0 468105 490001

46-81-05-49
(150.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-1

Место проведения Казань
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Пайгельаина Никиты Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

46-81-05-49

Чистовик.

№1.

Так как каждая команда сыграла с каждой по 1 разу, то кол-во туров $= 20 - 1 = 19$. В одном туре играют $\frac{20}{2} = 10$ команд

Тогда всего сыграно $19 \cdot 10 = 190$ партий.

В каждой партии получают $3+0=3$ очка.

Значит всего очков получено: $190 \cdot 3 = 570$ очков.

Пусть a_1 — первая команда (кол-во очков), a_2 — кол-во очков второй и т.д. (по месту)

Тогда $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 570$ $\quad a_1 + a_{20} = 57$

$a_{20} = a_1 + 19d$

Откуда $2a_1 + 19d = 57$.

Так как за одну партию можно получить только 3 очка

то $d \le -3$ $\quad a_{20} \ge 0 \Rightarrow a_1 + 19d \ge 0 \Rightarrow a_1 + a_1 + 19d = 57 \Rightarrow a_1 \le 57$

но при этом $a_1 \ge 57$, так как $d \le -3$ $\quad 57 - 19d \ge 114$

$\left.\begin{matrix} a_1 \ge 57 \\ a_1 \le 57 \end{matrix}\right| \Rightarrow a_1 = 57$

$a_2 = 57 - 3 = 54$

Ответ: 54 очка.

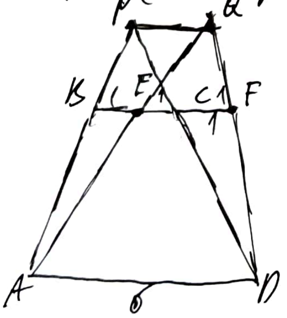
№2.

Допустим E и C расположены по разную сторону от AD.

$\rho(C;AD) = \rho(E;AD) = 8 \Rightarrow \rho(E;C) \ge 16$, но из условия

$\rho(E;C) = 1 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ E и C расположены по одну сторону от AD.

I. случай (E находится между B и C). Так как ~~$\rho(BE) = \rho(EK)$~~



(1) $\rho(BC;AD) = \rho(EF;AD)$ и BC и EF лежат по одну сторону от AD, то B, C, E, F лежат на одной прямой.

$\triangle BPE \sim \triangle APD$ (как треугольники образованные параллельными прямыми и общим углом)

$k = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$. $\begin{cases} h(APD) = h(BPC) + 8 \\ h(APD) = 3h(BPC) \end{cases}$ $\quad h(BPC) = 4$

$h(APD) = 12$. Аналогично для $\triangle AQD$ $h = 12$.

$\Rightarrow \rho(P;AD) = \rho(Q;AD) = 12 \Rightarrow PQ \parallel AD$. $AB : BP = 2:1$ (из подобия

(2) так как $\frac{BE}{AD} = \frac{1}{3}$) $\Rightarrow PQ = \frac{3}{2} \cdot BE = \frac{3}{2}$ $\quad (BE = BC - EC = 1)$

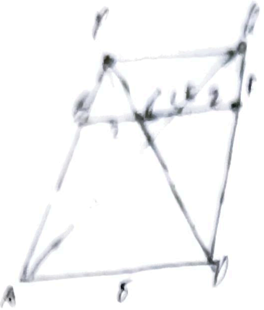
$APQD$ трапеция ($AD \parallel PQ$) $\Rightarrow S(APQD) = \frac{\left(\frac{3}{2} + 6\right)}{2} \cdot 12 = 45$.

(см. след. стр.)

ЧИСТОВИК.

П. (Р лежит между К и Е) аналогично пункту а) из I случая

$PQ \parallel AD$ и $\rho(P, AD) = \rho(Q, AD) = 12$



Также аналогично $AB : BP = ... : ...$ (из подобия)

$BE = BC + CE = 3$

$PQ = \frac{3}{2} BE = \frac{9}{2}$

$S(APQD) = \frac{\left(\frac{9}{2} + 6\right)}{2} \cdot 12 = 63$

Ответ: 45 ; 63

№3.

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2$$

$$\frac{1}{8}\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8) - \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) \le -2$$

$$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)\left(\frac{1}{8}\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) - \log_3 2\cdot\log_2 3\right) \le -2$$

$$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = t$$

$$t\left(\frac{1}{8}t - 1\right) \le -2$$

$$t^2 - 8t \le -16$$

$$(t-4)^2 \le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 4$$

$$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = 4$$

$g(x) = \log_2(x+3)$ $\quad$ $g(x)\uparrow\uparrow$ чтобы получить число > 0 $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{I.} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{II.} \end{array}\right.$

$f(x) = \log_3(x+8)$ $\quad$ $f(x)\uparrow\uparrow$

I: $\Rightarrow g(x)\cdot f(x) = 4$ (только одной точке при $f(x) > 0$, и $g(x) > 0$)

заметим, что $x = 1$ является решением $\log_2 4 \cdot \log_3 9 = 4$.

II: $g(x) < 0$ и $f(x) < 0$ $\quad$ $g(x)$ определена при $x > -3$,

$f(x) < 0$ при $x < -7$ $\Rightarrow$ противоречие.

Ответ: $x = 1$.

(ЧИСТОВИК)

№4. ЧИСТОВИК.

Рассмотрим числа от $3^3=27$ до $12^3-1=1727$. Рассмотрим $n\in[3;11]$

Найдём кол-во чисел от $(n+1)^3-1$, до n^3 $=(n+1)^3-n^3$;

Заметим, что эти числа при взятии $[\sqrt[3]{\ }]$ будут давать число n

$n^3 \vdots n$, $(n+1)^3-1 \vdots n$ $\left((n+1)^3-1=n(n^2+n+1)\right)$

Найдём кол-во чисел $\vdots n$, где $\forall n\in[3;11]$ $=\left[\frac{(n+1)^3-n^3}{n}\right]+1$

$$=\left[\frac{(n+1)^2+n(n+1)+n^2}{n}\right]+1=3n+4$$

Найдём кол-во всех чисел удовлетворяющих условию от $[27;1727]$:

$$\sum_{i=3}^{11} 3i+4=3(3+4\dots11)+4\cdot9=3\cdot\frac{(3+11)}{2}\cdot9+4\cdot9=25\cdot9$$

Найдём кол-во чисел от 1728 до 2025 удовлетворяющих условию.

$(2025<13^3)\Rightarrow[\sqrt[3]{\ }]$ от всех этих чисел $=12$

Найдём $\forall k\in N$, $\in[1728,2025] \mid k\vdots12$

кол-во $=\left[\frac{2025-1728}{12}\right]+1=25$.

Кол-во чисел от $[27;2025]$, удовлетворяющих условию $=25\cdot9+25=250$

Рассмотрим числа 25, 26. $[\sqrt[3]{25}]=[\sqrt[3]{26}]=2$

$25\not\vdots2$, $26\vdots2\Rightarrow+1$ число $\Rightarrow$ кол-во чисел $\in[25;2025]$, удовлетворяющих условию $=250+1=251$.

Ответ: 251.

№5.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\ge\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\ge\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{a}{2}-2\ge0$$

$$(*)\ \frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{a}{2}-4\ge0$$

$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{1}{t}>0\Rightarrow\frac{(x+y)^2}{xy}=t^2>0$$

(*): $t^2+\frac{a}{t}-\frac{a}{2}-4$ так как $t>0$ можем домножить на t

$$2t^3-8t+2a-at\ge0$$

$$2t(t^2-4)-a(t-2)\ge0$$

$$2t(t-2)(t+2)-a(t-2)\ge0$$

$$(t-2)(2t(t+2)-a)\ge0$$

(см. след. стр.)

Чистовик

$(t-2)(2t^2+4t-a)\geq 0$ выполнено $\forall t$

I. рассмотрим $t>2$

тогда $2t^2+4t>16$

для $t>2$ $2t^2+4t\geq a$, для $\forall t>0$

Отсюда $a\leq 16$

II. рассмотрим $t<2$

тогда $2t^2+4t<16$

для $t<2$ $2t^2+4t\leq a$

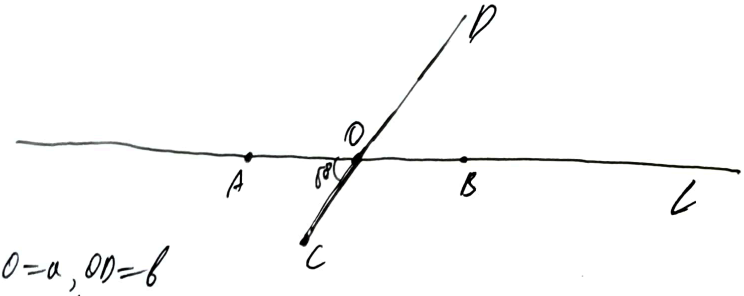
Отсюда $a\leq 16$

$\begin{cases} a\leq 16 \\ a\geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow a=16$

Ответ: $a=16$

(Чистовик)

№6.



$CO=a$, $OD=b$

$\begin{cases} a+b=m \\ \frac{a}{b}=k \end{cases}$

$b=m-a$

$\frac{a}{m-a}=k$

$a=mk-ak$

$a(k+1)=mk$

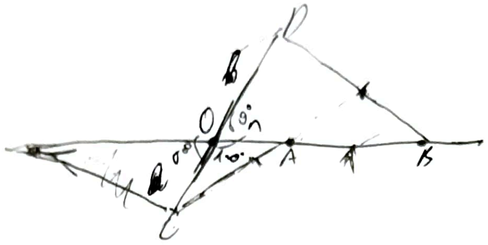
$a=\frac{mk}{k+1}$

$b=m-\frac{mk}{k+1}=\frac{m}{k+1}$

$CO=\frac{mk}{k+1}$; $OD=\frac{m}{k+1}$

Черновик

$$\begin{cases} a^2-b^2+b-1 \neq 0 \\ a^2-b^2+b-2 \neq 0 \end{cases}$$



$$b^2+(n+1)^2-b(n+1)=a^2+n^2+an$$

$$b^2+n^2+2n+1-bn-b=a^2+n^2+an$$

$$\cancel{b^2-a^2+1}\ a^2-b^2-1+b=2n-bn-an$$

$$a^2-b^2-1+b=n(2-b-a)$$

$$\frac{a^2-b^2\cancel{+(b+1)}}{2-b-a}$$

$$\frac{(a+b)(a-b)-b+1}{2-(b+a)}=\frac{a+b}{2-(a+b)}\ \frac{2(a+b)}{\cancel{2-(a+b)}}$$

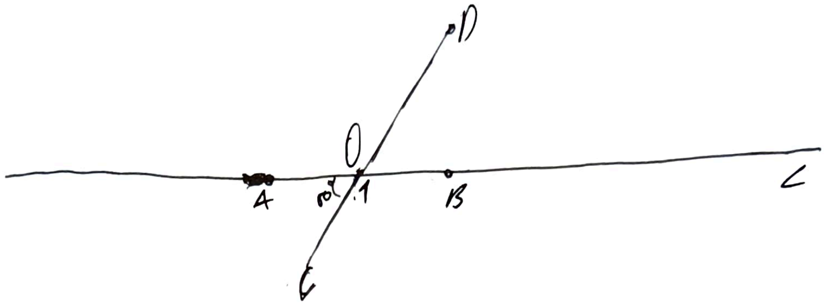
$$\left(\frac{2}{2-(a+b)}-1\right)\cdot a-b$$

$$\frac{2(a-b)}{2-(a+b)}-a+b\ \cancel{+(b+1)}+\frac{b-1}{2-(a+b)}$$

$$\frac{2a-2b+b-1}{2-(a+b)}-a+b$$

$$\frac{2a-b-1}{2-(a+b)}-a+b$$

№5. ЧЕРНОВИК.



$\frac{CO}{OD} = k$ $\quad CD = m$ $\quad \begin{cases} \frac{a}{b} = k \\ a+b = m \end{cases}$

$CO + OD = m$

$CO = m - OD$ $\quad b = m - a$

$\frac{m - OD}{OD} = k$ $\quad \frac{a}{m-a} = k$

$m - OD = kOD$ $\quad OD = \frac{m-k}{k}$ $\quad a = mk - ak$

$m = k(OD+1)$ $\quad a + ak = mk$

$OD = \frac{m}{k} - 1$ $\quad \frac{CO}{\frac{m}{k} - 1} = k$ $\quad a(k+1) = mk$

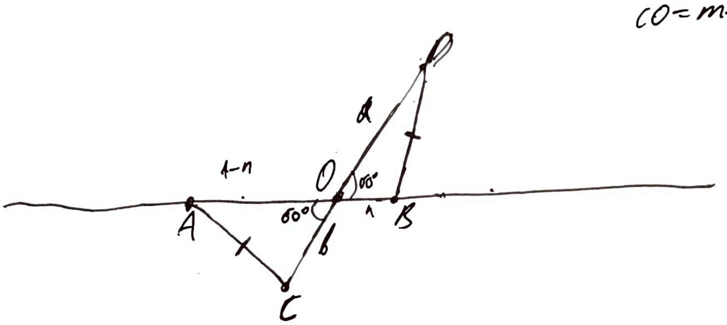
$a = \frac{mk}{k+1}$

$CO = m - k$ $\quad CD = m$

$CO = m - k$ $\quad b = m - \frac{mk}{k+1}$

$b = \frac{mk + m - mk}{k+1}$

$b = \frac{m}{k+1}$



$a^2 + n^2 - an = b^2 + (n-1)^2 - b(1-n)$ $\quad a = \frac{mk}{k+1}$

$a^2 + n^2 - an = b^2 + n^2 - 2n + 1 - b + bn$ $\quad b = \frac{m}{k+1}$

$a^2 - an = b^2 - 2n + 1 - b + bn$

$a^2 - b^2 - 1 + b = an - 2n + bn$ $\quad \begin{cases} a - 2 + b = 0 \\ a^2 - b^2 - 1 + b = 0 \end{cases}$

$a^2 - b^2 - 1 + b = n(a - 2 + b)$

$\frac{a^2 - b^2 + b - 1}{a - 2 + b} = n$ $\quad n \in [0; 1]$

$\begin{cases} \frac{a^2 - b^2 + b - 1}{a - 2 + b} \geq 0 \\ a^2 - b^2 + b - 1 \leq 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a^2 - b^2 + b - 1 \geq 0 \\ a^2 - b^2 + b - 2 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\frac{mk}{k+1}\right)^2 - \left(\frac{m}{k+1}\right)^2 + \frac{m}{k+1} - 1 \geq 0 \end{cases}$

$m^2k^2 - m^2 + m(k+1) - (k+1)^2 \geq 0$

$m^2k^2 - m^2 + mk + m - k^2 - 2k - 1 \geq 0$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЧЕРНОВИК.

[illegible] с $n=1$, до 11

$3n+4$

[illegible] n

$$\sum_{i=1}^{11} 3i+4 = 3(1+2+\dots+11)+4\cdot 9 = 3\cdot 7\cdot 9+4\cdot 9 = 9(21+4) = 9\cdot 25$$

[illegible] от 1728 до 2025 [illegible] на 12

$2025-1728=297$

[illegible] $= \left[\frac{297}{12}\right]+1=25$

~~Ответ: $9\cdot 25+25=250$~~

$9\cdot 25+25=250$

$+25 ⋮ 2$; $25 ⋮ 2$

Ответ: 251

№5.

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq \frac{a}{2}+2$$

$x+y=n>0$

$\sqrt{xy}=k>0$

$$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq \frac{a}{2}+2$$

$$\frac{n^2-2k^2}{k^2}+\frac{ak}{n}\geq \frac{a}{2}+2$$

$\frac{n}{k}=t>0$

$$\frac{n^2}{k^2}-2+\frac{ak}{n}\geq \frac{a}{2}+2$$

$$t^2-2+\frac{a}{t}\geq \frac{a}{2}+2$$

$t>0$

$$t^3-2t+a\geq \frac{at}{2}+2t$$

$$2t^3-4t+2a\geq at+4t$$

$$2t^3-8t+2a-at\geq 0$$

$$2t(t^2-4)+a(t-2)\geq 0$$

$$2t(t-2)(t+2)-a(t-2)\geq 0$$

$$(t-2)(2t(t+2)-a)\geq 0$$

$$(t-2)(2t^2+4t-a)\geq 0$$

при $t\geq 2$ $\quad 2t^2+4t-a\geq 0$

$$16-a\geq 0$$

$$a\leq 16$$

при $t\leq 2$

$$2t^2+4t-a\leq 0$$

$$16-a\leq 0$$

$$a\geq 16$$

$$\begin{cases} a\leq 16 \\ a\geq 16 \end{cases} \Rightarrow a=16$$

ЧЕРНОВИК.

$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2$

$\log_a b\cdot\log_c a = \log_c b$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$2\cdot\frac{1}{8}\log_2^2(x+3)\log_3^2(x+8) - \log_3(x+3)\log_2(x+8) \le -2$

$\log_2(x+3)\log_3(x+8)\left(\frac{1}{8}\log_2(x+3)\log_3(x+8) - \log_3 2\cdot\log_2 3\right) \le -2$

$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = t$

$t\left(\frac{1}{8}t - 1\right) \le -2$

$t(t-8) \le -16$

$t^2 - 8t + 16 \le 0$

$(t-4)^2 \le 0$

$\Downarrow$

$t = 4$

$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = 4$

$f(x) = \log_2(x+3)\cdot\log_2(x+8)$ $f(t)\uparrow\uparrow$

$\Rightarrow f(t) = 4$, возр. каж. $x = 1$ решение

Ответ: $x = 1$

N4.

$n = 1 \ldots 7 - 1$: все

$n = 8 \ldots 26 - 2$ … кол-во чисел $(n+1)^3 - n^3$

$n \ldots 27 \ldots 63 - 3$

$n \ldots 64 \ldots 124 - 4$

$n \ldots 125 \ldots 215 - 5$

$(n+1)^3 - n^3 = n^2 + n + 1$

$n(n+1)+1$

кол-во $< n^3$

$n^3 \vdots n$

$(n+1)^3 - 1 \vdots n$

$n+2$ чисел делится на n

$(n+1)^3 - n^3 = (n^2 + n(n+1) + (n+1)^2)$

$= n^2+n(n+1)+n^2+2n+1$

$n + n+1 + n+2 + 1$

$3n+4$ для $\forall n$

$\sum_{i=3}^{44} 3i+4 = 3(3+4\ldots 44) + 4\cdot 42$

$2025 = 45^2$

$\frac{(3+44)}{2}\cdot 42 = ?$

$S = 3\cdot 21\cdot 47 + 4\cdot 42 = 21(3\cdot 47 + 4\cdot 2) =$

$21\cdot(141+8) = 21\cdot 149$

ЧЕРНОВИК

№1.

1 0 2 3

1-0 2-3

2-0 1-3

1-2 3-0

19 раундов по 10 игр $19 \cdot 10 = 190$ игр

$S_0 = 190 \cdot 3 = 570$

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 570$

$a_{20} = a_1 + 19d$

$a_1 + a_{20} = 57$

$2a_1 + 19d = 57$

$d \geq 3$ $a_1 \geq 0 \Rightarrow a_1 = 0$ $d = 3$

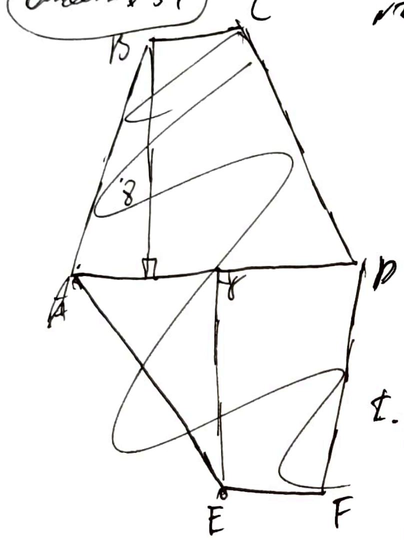
$a_{20} = 57$

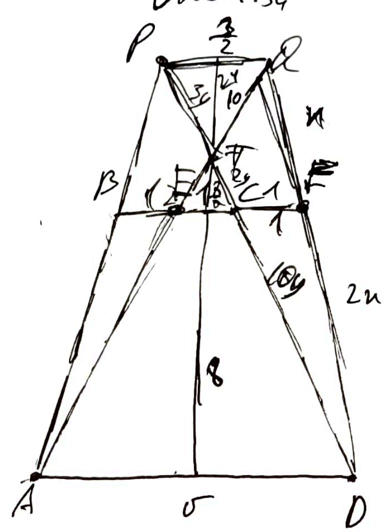
$a_{19} = 54$

Ответ: 54

Ответ: 54

№2.





1\. ~~h(ATD) = 6(R) ETC~~

$h(\Delta APD) = 3h(\Delta BPC)$

$h(\Delta APD) = 8 + h(BPC)$

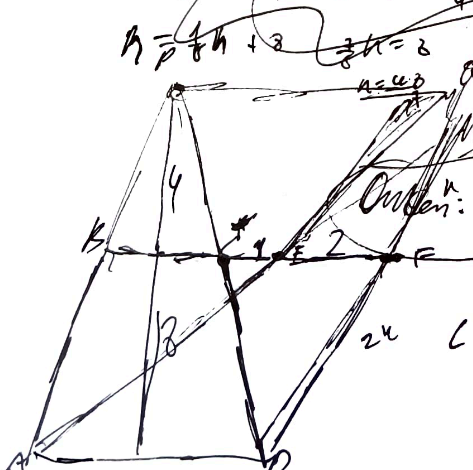
$8 + h(BPC) = 3h(BPC)$

$h(BPC) = 4$

аналогично $h(\Delta AQD)$

$\Delta PQR \sim \Delta ATD$ $k = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{2} + 6 + \frac{12}{5} = 12$



~~$h \cdot (\frac{3}{2} + 6) = 12 \cdot (\frac{15}{2}) = 90$~~

Ответ: 90

$S = \frac{(\frac{3}{2} + 6)}{2} \cdot 12 = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45$

$CF = EF + CE = 2 + 1 = 3$

~~PQ~~ $CF = \frac{2}{3} PQ$

$3 = \frac{2}{3} PQ$

$PQ = \frac{9}{2}$

$S = \frac{(\frac{9}{2} + 6)}{2} \cdot 12 = 63$