. подобные)

— теор. Виета для куб. ур-я

Тогда по теор:

$\begin{cases} x_1x_2x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=-6 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7 \end{cases}$

Рассм. аналог. выраж. для x_1+x_2, x_2+x_3 и x_1+x_3:

1) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$

Заметим, что $(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=3x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+$
$+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)+x_1x_2x_3$

Сл-но, $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=-6\cdot7-(-1)=-42+1=-41$

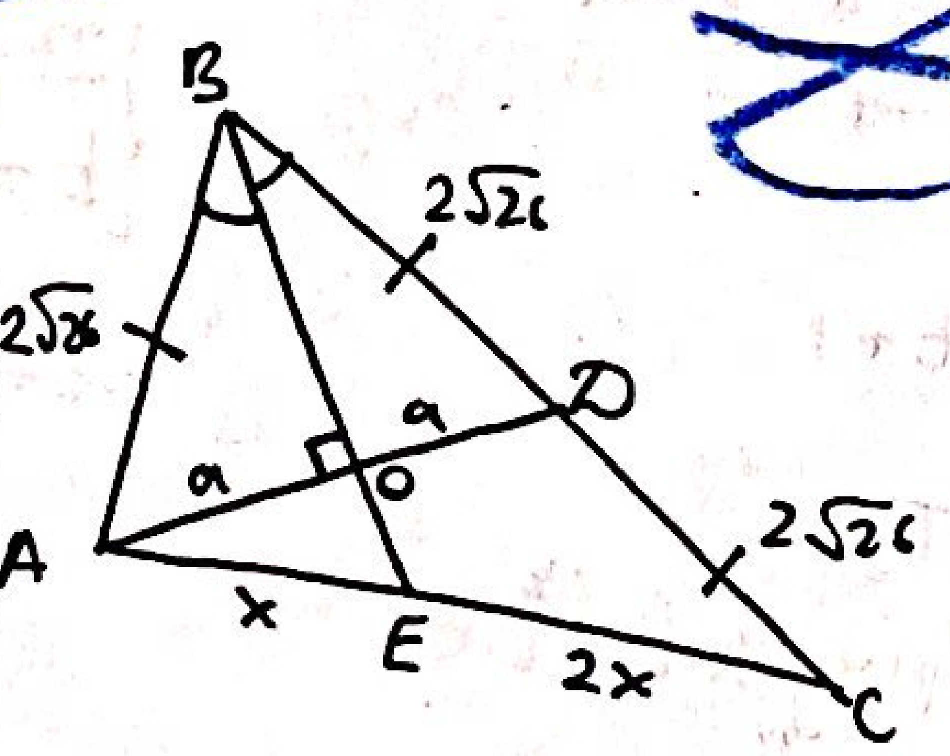
2) $x_1+x_2+x_2+x_3+x_1+x_3=2(x_1+x_2+x_3)=-12$

3) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_3)(x_1+x_3)=$
$=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2^2+x_1^2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_1x_3+x_3^2=$
$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=$
$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=(-6)^2+7=36+7=43$

Значит, по теор., x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1 — корни ур-я $x^3+ax^2+bx+c=0$ при $a=12, b=43, c=41$

Ответ: $a=12, b=43, c=41$

№4



Пусть $AD=BE=2a$, $AD\cap BE=O$

В $\triangle ABD$: BO — бисс. по опр.; $BO\perp AD$ по усл. $\Rightarrow$ BO — выс. по опр. $\Rightarrow$ по призн. $\triangle ABD$ — р/б с основ. AD и по св-ву BO — мед. $\Rightarrow AB=BD$ и $AO=OD=a$

AD — мед. $\Rightarrow BD=DC=AB=2\sqrt{26}$

По св-ву бисс. $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ пусть $AE=x$, тогда $EC=2AE=2x$

По ф-ле длины бисс. $BE=\sqrt{2\sqrt{26}\cdot4\sqrt{26}-x\cdot2x}=\sqrt{8\cdot26-2x^2}=2a$

По ф-ле длины мед. $AD=\sqrt{\frac{2\cdot4\cdot26+2\cdot9x^2-16\cdot26}{4}}=2a$

Сл-но, $8\cdot26-2x^2=4a^2=\frac{8\cdot26+2\cdot9x^2-16\cdot26}{4}$

$4\cdot8\cdot26-4\cdot2x^2=2\cdot9x^2-8\cdot26$

$5\cdot8\cdot26=2\cdot13\cdot x^2 \Rightarrow 2x^2=16\cdot5 \Rightarrow 2a=\sqrt{8\cdot26-16\cdot5}=\sqrt{8\cdot(26-10)}=\sqrt{8\cdot16}=4\cdot2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

Чистовик

№4 (прод)

Сл-но, $\sin\angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC \Rightarrow$, $\cos\angle ABD = \sqrt{1-\frac{4}{13}} =$
$= \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin\angle ABC = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC =$
$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{26}\cdot 4\sqrt{26}\cdot\frac{12}{13} = \frac{8\cdot 26\cdot 12}{2\cdot 13} = 8\cdot 12 = 96$

Ответ: 96

№6

Пусть все натур. делители N: $p_1 = 1 < p_2 < p_3 \ldots < p_k = N$. Тогда $б(N) = k$ и $p_i\cdot p_{k+1-i} = N$ (дел-ли сущ-ют парами d и $\frac{N}{d}$, если $d_2 > d_1$, то $\frac{N}{d_2} < \frac{N}{d_1}$ и наоборот); если $d \le \sqrt{N}$, то $\frac{N}{d} \ge \sqrt{N}$ и наоборот)

Тогда $p_3\cdot p_{k+1-3} = p_3\cdot p_{k-2} = N$ и $p_4\cdot p_{k+1-4} = p_4\cdot p_{k-3} = N$, т.е. $p_3\cdot p_4\cdot p_{k-3}\cdot p_{k-2} = N^2$. Т.к. дел-ли натуральны и строго упорядочены, если $p_3\cdot p_4\cdot p_{1696}\cdot p_{1698} \ge N^2$, то $1696 \ge k-3$ (иначе данное произв. меньше $p_3\cdot p_4\cdot p_{k-3}\cdot p_{k-2} = N^2$). При этом, очевидно, $1697 \le k$. Т.о. $k \le 1699$ и $k \ge 1697 \Rightarrow k = 1697$, либо $k = 1698$, либо $k = 1699$

Теперь разложим N на прост. множ. (предст. в виде произвед. степеней простых): $N = q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n}$, где $q_1, \ldots, q_n$ – все прост. дел-ли N, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – их степ. вхожд. в N соотв. Тогда заметим, что $б(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$ (кажд. нат. дел-ль также предст. в виде произв. q_i в степ. от 0 до α_i вкл.), причём $\alpha_i+1 \ge 2$ (т.к. $\alpha_i \ge 1$, при $\alpha_i = 0$ q_i не вход. в N)

Рассм. случ.:

I $б(N) = k = 1697$

Заметим, что 1697 – прост. (пров. делимость на все прост. до 41 вкл. – наиб. прост., не превыш. $\sqrt{1697}$; 1697 не дел. ни на одно из них $\Rightarrow$ простое) $\Rightarrow$

$1697 = \alpha_1 + 1$ и $N = q_1^{1696}$

Тогда $N^3 = q_1^{1696\cdot 3}$ и $б(N^3) = 1696\cdot 3 + 1 = 5089$

II $б(N) = 1698$

$1698 = 2\cdot 3\cdot 283$ (283 – прост., пров. аналог-но)

Здесь вар-тов уже неск.:

1) $1698 = \alpha_1 + 1 \Rightarrow N = q_1^{1697} \Rightarrow N^3 = q_1^{1697\cdot 3}$ и $б(N^3) = 1697\cdot 3 + 1 = 5092$

2) $2\cdot 3\cdot 283 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) \Rightarrow N = q_1^{1} q_2^{2} q_3^{282} \Rightarrow N^3 = q_1^{3} q_2^{6} q_3^{846} \Rightarrow б(N^3) = 4\cdot 7\cdot 847 =$
$= 23716$

3) $6\cdot 283 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \Rightarrow N = q_1^{5}\cdot q_2^{282} \Rightarrow N^3 = q_1^{15}\cdot q_2^{846} \Rightarrow б(N^3) = 16\cdot 847 = 13552$

4) $2\cdot 849 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \Rightarrow N = q_1^{1}\cdot q_2^{848} \Rightarrow N^3 = q_1^{3}\cdot q_2^{2544} \Rightarrow б(N^3) = 4\cdot 2545 = 10180$

5) $3\cdot 566 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \Rightarrow N = q_1^{2}\cdot q_2^{565} \Rightarrow N^3 = q_1^{6}\cdot q_2^{1695} \Rightarrow б(N^3) = 7\cdot 1696 = 11872$

Других вар-тов нет

Чистовик

№6 (прод.)

III $b(N)=1699$

1699 – прост. (также прост делимость на прост. до 3)

$1699=\alpha_1+1 \Rightarrow N=q_1^{1698} \Rightarrow N^3=q_1^{5094} \Rightarrow b(N^3)=5094+1=5095$

Других вариантов нет

Ответ: 5089; 5095; 5092; 23716; 13552; 10180; 11872

Черновик

43×43: 129, 172

41×41: 41, 164, 1681

$\sqrt{\dfrac{9 \cdot 2x^2 - 8 \cdot 26}{4}} = \sqrt{\dfrac{9 \cdot 80 - 8 \cdot 26}{4}} = \sqrt{\dfrac{8(90-26)}{4}}$

$\sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2} \to 4\sqrt{2}$

$90 - 26 = 64$

$\dfrac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{26}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ $\dfrac{12}{13}$

$\dfrac{1}{2} \cdot 4a^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 64 \cdot 2$

$16 \times 6 = 96$

$1698 \times 3 = 5094$

$1696 \times 3 = 5088$