0 921627 290004

92-16-27-29
(150.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-1

Санкт-Петербург

Сдано 14.17

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"

по математике

Васильева Егора Алексеевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

+1

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

92-16-27-29 (150.3)

Чистовик

Задание 1

I II III .... 20 – команда

x $x-d$ $x-2d$ $x-19d$ – кол-во очков

$x, d \in \mathbb{N}$

сумма всех очков $N = x+(x-d)+\ldots+(x-19d) =$

$= \frac{x+x-19d}{\cancel{2}} \cdot \overset{10}{\cancel{20}} = 10(2x-19d)$

Всего было проведено игр: $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 10 \cdot 19$

Значит, всего очков: $N = 3 \cdot C_{20}^2 = 3 \cdot 10 \cdot 19$

$$\cancel{10}(2x-19d) = 3 \cdot \cancel{10} \cdot 19$$

$$2x - 19d = 3 \cdot 19$$

$$2x = 19(d+3)$$

Так как за выигрыш даётся 3 очка команде, то количество очков каждой команды кратно 3

$\Rightarrow d \vdots 3, \ x \vdots 3$

$2x = 19(d+3) \Rightarrow x \vdots 19$

$\left.\begin{matrix} x \vdots 19 \\ x \vdots 3 \end{matrix}\right| \Rightarrow x \vdots 3 \cdot 19$

$x = 57n, \ n \in \mathbb{N}$

$2 \cdot \overset{3}{\cancel{57}}n = \cancel{19}(d+3)$

$6n = d+3$

$d = 3(2n-1)$

Найдём количество очков 20 команды

$N_{20} = x - 19d = 57n - 19 \cdot 3(2n-1) = 57n - 57(2n-1) =$

$= 57(n - 2n + 1) = 57(1-n) \geqslant 0$

$\Rightarrow 1 - n \geqslant 0$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n \leqslant 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right| \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow x = 57$

$d = 3(2 \cdot 1 - 1) = 3$

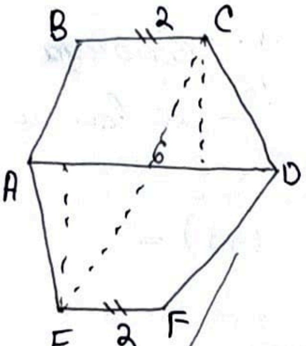
$x - 19d = 57 - 19 \cdot 3 = 0$

Значит, команда, занявшая второе место, набрала

$x - d = 57 - 3 = 54$ очка

Ответ: 54 очка

Черновик

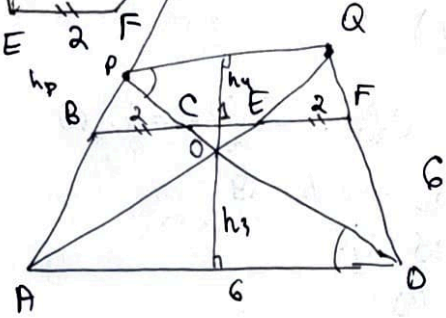


$h = h_1 = h_2 = 8$

$\rho(C; E) \geq h_1 + h_2 = 16$

$$\begin{array}{r} 2016 \\ -12 \\ \hline 81 \\ -72 \\ \hline 96 \\ -96 \\ \hline 0 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 12 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 189 \\ +36 \\ \hline 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ +144 \\ \hline 1728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ +169 \\ \hline 2197 \end{array}$$



$\frac{h_3}{h_4} = \frac{AO}{OQ}$

$6 = \log_2 64 = \frac{\log_4 64}{\log_4 2} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

$\underbrace{n^3, n^3+1 \ldots (n+1)^3 - 1}_{n}, (n+1)^3$

$\Delta BPC \sim \Delta APD$

$\Rightarrow \frac{h_p}{h_p + h} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$n^3 \vdots n$

$n^3 + n \vdots n$

$\ldots$

$(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n \vdots n$

$= n^3 + n(3n+3)$

$3h_p = h_p + 8$

$2h_p = 8$

$h_p = 4 = h_Q$

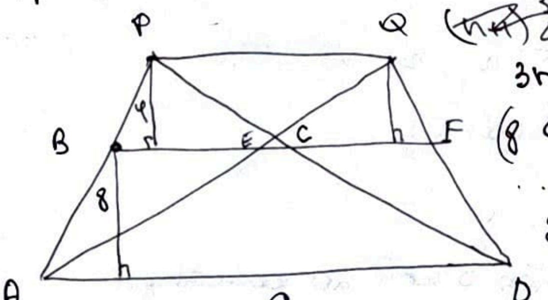
таких чисел

$\cancel{(n+1)^3 - 1}$

$3n + 3 + 1 = 3n + 4$

12^3

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ +144 \\ \hline 1728 \end{array}$$



(8 9) 10 11

. 26) 27

$26 - 8 + 1 = \cancel{20} 19$

10

$3n + 4 = 10$

$n \vdots [\sqrt[3]{n}]$

$a^3 \ldots\ldots b^3$

$a^3 \quad [\sqrt[3]{a^3}] = a$

$a^3 + 1 \quad [\sqrt[3]{a^3+1}] = a$

$\ldots$

$b^3 - 1 \quad [\sqrt[3]{b^3 - 1}] = a$

$b^3 \quad [\sqrt[3]{b^3}] = b$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times 12 \\ \hline 336 \\ +168 \\ \hline 2016 \end{array}$$

25		27
26	2	28
27		29
		30
27	3	...
28	3	63
		10
63	3	
64	4	

$$\begin{array}{r} 63 \\ -27 \\ \hline 36 \end{array}$$

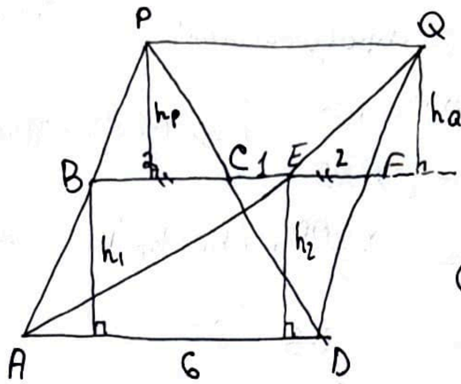
37 чисел

13

$3n + 4 =$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ +169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

Чистовик



(рис. 1)

Задание 2

Дано:

ABCD, AEFD – трапеции

$AD = 6$

$h = h_1 = h_2 = 8$

$BC = EF = 2$

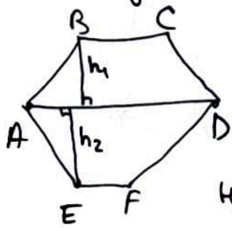
$CE = 1$

$AB \cap CD = \{P\},\ AE \cap DF = \{Q\}$

S_{APQD} – ?

Решение:

1. Так как у трапеций общее основание AD возможны два случая



– BC и EF по разные стороны от AD

но тогда $CE \geq h_1 + h_2 = 16$

$CE = 1$ – противоречие

Значит, BC и EF по одну сторону от AD так как высоты трапеций равны, то B, C, E, F лежат на одной прямой, параллельной AD

2. Рассмотрим случай, когда точки расположены в порядке B, C, E, F (рис. 1)

3. $BC \parallel AD \Rightarrow \triangle BPC \sim \triangle APD$

$$\Rightarrow \frac{h_P}{h_P + h_1} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$3h_P = h_P + h_1$$

$$2h_P = 8$$

$$h_P = 4$$

Аналогично, $h_Q = h_P = 4 \Rightarrow PQ \parallel BC$

4. $BE \parallel PQ \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle APQ$

$$\Rightarrow \frac{BE}{PQ} = \frac{h_1}{h_1 + h_P} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC + CE}{PQ} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2+1}{PQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{9}{2}$$

Чистовик

Задание 2 (продолжение)

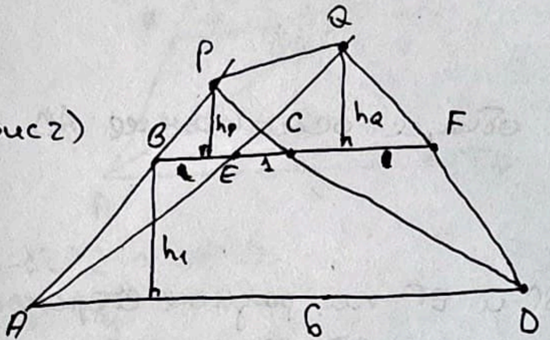
5. $PQ \parallel BC \parallel AD$, $PQ = \frac{9}{2} \neq AD$ $\Rightarrow$ $APQD$ – трапеция

$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot (h_1 + h_P) = \frac{\frac{9}{2} + 6}{2} \cdot (8 + 4) =$

$= 10{,}5 \cdot 6 = 21 \cdot 3 = 63$

6. Рассмотрим случай, когда точки в порядке B, E, C, F (рис 2)

(рис 2)



Аналогично, $h_P = h_Q = 4$

$PQ \parallel BC \parallel AD$

2

7. $BE \parallel PQ$

$\triangle ABE \sim \triangle APQ$

$\Rightarrow \frac{BE}{PQ} = \frac{h_1}{h_1 + h_P} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\frac{BC - CE}{PQ} = \frac{2}{3}$

$\frac{2 - 1}{PQ} = \frac{2}{3}$

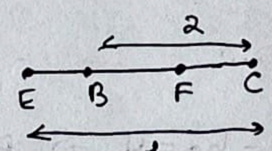
$PQ = \frac{3}{2} \neq AD$, $PQ \parallel AD$ $\Rightarrow$ $APQD$ – трапеция

$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot (h_1 + h_P) = \frac{6 + \frac{3}{2}}{2} \cdot (8 + 4) = 7{,}5 \cdot 6 =$

$= 15 \cdot 3 = 45$

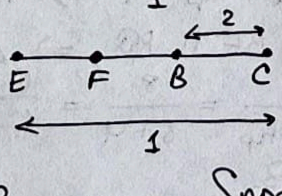
Случай расположения

3)



невозможны

4)



Ответ: $S_{APQD} = 63$ или $S_{APQD} = 45$

Чистовик

Задание 3

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\leq\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\begin{cases}x+3>0\\x+8>0\end{cases}\quad x>-3$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\log_2(x+3)\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\log_3(x+8)\right)^2\leq\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\leq\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\leq 8\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-16$$

$$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\leq 8\cdot\frac{\log_2(x+3)}{\cancel{\log_2 3}}\cdot\frac{\log_3(x+8)}{\cancel{\log_3 2}}-16$$

$$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\leq 8\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)-16$$

$$t=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$$

$$t^2\leq 8t-16$$

$$t^2-8t+16\leq 0$$

$$(t-4)^2\leq 0$$

$$t=4$$

$$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$$

Рассмотрим $f(x)=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$

$g(x)=\log_2(x+3)$ – возрастающая функция

$h(x)=\log_3(x+8)$ – возрастающая функция

$\Rightarrow f(x)=g(x)\cdot h(x)$ – возрастающая функция

Значит, уравнение $f(x)=4$ имеет не более одного корня

при $x=1$ $f(x)=\log_2 4\cdot\log_3 9=2\cdot 2=4$

Значит, $x=1$ – единственный корень уравнения $f(x)=4$

$1>-3$ ✓

Ответ: $\{1\}$

Чистовик

Задание 4

$A: n \vdots [\sqrt[3]{n}]$, $n \in \mathbb{N}$

$[25; 2025]$ - ? $\in A$

Рассмотрим числа между двумя последовательными кубами и найдём их целую часть от кубического корня.

$n^3 \quad [\sqrt[3]{n^3}] = n$

$n^3+1 \quad [\sqrt[3]{n^3+1}] = n$

$n^3+2 \quad [\sqrt[3]{n^3+2}] = n$

$\ldots \quad \ldots$

$(n+1)^3-1 \quad [\sqrt[3]{(n+1)^3-1}] = n$

$(n+1)^3 \quad [\sqrt[3]{(n+1)^3}] = n+1$

Найдём сколько чисел N от n^3 до $(n+1)^3-1$ делятся на $[\sqrt[3]{N}]$, то есть сколько чисел делятся на n на этом промежутке.

$n^3 \vdots n$

$n^3+n \vdots n$

$\ldots$

$(n+1)^3-1 = n^3+3n^2+3n \vdots n$

т.е. $n^3 + 0\cdot n \vdots n$

$\ldots$

$n^3+(3n+3)\cdot n \vdots n$

- таких чисел $3n+3+1 = 3n+4$

$[25; 2025]$

Разобьём на ~~промежутки~~

$25, 26, [\underset{3^3}{27}; \underset{12^3-1}{1727}], [1728; 2025]$

1) 25

$[\sqrt[3]{25}] = 2 \quad 25 \not\vdots 2$, $25 \notin A$

2) 26

$[\sqrt[3]{26}] = 2 \quad 26 \vdots 2$, $26 \in A$

Чистовик (продолжение №4)

3) $\left[3^3 ; 12^3 - 1 \right]$

Количество чисел, принадлежащих множеству A будет равно $\sum\limits_{n=3}^{11}(3n+4) = 3\sum\limits_{n=3}^{11} n + 9\cdot 4$

$$\sum_{n=3}^{11} n = 3+4+\ldots+11 = \frac{3+11}{2}\cdot 9 = \frac{14}{2}\cdot 9 = 7\cdot 9 = 63$$

$$\sum_{n=3}^{11}(3n+4) = 3\cdot 63 + 36 = 189+36 = 225$$

4) $\left[\underset{12^3}{\overset{\shortparallel}{1728}} ; 2025 \right]$

так как $13^3 = 2197 > 2025$, то для $N \in [1728; 2025]$, $\left[\sqrt[3]{N}\right] = 12$

найдём количество $N \in [1728; 2025]$, $N \vdots 12$

$$\left.\begin{array}{l} 1728 = 12\cdot 144 \\ \ldots \\ 2016 = 12\cdot 168 \end{array}\right\} 168 - 144 + 1 = 24 + 1 = 25 \text{ чисел}$$

$2028 = 12\cdot 169 > 2025$

Знаит, ~~исходных~~ искомоех чисел будет $1 + 225 + 25 =$ $= 251$ число

Ответ: 251 число

Задание 5

$a - ?$ $a > 0$

$\forall x, y$
$x > 0, y > 0$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geqslant \frac{a}{2} + 2$$

если $x = y$: $\frac{x}{x} + \frac{x}{x} + \frac{a\sqrt{x^2}}{2x} \geqslant \frac{a}{2} + 2$

$$\cancel{1+1} + \frac{ax}{2x} \geqslant \frac{a}{2} + \cancel{2}$$

$$\frac{a}{2} \geqslant \frac{a}{2}$$

$0 \geqslant 0$ – верно

Знаит, при $x = y$ неравенство верно для любого a

Рассмотрим $x \neq y$

Черновик

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\geqslant a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)$$

$$\cancel{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\quad\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{2}\geqslant\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

при $x=y$: $1+1-2\geqslant a\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2a}\right)$

$0\geqslant0$ ✓

при $x\neq y$ $\quad\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}>0$

$$a\leqslant\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}}$$

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}}}=$$

$t=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ $\quad t\geqslant2$

$t^2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2$

$t^2-2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

$$=\frac{t^2-2-2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}}=\frac{t^2-4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}}=\frac{2t(t^2-4)}{t-2}$$

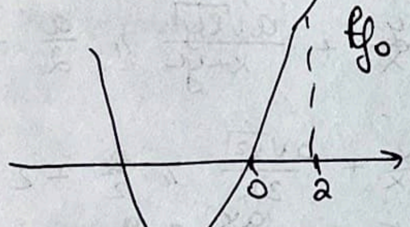
$$f(t)=\frac{2t\,(t^2-4)}{t-2}=\frac{2t\cancel{(t-2)}(t+2)}{\cancel{t-2}}=2t(t+2)$$

$\forall t$ $\quad$ ~~$a\leqslant2t(t+2)$~~

$a\leqslant-2$

$t_0=\frac{-2+0}{2}=-1$

$f_0=-2\cdot1=-2$



Чистовик (продолжение №5)

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 \geqslant \frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 \geqslant a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 \geqslant a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}}\right)$$

пусть $t=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$

по неравенству о средних

$$t=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}}=2$$

равенство достигается при $\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{\frac{y}{x}}$, т.е. при $x=y$

~~По условию~~ Значит, при $x \neq y$, $t>2$

$$t^2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\cdot\cancel{\frac{x}{y}}\cdot\cancel{\frac{y}{x}}$$

$$t^2-2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

(Понятно, что t может принимать любые значения на $(2;+\infty)$)

подставим в неравенство

$$t^2-2-2 \geqslant a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)$$

$$t^2-4 \geqslant a\left(\frac{t-2}{2t}\right)$$

$t>2 \Rightarrow \frac{t-2}{2t}>0$. Поделим обе части на $\frac{t-2}{2t}$

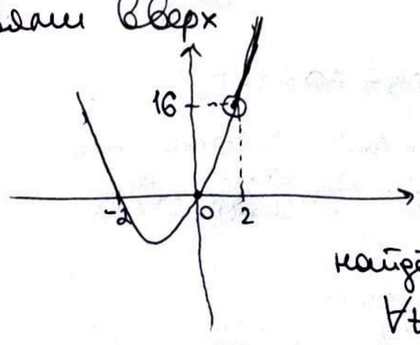
$$\frac{2t(t^2-4)}{t-2} \geqslant a$$

$$a \leqslant \frac{2t(\cancel{t-2})(t+2)}{\cancel{t-2}}$$

$$a \leqslant 2t(t+2)$$

Рассмотрим $f(t)=2t(t+2)$

– график представляет собой параболу, ветвями вверх

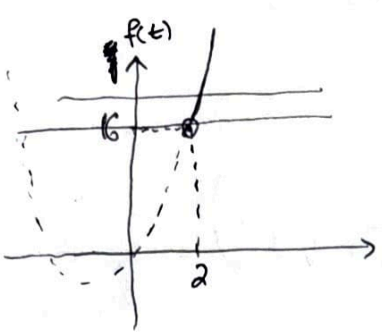


при $t>2$ графиком является ветвь параболы

$f(2)=2\cdot2\cdot4=16$

найдём a, при которых

$\forall t>2 \quad a \leqslant f(t)$



так как $f(t)$ возрастает при $t \geq 2$,

~~то max f(t)~~

то при $a \leq f(2) = 16$

неравенство будет выполняться

$(т.к.\ a \leq f(2) < f(t))$

$a \leq 16$

если $a > 16 = f(2)$, то неравенство выполняется не при всех t

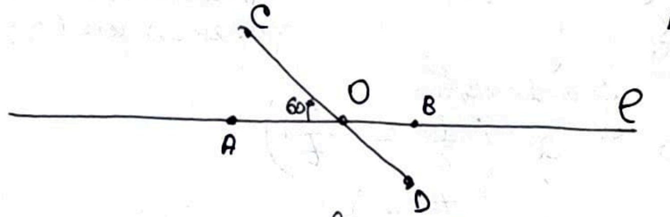
$a > 0 \Rightarrow 0 < a \leq 16$

Ответ: $(0; 16]$

Задание 6

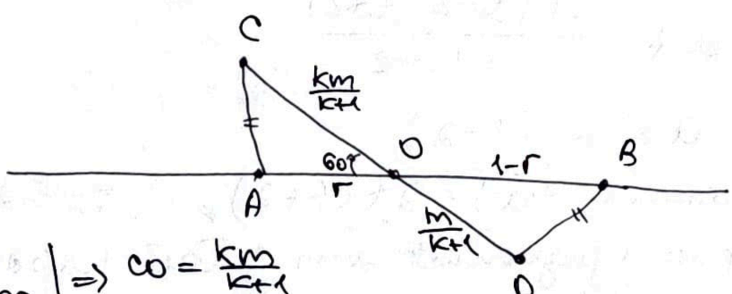
$AB = 1,\ CD = m,\ CO:OD = k$

$\angle AOC = 60°$



Понятно, что при движении AB по прямой l, угол между AB и CD не меняется и равен $60°$.

Пусть AB передвинули так, что $AC = BD$.



$$\left.\begin{matrix} CO:OD = k \\ CO+OD = m \end{matrix}\right| \Rightarrow CO = \frac{km}{k+1}, \quad DO = \frac{m}{k+1}$$

пусть $AO = r$, тогда $BO = AB - AO = 1 - r$

По т. косинусов: $AC^2 = CO^2 + AO^2 - 2 \cdot CO \cdot AO \cdot \cos 60°$

$$AC^2 = r^2 + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} - \cancel{2} \cdot r \cdot \frac{km}{k+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = r^2 + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} - \frac{kmr}{k+1}$$

По т. косинусов:

$$BD^2 = DO^2 + BO^2 - 2 \cdot DO \cdot BO \cdot \cos 60°$$

$$BD^2 = \frac{m^2}{(k+1)^2} + (1-r)^2 - \cancel{2}(1-r) \cdot \frac{m}{k+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{m^2}{(k+1)^2} + (1-r)^2 - \frac{m(1-r)}{k+1}$$

Черновик

$CO = \cancel{kx}\ kx$

$DO = x$

$AB = 1$

$CD = m$

$CO : OD = k$

$\angle AOC = 60^\circ$

$AC \neq BD$

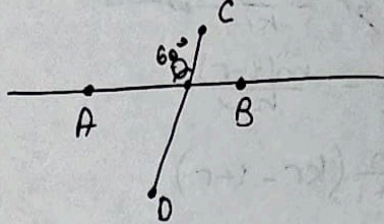
$kx + x = m$

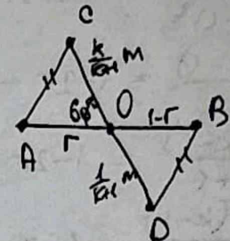
$x(k+1) = m$

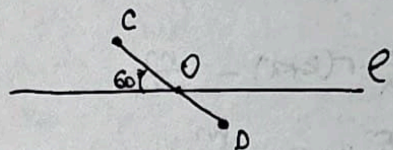
$x = \frac{m}{k+1}$

$CO = \frac{k}{k+1} m$

$DO = \frac{m}{k+1}$







$$r^2 + \left(\frac{km}{k+1}\right)^2 - \cancel{2}r \cdot \frac{km}{k+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \left(\frac{m}{k+1}\right)^2 + (1-r)^2 - \cancel{2} \cdot (1-r) \cdot \frac{m}{k+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\cancel{r^2} + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} - \frac{kmr}{k+1} = \frac{m^2}{(k+1)^2} + 1 - 2r \cancel{+r^2} - (1-r)\frac{m}{k+1}$$

$$\frac{m^2}{(k+1)^2}(k^2-1) + (1-r)\frac{m}{k+1} - \frac{kmr}{k+1} = 1 - 2r$$

$$\frac{m^2(k-1)\cancel{(k+1)}}{(k+1)^2} + \frac{m}{k+1}\left(1 - r - kr\right) = 1 - 2r$$

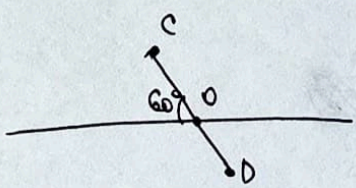
$$\frac{m^2(k-1)}{k+1} + \frac{m}{k+1}\left(1 - r(k+1)\right) = 1 - 2r$$

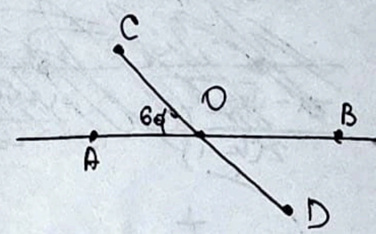
$$\frac{m^2(k-1)}{k+1} + \frac{m}{k+1} - mr = 1 - 2r$$

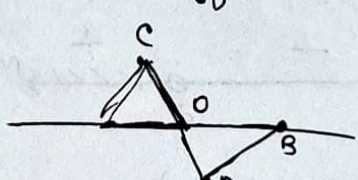
$$\frac{m^2(k-1)}{k+1} + \frac{m}{k+1} = 1 - r(2+m)$$

$$r(2+m) = 1 - \frac{m}{k+1} - \frac{m^2(k-1)}{k+1}$$

$$r = \frac{1 - \frac{m}{k+1} - \frac{m^2(k-1)}{k+1}}{m+2}$$







(чистовик, продолжение №6)

$$AC^2=BD^2$$

$$r^2+\frac{k^2m^2}{(k+1)^2}-\frac{kmr}{k+1}=\frac{m^2}{(k+1)^2}+(1-r)^2-\frac{m(1-r)}{k+1}$$

$$\cancel{r^2}+\frac{k^2m^2}{(k+1)^2}-\frac{kmr}{k+1}=\frac{m^2}{(k+1)^2}+1-2r+\cancel{r^2}-\frac{m(1-r)}{k+1}$$

$$\frac{m^2}{(k+1)^2}(k^2-1)=1-2r+\frac{kmr}{k+1}-\frac{m(1-r)}{k+1}$$

$$\frac{m^2(k-1)\cancel{(k+1)}}{(k+1)^{\cancel{2}}}=1-2r+\frac{m}{k+1}(kr-1+r)$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1}=1-2r+\frac{m}{k+1}(r(k+1)-1)$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1}=1-2r+\frac{m}{\cancel{k+1}}\cdot r\cancel{(k+1)}-\frac{m}{k+1}$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1}=1-2r+mr-\frac{m}{k+1}$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1}+\frac{m}{k+1}=1+r(m-2)$$

$$\frac{m^2(k-1)+m}{k+1}-1=r(m-2)$$

$$\frac{m^2(k-1)+m-(k+1)}{k+1}=r(m-2)$$

Рассмотрим $m\neq 2$

$$r=\frac{m^2(k-1)+m-(k+1)}{(k+1)(m-2)}$$

$0\le r\le 1$

$r\ge 0$

Рассмотрим $k>1$

$$\frac{m^2(k-1)+m-(k+1)}{\cancel{(k+1)}(m-2)}\ge 0$$

$m^2(k-1)+m-(k+1)=0$

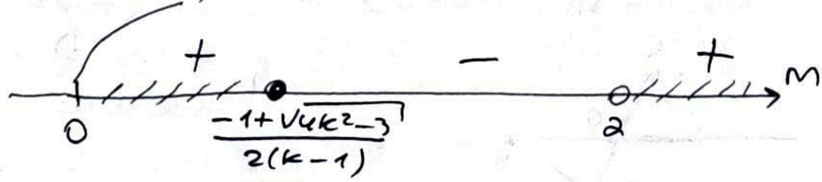
$m-2=0$

$m=2$

$D=1+4(k-1)(k+1)=1+4(k^2-1)=4k^2-3$

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{4k^2-3}}{2(k-1)}$$

$4k^2-3>0$ ✓



при $\frac{-1+\sqrt{4k^2-3}}{2(k-1)}<2$ $(k>1)$

Черновик (продолжение №6)

$-1+\sqrt{4k^2-3} < 4(k-1)$

$\sqrt{4k^2-3} < 4k-3$

$4k^2-3 < 16k^2-24k+9$

$12k^2-24k+12>0$

$k^2-2k+1>0$

$(k-1)^2>0$

— выполняется при любом $k>1$

$r\le 1$ Рассмотрим $m>2$

$$\frac{m^2(k-1)+m-(k+1)}{(k+1)(m-2)} \le 1 \quad \Big|\cdot (k+1)(m-2)>0$$

$m^2(k-1)+m-(k+1)\le(k+1)(m-2)$

$m^2(k-1)+\cancel{m}-(k+1)\le km-2k+\cancel{m}-2$

$m^2(k-1)-km+(k+1)\le 0$

$D = k^2-4(k-1)(k+1) = k^2-4k^2+4 = 4-3k^2$

$$m=\frac{k\pm\sqrt{4-3k^2}}{2(k-1)}$$

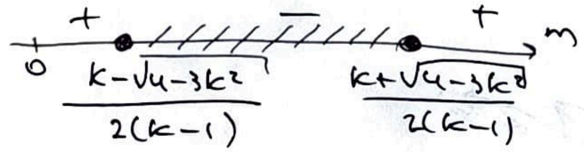
при $4-3k^2<0$ нер-во выполнится

$3k^2>4$

$k^2>\frac{4}{3}$

$k>\frac{2}{\sqrt3}>1$ ✓

при любом m



$\frac{k-\sqrt{4-3k^2}}{2(k-1)} \stackrel{?}{>} 0$

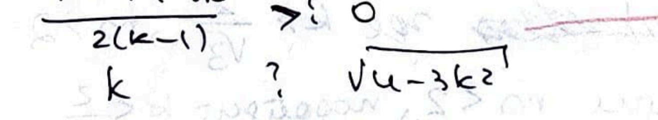
$k \quad ? \quad \sqrt{4-3k^2}$

$k^2 \quad 4-3k^2$

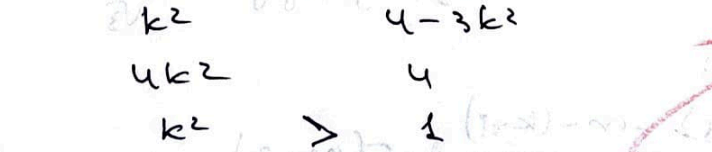
$4k^2 \quad 4$

$k^2 > 1$

Пересечём множества m



— пересечение $\varnothing$



Чистовик (продолжение №6)

$$\frac{-1+\sqrt{4k^2-3}}{2(k-1)} \overset{<}{?} \frac{k-\sqrt{4-3k^2}}{2(k-1)}$$

$$\sqrt{4k^2-3}+\sqrt{4-3k^2} \ ? \ k+1$$

$$\cancel{4k^2}-\cancel{3}+\cancel{4}-\cancel{3k^2}+2\sqrt{(4k^2-3)(4-3k^2)} \ ? \ \cancel{k^2}+2k+\cancel{1}$$

$$\cancel{2}\sqrt{(4k^2-3)(4-3k^2)} \ ? \ \cancel{2}k$$

$$(4k^2-3)(4-3k^2) \ ? \ k^2$$

$$16k^2-12k^4-12+9k^2 \ ? \ k^2$$

$$-12k^4+24k^2-12k^4 \ ! \ 0$$

$$-12(k^2-1)^2 \ <? \ 0$$

$$\frac{k+\sqrt{4-3k^2}}{2(k-1)} \overset{<}{?} 2$$

$$k+\sqrt{4-3k^2} \ ? \ 4(k-1)$$

$$\sqrt{4-3k^2} \ ? \ 3k-4$$

$$4-3k^2 \ ? \ 9k^2-24k+16$$

$$0 \ ? \ 12k^2-24k+12$$

$$0 < 12(k-1)^2$$

~~$k-\sqrt{4k^2}$~~

~~$\frac{-1+\sqrt{4k^2-3}}{2(k-1)} > 2$~~

подходят $(k;m)$ ~~[illegible]~~ где $k>\frac{2}{\sqrt{3}}$, $m>2$

Аналогично при $m<2$, подойдут $k<\frac{2}{\sqrt{3}}$

если $m=2$:

$$\frac{m^2(k-1)+m-(k+1)}{k+1}=r(m-2)$$

$$4(k-1)+2-(k+1)=0$$

$$3k-4+2-1=0$$

$$3k=3$$

$$k=1$$

Ответ: $(m;k)$: $\begin{cases} m>2 \\ k>\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$ ~~$\begin{cases} \ldots \\ k<\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$~~ $\begin{cases} m=2 \\ k=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 0<m<2 \\ 0<k<\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$