0 055279 390000

05-52-79-39
(135.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Никитина Арсения Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход: 12:36 — 12:38

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

100 (сто)

Черновик

10 команд

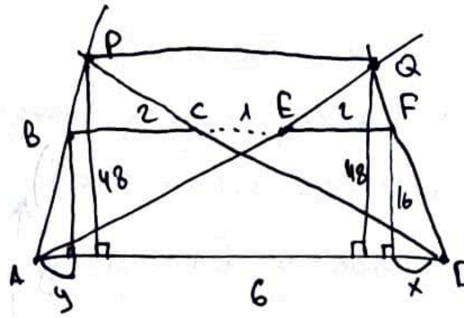
$2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 90$ очков

$\frac{a_1 + a_1 + (\cancel{n-1}\,9)d}{2} \cdot \cancel{n}\,10$

$\left(a_1 + \frac{9d}{2}\right)10 = 90$

$10a_1 + 45d = 90$

$a_1 = 0 \quad d = 2$



$PQ = ?$

$x + y = 1$

$3x + 3y = 3$

$43 - 25$
18

$\log_2^2(x+2) \cdot \log_3^2(x+7) + 16 \leq 8 \cdot \log_{\cancel{9}\,3}(x+2) \cdot \log_{\cancel{x}\,2}(x+7)$

$\log_2^2 t \cdot \log_3^2(t+5) + 16 \leq 8 \cdot \log_3 t \cdot \log_2(t+5)$

$121 \times 11 = 121 + 121\cdot 10 = 1331$

$\log_2^2(x+2) \cdot \log_3^2(x+7) + 16 \leq 8 \cdot \log_3(x+2) \cdot \log_2(x+7)$

$\log_2(x+2) \cdot \log_3(x+7) \overset{?}{=} \log_3(x+2)\log_2(x+7)$

$\log_3 22^3 - \log_2 66 \vee 5$

$\boxed{\sqrt[3]{n}}$

$3(3 - \log_2 3)(\log_{\cancel{9}} 22 - 1)$

$3 \cdot \log_3 22 - \log_2 22 - 3 + \log_2 3$

$x = \frac{1}{3}$

$\log_2 \frac{8}{3} \cdot \log_3 \frac{22}{3}$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{x+y}}{x+y} \geq \frac{9}{2} + 2$

$2024 : 12 = 168$ (-12, 82, -72, 104, -96, 8)

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$\cancel{2} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \overset{\vee\!\mid}{=} \frac{\cancel{2}1}{2} + \cancel{2}$

$169 \times 13 = 507 + 169$

$\frac{1}{2}$

$a + bk \cdot m$

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

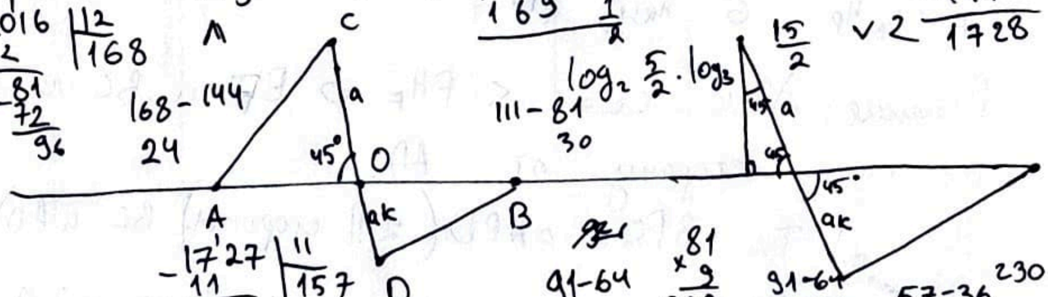
$\vee 2$

$2016 : 12 = 168$ (-12, 81, -72, 96)

$168 - 144$
24

$111 - 81$
30

$\log_2 \frac{5}{2} \cdot \log_3$



$1727 : 11 = 157$ (-11, 62, -55, 77)

$91 - 64$
25

$81 \times 9 = 729$

$91 - 64$
25

$57 - 36$

230

$511 : 7 = 73$

$x > -1$

$0; -1$

6

$\log_2(x+2) \cdot \log_3(x+7) = 2$

$728 : 8 = 91$ (-72, 08)

$91 - 64$

-64
7

$157 - 121$
36

$49 \times 7 = 343$

$26 + 41 + 51 + 65 + 62$

49
24

$67 + 116 + 62$

$129 + 116 = 245$

Чистовик

№1 10 команд $\Rightarrow \frac{10\cdot 9}{2}=45$ матчей

За каждый матч команды (обе) в сумме получают 2 очка. Тогда всего очков $45\cdot 2=90$ очков

Пусть последняя получила a очков, разница между командами - $d \geq 2$ (т.к у каждого четное кол-во очков)

$S=\frac{a+a+(10-1)\cdot d}{2}\cdot 10$ - сумма очков у всех команд

Так как выше сказано, что $S=90$, то

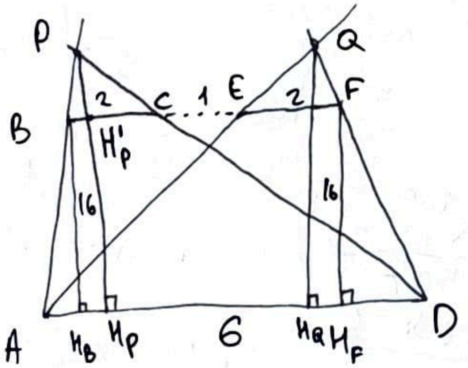
$90=10a+45d$, т.к $d\geq 2 \Rightarrow a=0$ и $d=2$, т.к $45d\geq 90$. Тогда вторая команда

получила $a_9=a+8\cdot d=0+8\cdot 2=16$ очков

Ответ: $\boxed{16 \text{ очков}}$

Изначально у всех 0 очков и меняются на 2 $\Rightarrow$ разность четность не меняется

№2



Дано: $ABCD$, $AEFD$-трапеции

$FH_F=BH_B=16$, $AD=6$

$BC=EF=2$, $CE=1$

Найти: $S_{PQDA}=?$

Решение: 1) Т.к $CE=1 < FH_F \Rightarrow EF$ и BC лежат по одну сторону от AD.

2) Т.к $\triangle BPC \sim \triangle APD$ (2 $\parallel$ стороны BC и AD)

$\cancel{\frac{PH'_p}{PH_p}=\frac{BC}{AD}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$ $\cancel{3PH'_p=BH_B=BH_B\,PH'_p}$

$$\frac{PH'_p}{PH_p}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3PH'_p=PH_p=BH_B+PH'_p$$

$$PH'_p=\frac{BH_B}{2}=8$$

Чистовик

№2 (прод.) $PH_P = BH_B + P'H'_P = 16+8=24$

Аналогично с $\triangle EQF \sim \triangle AQD$: $QH_Q = 24$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ APQD - трапеция.

Пусть $AH_B = x$, $DH_F = y$ $\Rightarrow$ $x+y = AD - BF = 6-5=1$

Т.к $\triangle AH_BB \sim \triangle AH_PP$ (по $\parallel$ сторонам BH_B и PH_P)

$$\frac{x}{AH_P} = \frac{BH_B}{PH_P} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}x = AH_P$$

Аналогично: $\triangle DFH_F \sim \triangle DQH_Q$: $DH_Q = \frac{3}{2}y$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow DH_Q + AH_P = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = AD - PQ$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}(x+y) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = 6 - PQ \Rightarrow PQ = \frac{9}{2}$$

Тогда $S_{APQD} = \dfrac{AD+PQ}{2}\cdot PH_P = \dfrac{6+\frac{9}{2}}{2}\cdot 24 = 21\cdot 6 = 126$

~~Ответ: $S_{APQD} = 126$~~ продолжение на др. листе

№3 $\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16 \leq 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7)$

$\Updownarrow$ ОДЗ: $\left.\begin{matrix} x+2>0 \\ x+7>0 \end{matrix}\right\}$ $x>-2$

$$\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16 \leq 8\cdot\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7)$$

Докажем, что:

$$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7) \overset{?}{=} \log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7) \quad \Big| : \log_2(x+7)\cdot\log_3(x+7)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\log_2(x+2)}{\log_2(x+7)} \overset{?}{=} \frac{\log_3(x+2)}{\log_3(x+7)}$$

$x+7>1$, т.к $x>-2$

$\Updownarrow$

$\log_{x+7}(x+2) = \log_{x+7}(x+2)$ - верно

Тогда исходное неравенство равносильно:

$$\left(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)-4\right)^2 \leqslant 0$$

Чистовик

$$\Updownarrow$$

$$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=4$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=2 \quad (1)\\ \log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=-2\end{array}\right.}$$

~~Т.к~~ $\cancel{\log_3(x+7)>0}$ ~~(т.к~~ $\cancel{x>-2}$~~)~~

~~То в (1),~~ $\cancel{\log_2(x+2)>0 \Rightarrow x>-1}$

$$\cancel{\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=2}$$

$$\cancel{(x+7)^{\log_2(x+2)}=9}$$

$$\cancel{(x+2)^{\log_2(x+7)}=9}$$

$$\cancel{x=1;\ 3}$$

$$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=4$$

Т.к $x>-2$, то $x+7>5 \Rightarrow \log_3(x+7)>0$

Тогда $\log_2(x+2)>0 \Rightarrow x>-1$

Т.к при $x>-1$ обе ф-ции "+" и обе возрастающие, то произведение тоже возрастает тогда уравнение имеет не более одного корня, заметим, что $x=2$ подходит.

Ответ: $\underline{x=2}$

Чистовик:

№4 Запишем кубы большие 36 и меньшие 2025

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728

Т.к $\sqrt[3]{n}$ - возрастающая, то на промежутках между кубами будет такое же значение, что и в меньшем кубе

Тогда из $[36; 64)$ нам нужны числа, делящиеся на 3: их 10 $\frac{63-36}{3}+1=10$

Из $[64; 125)$ числа $\vdots 4$:

$\frac{124-64}{4}+1=16$

Из $[125; 216)$ числа $\vdots 5$:

$\frac{215-125}{5}+1=19$

Из $[216; 343)$ $\vdots 6$:

$\frac{342-216}{6}+1=22$

Из $[343; 512)$ $\vdots 7$

$\frac{511-343}{7}+1=25$

Из $[512; 729)$ $\vdots 8$

$\frac{728-512}{8}+1=28$

Из $[729; 1000)$ $\vdots 9$

$\frac{999-729}{9}+1=31$

Из $[1000; 1331)$ $\vdots 10$

$\frac{1330-1000}{10}+1=34$

Из $[1331; 1728)$ $\vdots 11$

$\frac{1727-1331}{11}+1=37$

Из $[1728; 2025]$ $\vdots 12$

$\frac{2016-1728}{12}+1=25$

Тогда всего множеству принадлежит:

$10+16+19+22+25+28+31+$

$+34+37+25=247$

Ответ: 247 чисел.

Черновик

$\log_2(x+7)\cdot\log_3(x+2)=2$

$4xy \geq x^2+2xy+y^2$

$(x-y)^2 \leq 0$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2 = \frac{2-\sqrt{xy}}{2(x+y)}$

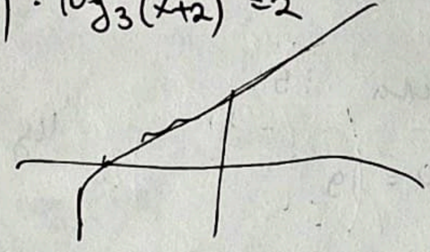
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

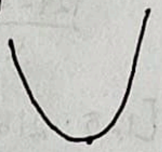
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 \geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)$

$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{x}{y}\left(\frac{2(x+y)}{2-\sqrt{xy}}\right)+\frac{y}{x}\left(\frac{2(x+y)}{2-\sqrt{xy}}\right)-2\left(\frac{2(x+y)}{2-\sqrt{xy}}\right)$

$\log_2(x+7)\cdot\log_3(x+2)=2$



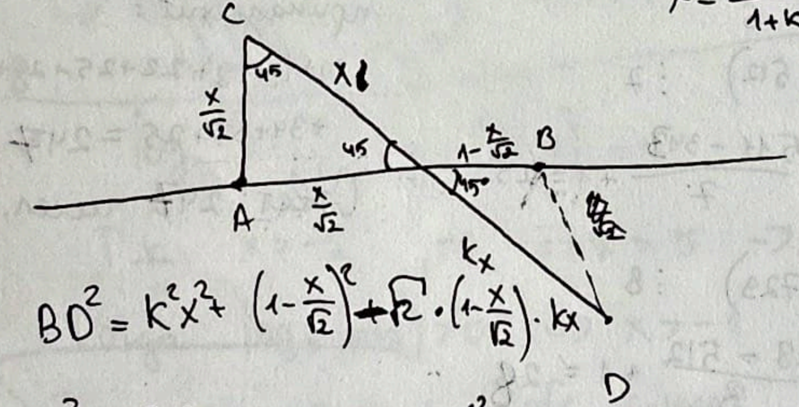


$x=y$

$\frac{x}{}$

$x+kx=m$

$x=\frac{m}{1+k}$



$\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq 2\sqrt{xy}$

$\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{a}{2}$

$BD^2=k^2x^2+\left(1-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\cdot kx$

$BD^2=k^2x^2+1-\sqrt{2}x+\frac{x^2}{2}-kx\sqrt{2}+kx^2$

$BD^2=x^2\left(k^2+k+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{2}\,(kx-$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2$

$a=0$

$x=y$

VI

$2+2+a\frac{2x}{2x}$

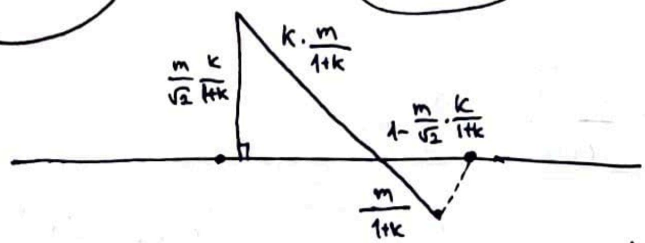
$2+$

5

Черновик

$k > 1$

При $x=y$



$a^4+b^4 > 2ab$

$4+2\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}+2\frac{a^2+b^2}{ab}$

$4+ \quad \underbrace{4+\overset{\vee\, 4}{2\cdot 2}+\overset{4}{2\cdot 2}}$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geqslant \frac{a}{2}+2$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{a^2-2b}{b}+\frac{z\sqrt{b}}{a} \geqslant \frac{z}{2}+2$$

$$\frac{x}{y}\left(\frac{2(x+y)}{2-\sqrt{xy}}\right)+\frac{y}{x}\left(\frac{2(x+y)}{2-\sqrt{xy}}\right)-2\left(\frac{x+y}{2-\sqrt{xy}}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{2(x+y)}{x+y-2\sqrt{xy}}\right) \geqslant a$$

$$\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy}\cdot\frac{2(x+y)}{x+y-2\sqrt{xy}}=\frac{2\cdot(x-y)^2\cdot(x+y)}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

$$\frac{2(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(a-b)^2}=\frac{2\cancel{(a-b)^2}(a+b)^2(a^2+b^2)}{a^2b^2\cancel{(a-b)^2}}$$

$$\frac{2(a+b)^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$$

$$2\,\frac{(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2)}{a^2b^2}$$

$$2\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}\right)=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{a^2b^2}+2\frac{(a^2+b^2)}{ab}$$

$\frac{x+y}{xy}+$

Чистовик

№5 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)=a\cdot\left(\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2(x+y)}\right)$

Если $x=y$, то нерво обращается в $0\geq0$, верно.

Тогда пусть $x>y$.

$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{2(x+y)}{x+y-2\sqrt{xy}}\right)\geq a$

$\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}\cdot\frac{2(x+y)}{x+y-2\sqrt{xy}}\geq a$

$\frac{(x-y)^2\cdot2(x+y)}{xy\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\geq a$

найдем минимум этого выражения при $x>y$

$\frac{2\cdot\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(x+y)}{xy\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}}\geq a$

$2\cdot\frac{(x+y+2\sqrt{xy})(x+y)}{xy}\geq a$

$2\cdot\frac{(x+y)^2}{xy}+2\cdot2\cdot\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq a$

(Чистовик)

$$2\frac{(x+y)^2}{xy}+4\cdot\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq a$$

№5 (продолж.)

$$\begin{cases}(x+y)^2>(2\sqrt{xy})^2=4xy\\ x+y>2\cdot\sqrt{xy}\end{cases}$$

$$\frac{2(x+y)^2}{xy}+4\cdot\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq a$$

$$\vee$$

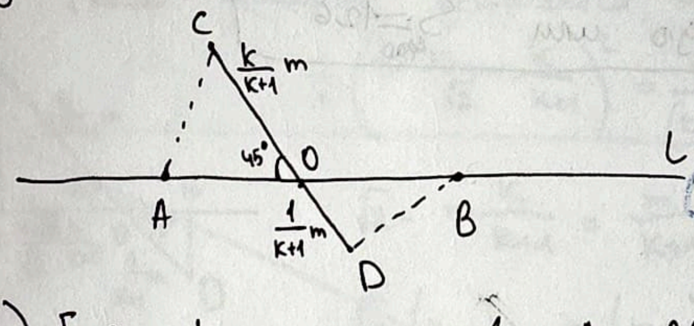
$$2\cdot4\frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}}+4\cdot2\cdot\frac{\cancel{\sqrt{xy}}}{\cancel{\sqrt{xy}}}=16$$

Если $a\leq16$, то нер-во выполнено при всех x и y, но если $a>16$, то при $x>y$, ~~x~~

$x=\lim\limits_{x\to y^+}x$ будет достигаться $16+o(1)$ ($o(1)$ - беск. малая)

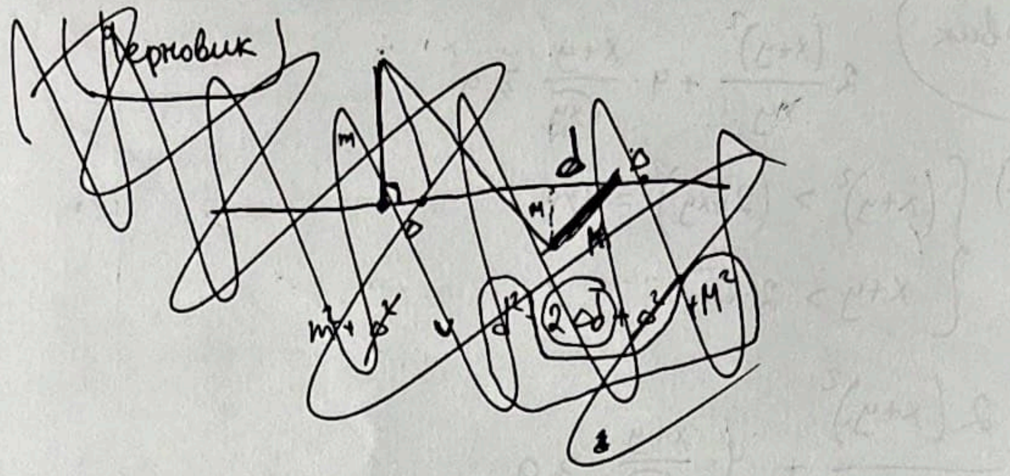
Ответ: $a\in(16;+\infty)$

№6



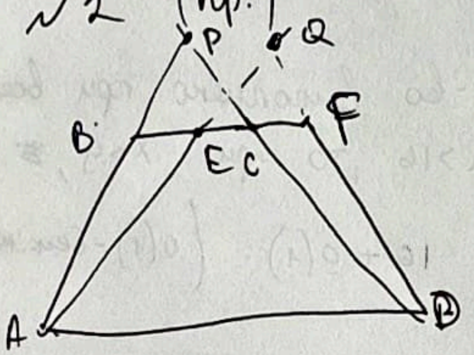
1) Если $k=1$, то условие $AC\neq BD$ не выполняется когда ~~не выполняется~~ нельзя передвинуть AB, чтобы $\angle A=\angle B=90°$

Это будет когда $\frac{m}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, когда $m=\sqrt{2}$ и $k=1$ нельзя, т.к положив AB в точки, где $\angle A=\angle B=90°$ и передвигая (добавляя различные d) получим $d^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=d^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2$ что верно при



(Чистовик)

№2 (пр.)



При другом рисунке

$x+y = AD - BC = 6-3 = 3$

$\frac{3}{2}(x+y) = \frac{9}{2}$

$PQ = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$

Тогда $S_{APQD} = \frac{\frac{3}{2}+6}{2}\cdot 24 = 15\cdot 6 = 90$

Ответ: $\boxed{S_{APQD}=90 \text{ или } S_{APQD}=126}$

(Чистовик) №6 (прод.) при любом d

(d - отрезок от точки A в положении $\angle A = 90^\circ$)

~~Рассуждения~~ Если $m \neq \sqrt{2}$, $k=1$, то найдется такое положение, так как отрезки изменяются непрерывно и когда $\angle A = 90$, то $AC < BD$, а когда $\angle B = 90^\circ$, $BD < AC$. $\Rightarrow$ найдется положение равенства.

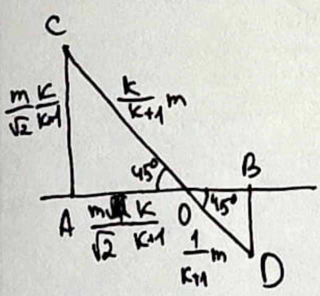
Пусть $k > 1$, если $0 < k < 1$, то рассуждения аналогичны, только для т. D.

Если OC - гипотенуза $\triangle OCA$ (положим $\angle A = \angle 90^\circ$) и одновременно OD - гипотенуза ($\angle B = \angle 90^\circ$) но невозможно, так как $k > 1$, то в таком положении $AC > BD$, при сдвиге на d

$$A'C^* = \sqrt{AC^2 + d^2} \; * \quad , \quad B'D = \sqrt{BD^2 + d^2}$$

Тогда $B'D < A'C$ неверно

Такое положение достигается, когда



$$2 \cdot \left(1 - \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{k+1}\right)^2 = \frac{1}{(k+1)^2} \cdot m^2$$

$$\sqrt{2} - m \frac{k}{k+1} = \frac{m}{k+1}$$

$$\sqrt{2}(k+1) = m(k+1)$$

$$m = \sqrt{2}$$

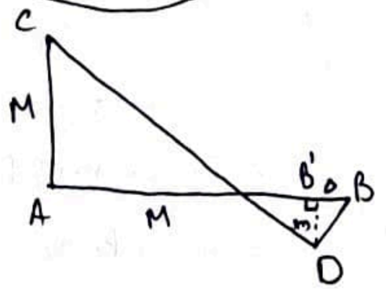
Пусть $k > 1$, $m \neq \sqrt{2}$:

~~Когда~~ Пусть $DB'O = 90^\circ$, расстояние от B до $B' = a$

$B'D = m$, $AC = M$

Сделаем $\angle A = 90^\circ$

(Чистовик) №6 (прод.)



сдвинем AB на d:

$AC^2 = M^2 + d^2$

$BD^2 = m^2 + (d+\Delta)^2$

$$M^2 + \cancel{d^2} \vee m^2 + \cancel{d^2} + 2d\Delta + \Delta^2$$

Т.к $m < M$ $(k > 1)$

Если $m^2 + \Delta^2 \leq M$, то можно найти такое d, что

$$M^2 = m^2 + \Delta^2 + 2d\Delta$$

Если $m^2 + \Delta^2 > M^2$ то невозможно, найдем это положение.

$$m = \frac{M}{k}, \quad \Delta = \left(1 - M - \frac{M}{k}\right)$$

$$\cancel{M^2} < \frac{M^2}{k^2} + 1 + \cancel{M^2} + \frac{M^2}{k^2} - 2M - 2\frac{M}{k} + 2\frac{M^2}{k}$$

$$2M + 2\frac{M}{k} < 2\frac{M^2}{k^2} + \frac{M^2}{k} + 1$$

Что невозможно.

Тогда при $m = \sqrt{2}$ неверно при любых k

при $k \in (0; +\infty)$ и $m \neq \sqrt{2}$