0 897312 900001

89-73-12-90
(150.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

11 класс

Вариант 1

Место проведения Ростов-на-Дону
город

Выход
12:57-
13:05

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гремякиной Веры Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

Чистовик

~~85 (восемьдесят пять)~~

95 (девяносто пять) Исправленному верить На основании рассмотрения апелляции

1) 20 команд ?очков набрала команда на II месте.

V = 3 очка

X = 0 очков

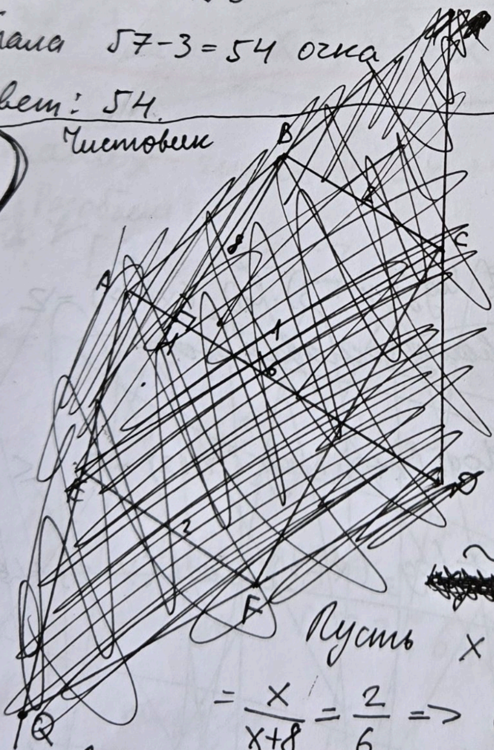
Заметим, что число очков каждой команды делится на 3, тогда рассмотрим первую команду. Пусть 20я команда набрала a_0 очков ($a_0 \vdots 3$), тогда у первой число очков $a_{19} = 19 \cdot d + a_0$. Заметим, что

$19 \cdot d + a_0 \vdots 3$, $a_0 \vdots 3 \Rightarrow 19 \cdot d \vdots 3 \Rightarrow d \vdots 3 \Rightarrow d = 3k$ ($k \geq 1$), но число очков команды с первого места не больше чем $19 \cdot 3 \Rightarrow$ 1я команда набрала $19 \cdot 3$ очка, так как $19 \cdot d + a_0 \geq 19 \cdot 3k$, $k \geq 1$ и $19 \cdot d + a_0 \leq 19 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 19d + a_0 = 19 \cdot 3 \Rightarrow a_0 = 0$, $d = 3 \Rightarrow$ команда на II месте набрала $57 - 3 = 54$ очка.

Ответ: 54.

2) Чистовик



т.к. $CE = 1$ и $BH = 8 \Rightarrow$ (·)B, (·)C, (·)E,F лежат в одной полуплоскости от AD и на одной прямой, которая $\parallel AD$. Далее в решении неважно в каком порядке (лежат эти точки) (B, E, C, F или F, B, E, C или B, F, C, E). $\triangle BPC \sim \triangle PAD$ (т.к. $BC \parallel AD$). Пусть x − длина высоты из P на BC $\Rightarrow$

$$\frac{x}{x+8} = \frac{2}{6} \Rightarrow 6x = 2x + 16 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4.$$

Ан-чно для $\triangle EQF$: $\frac{y}{y+8} = \frac{2}{6} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$ длина высоты из P на $AD = 4 + 8 = 12 \Rightarrow APQD$ − трап. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{APQD} = \frac{AD + PQ}{2} \cdot 12$$

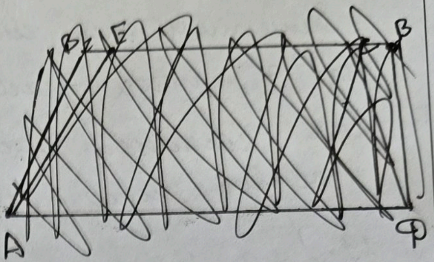
$$\triangle ABE \sim \triangle APQ \Rightarrow \frac{BE}{PQ} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{8}{12} \Rightarrow PQ = 1{,}5$$

Чистовик

$S_{APQD} = \frac{1,5+6}{2}\cdot 12 = 7,5\cdot 6 =>$

$=> 45$

Ответ: 45



Если точки были в порядке

B, C, E, F, то $\frac{3}{PQ} = \frac{8}{12} => PQ = 4,5 =>$

$=> S = \frac{4,5+6}{2}\cdot 13 = 63$

Ответ: 63

~~N3~~

$\cancel{2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2}$

~~Приведем к одинаковому основанию~~

$\cancel{\frac{2}{16}\log_2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)^2 - 8\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+2) + 2 \leq 0}$

$\cancel{\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)^2 - 8\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+2) + 16 \leq 0}$

$\cancel{\log_2^2(x+3) - 8}$

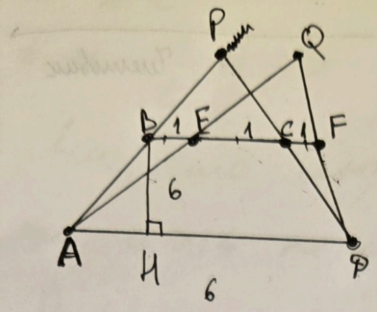
$\cancel{\frac{1}{2}\log_2^2(x+3)\cdot\log_3(x+8) \leq \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2}$

$\cancel{2\log_2^2(x+3)\cdot\log_3(x+8) - \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - \log_2 4 \leq 0}$

$\cancel{\log_2^2(x+3)^2\cdot\log_3(x+8) - \log_3(x+3)\cdot\log_2\left(\frac{x+8}{4}\right) \leq 0}$

~~Рисунок~~ к номеру 2 Чистовик

Чертёж



№4 Чистовик

Пусть $[\sqrt[3]{n}] = x \Rightarrow x \le \sqrt[3]{n} < x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 \le n < (x+1)^3$. Рассмотрим все числа от x^3 до $(x+1)^3$, которые $\vdots\, x$ $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

$x^3,\ x^3+x,\ x^3+2x,\ \ldots,\ x^3+x\cdot(3x+1)$

таких чисел $3x+2$

Разобьём $[25, 2025]$ на такие промежутки:

$[25, 27)$; $[27, 64)$; $[64, 125)$; $[125, 216)$; … $[11^3, 12^3)$, $[12^3, 2025]$

На 1м отрезке $[25, 27)$: $+1$

На отрезке $[27, 64)$: $+3\cdot3+2$

На отрезке $[64, 125)$: $+3\cdot4+2$

На отрезке $[125, 216)$: $+3\cdot5+2$

⋮

на отрезке $[11^3, 12^3)$: $+3\cdot11+2$

на отрезке $[12^3, 2025)$: $\left[\frac{2025-12^3}{12}\right]+1 = 25$

Чистовик

Итого: $1+3(3+4+\ldots+11)+2\cdot 9+25=233$

Ответ: 233

Чистовик

№5 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$

$x, y, a>0$

$y=kx$ – замена

$$\frac{1}{k}+k+\frac{a\sqrt{kx^2}}{kx+x}\geq\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{1}{k}+k+\frac{ax\sqrt{k}}{x(k+1)}\geq\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{1}{k}+k+\frac{a\sqrt{k}}{k+1}\geq\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{a}{k}+k-2\geq a\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{k}+k-2}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{k}}{k+1}}\geq a$$

Найдем минимум этой функции:

$$\frac{\frac{(k-1)^2}{k}}{\frac{(\sqrt{k}-1)^2}{2(k+1)}}=\text{замена } k=t^2,\text{ т.к. } x;y>0=$$

$$=\frac{(t^2-1)^2\cdot 2(t^2+1)}{t^2\cdot(t-1)^2}=\frac{(t+1)^2\cdot 2(t^2+1)}{t^2}=$$

$$=\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\cdot 2\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)=\text{Замена}$$

89-73-12-90 (150.1)

Чистовик

$t+\frac{1}{t}=m=\quad 2(m+2)\cdot m \geq 2\cdot 4\cdot 2$, т.к.

$m\geq 2$ (по неравенству о средних для t и $\frac{1}{t}$) $\Rightarrow a\leq 16$

Ясно, что любое $a\in(0,16]$ подходит тогда при $a>16$ не подходит.

Ответ: $a\in(0,16]$

Чистовик

N3 $2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)-\log_3(x+3)\log_2(x+8)+2\leq 0$

Приведем к одинаковым основаниям

$\frac{2}{16}\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)-\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)+2\leq 0$

$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)-8\cdot\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)+16\leq 0$

Выполним замену основания

$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)-8\cdot\left(\frac{\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)}{\underbrace{\log_2 3\cdot\log_3 2}_{=1}}\right)+16\leq 0$

Выполним замену

$p=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$

$p^2=(\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8))^2=\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)$

$p^2-8\cdot p+16\leq 0\Rightarrow(p-4)^2\leq 0\Rightarrow p=4\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_2(x+3)\log_3(x+8)=4$

$\log_2(x+3)$ с увеличением x возрастает и $f(x)=$

Чистовик

$= \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8)$

$\log_3(x+8)$ так же возрастает => функция монотонно растет => может пересечься с прямой $y = 4$ только 1 раз

Заметим, что при $x = 1$

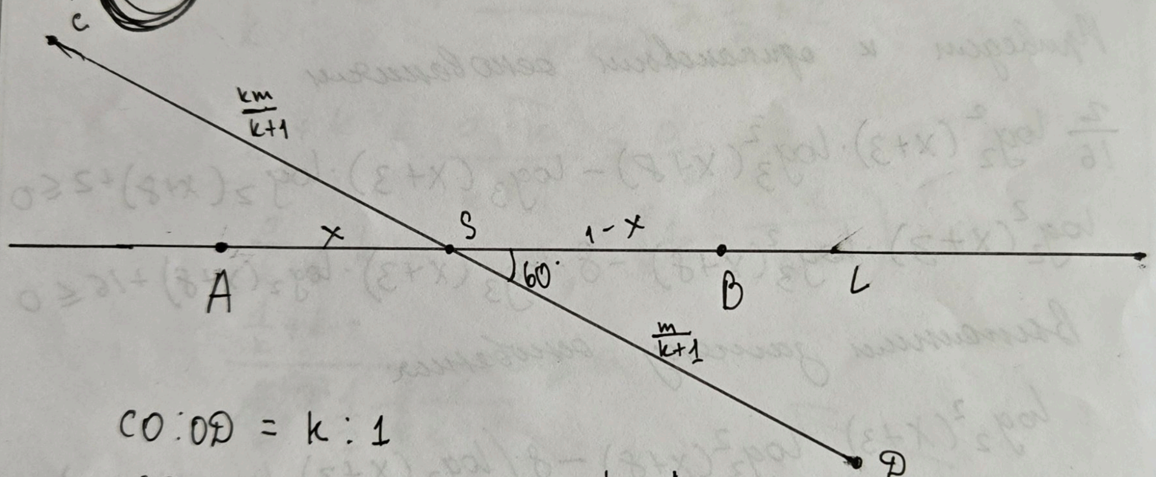
$\log_2 4 \cdot \log_3 9 = 4$

$2 \cdot 2 = 4$ это и есть единственное пересечение =>

=> $x = 1$ - это ответ.

Чистовик

№6



$CO : OD = k : 1$

$CD = m$ => $CO = m \cdot k : k+1$, $OD = m \cdot \frac{1}{k+1}$

Пусть $a(0)$, $b(1)$.

Хотим найти $S(x)$:

$AC = BD$, если BD проходит через S

$AC^2 = BD^2$ т. косинусов $\triangle ACS$ и $\triangle SBD$

(не влияет, если $x \notin AB$) => $x^2 + \frac{k^2 \cdot m^2}{(k+1)^2} - \frac{kmx}{k+1} =$

$= 1 - 2x + x^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{m(1-x)}{k+1}$

$\frac{m^2(k^2-1)}{(k+1)^2} + \frac{m}{k+1} - 1 = x\left(\frac{km}{k+1} - 2 + \frac{m}{k+1}\right)$

чистовик

Если [redacted] $\frac{km}{k+1} - 2 + \frac{m}{k+1}$ => [redacted] $\exists$ решения

$$\underbrace{\frac{km}{k+1} + \frac{m}{k+1} - 2 = 0}$$

Решим это:

$m = 2$ => ответ при $m \neq 2$.