ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

0 921464 690005

92-14-64-69
(117.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Марусева Тимофея Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
92-14-64-69	84	21	0	0	21	21	21	X	X

92-14-64-69
(117.3)

84
(восемьдесят четыре)

Чистовик 1 из 5

1. Скажем, что изначально у нас есть один большой пустой пакет и мы по одному делаем некоторые пакеты непустыми (вкладываем в них по 5 пустых пакетов)

Пусть на каком-то шаге у нас есть x пустых пакетов. Посмотрим на то, сколько их станет если мы сделаем один пакет непустым.

Было x пустых пакетов

↓

Пакет над которым мы проводим операции перестаёт быть пустым! У нас есть x − 1 пустой пакет

↓

Однако в этот пакет мы вкладываем ещё 5 пустых. В итоге у нас есть ~~4 пустых пакет~~ x+4 пустых пакета.

~~Значит проводимый процесс равносилен тому, что~~

На каждом шаге процесса число пустых пакетов увеличивается на 4, и изначально он был 1. Значит ~~он~~ процесс был повторён $\frac{(101-1)}{4} = 25$ раз. Общее число пакетов каждое повторение увеличивается на 5, значит в результате их будет $1+25\cdot5=126$.

Ответ: 126.

Чистовик 2 из 5

6) Посчитаем кол-во ~~букв~~ каждой буквы

Буква	П	О	К	Р	И	В	Б	Ь	Е	Ы	Г
Количество	1	5	1	3	1	2	1	1	1	2	1

Заметим, что эта игра эквивалентна Ниму на 11 кучках с размерами, соответствующими количествам букв.

Известен факт, что выигрышная стратегия в игре в ним для 1-го игрока существует тогда и только тогда, когда XOR-сумма (побитовое исключающее ИЛИ) всех размеров кучек не равна 0. Посчитаем это значение:

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 3 \otimes 5 =$$
$$= 1 \otimes 3 \otimes 5 = 1_2 \otimes 11_2 \otimes 101_2 = 10_2 \otimes 101_2 =$$
$$= 111_2 = 7$$

XOR-сумма $= 7 \neq 0 \Rightarrow$ гарантированно существует выигрышная стратегия для 1-го игрока (Алисы)

Ответ: Да, есть (у Алисы).

92-14-64-69
(117-3)

Чистовик 3 из 5

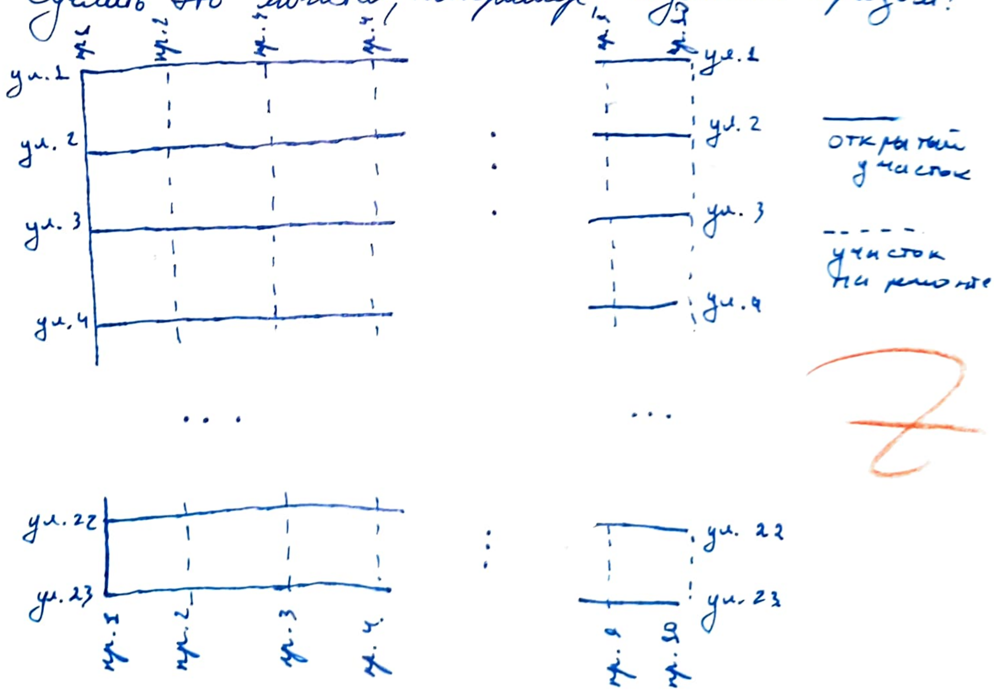
4) Нетрудно заметить, что город представляет из себя простой неориентированный граф, где перекрёстки это вершины, а дороги между ними – рёбра.

Минимальное число рёбер в связном графе на n вершинах – $n-1$. Причём в любом связном графе можно оставить эти самые $n-1$ ребро так, чтобы он оставался связным (выделить в графе остов).

В данном графе $n = 10 \cdot 23 = 230$, т.е. достаточно 229 рёбер. Пусть m – суммарное число рёбер в нашем графе. Улицы образуют из них $23 \cdot (10-1) = 23 \cdot 9$ рёбер $= 207$ рёбер, а проспекты – $10 \cdot (23-1) = 10 \cdot 22 = 220$ рёбер, т.е. ~~всего~~ $m = 207 + 220 = 427$

А значит на ремонт можно одновременно закрыть $m - (n-1) = 427 - 229 = 198$ участков дорог.

Сделать это можно, например, подобным образом:



Ответ: 198 участков

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

4 из 5

5) $b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3 \Rightarrow b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$

$b_1 = 2 = 2^1 = 2^{((-1)^2)}$

$b_2 = 1 = 2^0 = 2^{(0^2)}$

$b_3 = 2 = 2^1 = 2^{(1^2)}$

Значит

$b_4 = \frac{2^1 \cdot 2^{1 \cdot 3}}{2^0} = 2^4 = 2^{(2^2)}$

$b_5 = \frac{2^0 \cdot 2^{4 \cdot 3}}{2^{1 \cdot 3}} = 2^9 = 2^{(3^2)}$

Докажем, что $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$ это $2^{((-1)^2)}, 2^{(0^2)}, 2^{(1^2)}, \dots, 2^{((n-2)^2)}$ по индукции.

База индукции для $b_{1 \dots 5}$ была разобрана ранее.

Пусть $b_n = 2^{((n-2)^2)}$ для всех n от 1 до k включительно, докажем, что это верно и для $n = k+1$.

$b_{k+1} = \frac{b_{k-2} \cdot b_{\cancel{k}}^3}{b_{k-1}^3} = \frac{2^{(k-4)^2} \cdot 2^{(k-2)^2 \cdot 3}}{2^{(k-3)^2 \cdot 3}} =$

$= 2^{((k-4)^2 + (k-2)^2 \cdot 3 \cancel{\ } - (k-3)^2 \cdot 3)} = 2^{(3 \cdot ((k-2)^2 - (k-3)^2) + (k-4)^2)} =$

$= 2^{(3 \cdot (k-2+k-3) \cdot (k-2-k+3) + (k-4)^2)} = 2^{(3 \cdot (2k-5) + (k-4)^2)} =$

$= 2^{(6k - 15 + k^2 - 8k + 16)} = 2^{(k^2 - 2k + 1)} = 2^{(k-1)^2} = 2^{((k+1)-2)^2}$

Что и требовалось доказать

Значит $b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{2021^2}$

Ответ: 2^{2021^2}

92-14-64-69
(1173)

2

Чистовик 5 из 5

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{399}-\frac{1}{400}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{399\cdot 400}$$

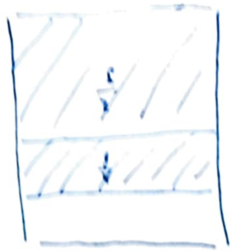
Я не знаю полного решения, но мне кажется, что ответ 1

Ответ: 1

Черновик

$(403-n)(400-n)=$

$=160400-403n-400n+n^2$



$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{n^2+160400}{-803n+160400}$

$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{n+1-n}{}\quad 2^{n^2}\quad 2^{(n+1)^2}\quad 2^{(n+2)^2}$

$=\frac{1}{(n+1)n}\qquad \frac{1}{n}+1$

$$\frac{\left(2^{(n+2)^2}\right)^3\cdot 2^{n^2}}{\left(2^{(n+1)^2}\right)^3}=\frac{2^{(n+2)^2\cdot 3}\cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2\cdot 3}}=$$

$n(n+1)+(403-n)(400-n)$

$=2^{(n+2)^2\cdot 3+n^2-(n+1)^2\cdot 3}$

$2n^2-800n+160400$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}$

$3\cdot\left((n+2)^2-(n+1)^2\right)+n^2=$

$=3\cdot(n+2+n+1)(n+2-n-1)+n^2=\qquad \frac{1\cdot 2+3\cdot 4\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

$=3\cdot(2n+3)+n^2=\qquad \frac{1+3\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 4}$

$=n^2+2\cdot 3\cdot n+3^2=(n+3)^2$

$(k-1)^2=k^2-2k+1\qquad \frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(403-n)(400-n)}$

1 2

Черновик

$b_4 = \cancel{\ }\ \frac{2 \cdot 8}{1} = 2^4$

$\ \ 1010$
-427
$\ \ 229$
$\ \ 198$

$$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$$

~~Пакраух~~ ~~Покровёки~~ гиры

$\ \ 198$
$+229$
$\ \ 427$

П - 1
О - 5
Р - 3
И - 1
В - 2
Б - 1
Ь - 1
Е - 1
Ы - 2
Г - 1

$$b_5 = \frac{(2^4)^3 \cdot 1}{2^3} = \frac{2^{12}}{2^3} = 2^9$$

5 3 2 2

$2^1\ 2^0\ 2^1\ 2^4$

101 ⊗011 ⊗10 ⊗1

110

5 3 2

432 522 531

5 3 2

1 3 2

П - 1
О - 5
К - 1
Р - 3
И - 1
В - 2
Б - 1
Ь - 1
Е - 1
Ы - 2
Г - 1

1 ⊗

$\ \ 9$
$\times 23$
$\ \ 27$
18
207