+1 лист Гар

0 725169 830007

72-51-69-83
(137.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Тепляковой Марии Кирилловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

72-51-69-83 (137.1)

~~90 (девяносто)~~

Черновик

N 15 команд

Всего игр: $\frac{15\cdot 14}{2} = 15\cdot 7 = 70+35 = 105$ игр

$\frac{2a_1+14d}{2}$

Всего 210 очков $\Rightarrow S = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n = (a_1+7d)\cdot 15$

$= 15a_1 + 105d$

a_1 и d - не отрицат.

шаг 1 или 2 ...

Варианты: разница 1: $\Rightarrow S = \ldots +$

$\Rightarrow a_1 = 0 \quad d = 1$

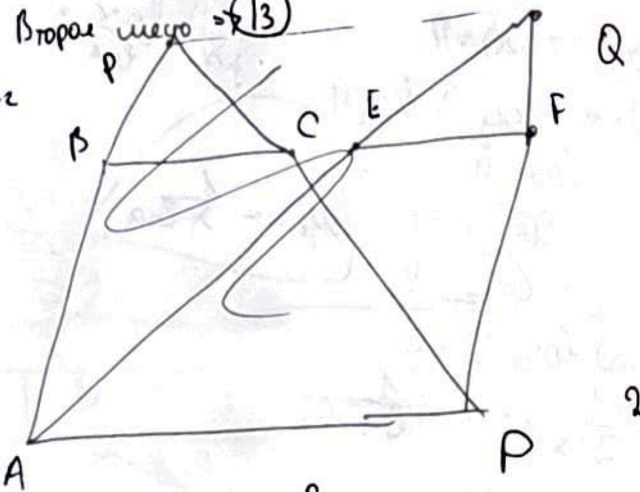
$\Rightarrow$ у первой 0 ... 45

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

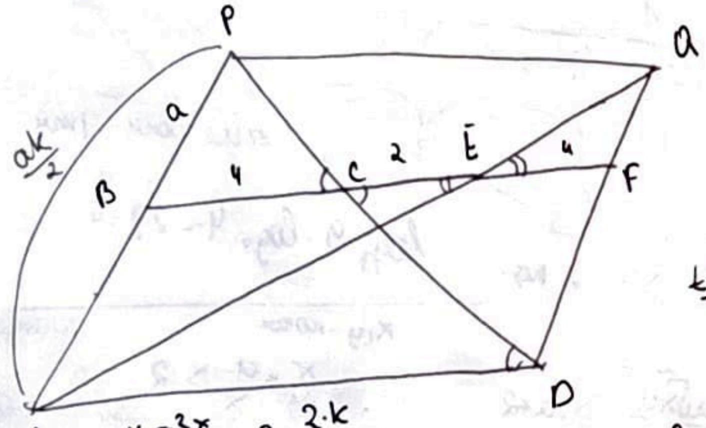
$14\cdot 7 + 7 = 7\cdot 15$

Второе место $\Rightarrow$ 13

№2



$24\cdot\frac{9+13}{2}$



$\frac{a}{4} = \frac{x}{2k}$

$x = \frac{a\cdot 2k}{4} =$

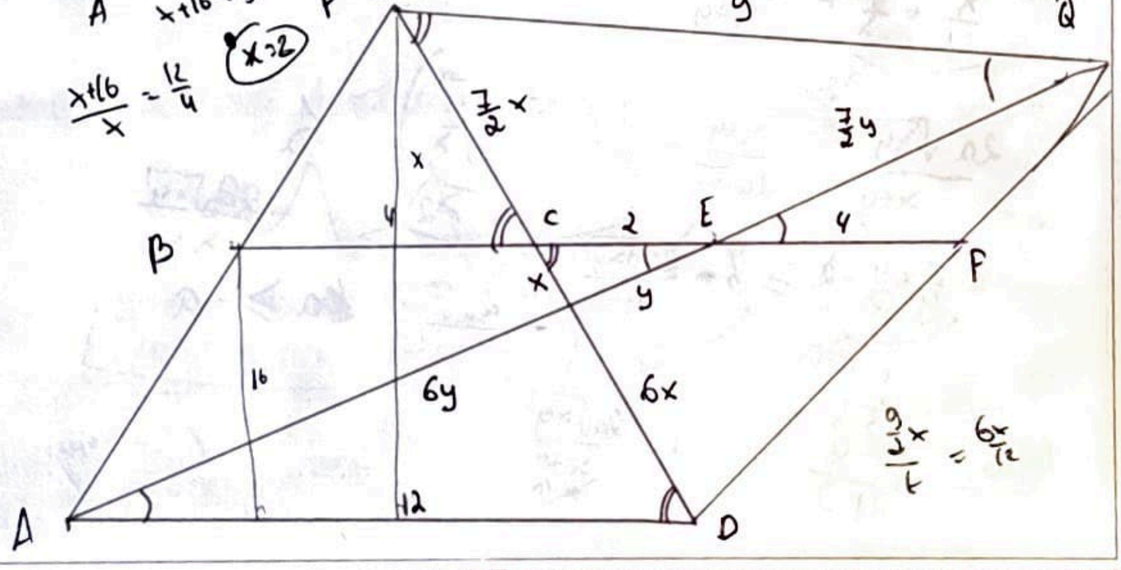
$\frac{t+7y}{t} = 3 \qquad 2t = 7y$

$t+7y = 3t \qquad t = \frac{7}{2}y$

$x+16 = 3x$

$\frac{x+16}{x} = \frac{12}{4}$

$x = 2$



$\frac{\frac{9}{2}x}{t} = \frac{6x}{12}$

Черновик

$\log_2^2(2-x)\cdot\log_3^2(7-x)+16\le 32\log_9(2-x)\cdot\log_4(7-x)$

$(\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x))^2+16\le 32\cdot\frac{1}{2}\log_3(2-x)\cdot\frac{1}{2}\log_2(7-x)$

$=8\cdot\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)$

Пусть $\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)=t$, то

$t^2+16\le 8t$

$t^2-8t+16\le 0 \Rightarrow (t-4)^2\le 0 \Rightarrow t=4$

$\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)=4$

$\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln x}{\ln a}$

$\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)=\log_3 9\cdot\log_2 4$

$\boxed{\log_a x=\frac{1}{x\ln a}}$

$\cancel{\frac{\log_3 2-x}{\log_3 9}=\frac{\log_2 4}{\log_2(7-x)}}$

$\cancel{\log_9 2-x=\log_{7-x}4}$

$f(x)=\log_3(7-x)\cdot\log_2(2-x)$

$f'=\frac{1}{7-x}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2-x}(-1)\cdot\frac{1}{\ln 3\cdot\ln 2}$

$=\frac{1}{(7-x)(2-x)\ln(3)\ln(2)}$

$-\quad 2\quad +\quad 7\quad -$

$\Rightarrow$ не более 1 кор

$\log_3 9\cdot\log_2 4=2\cdot 2=4$

$x=-2$ подх

---

x, y - полож

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$

$\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\ge 2}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\ge a+2$

$\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\qquad \frac{x+y}{2a\sqrt{xy}}=\frac{1}{2a}\underbrace{\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}_{\ge 2}\ge\frac{1}{a}$

$\ge -\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$

$\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}_{\ge 0}\ge \underbrace{a-\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}}_{\ge 0}$

$\boxed{-\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\ge -a}$

$\begin{array}{r}37\\+16\\\hline 53\end{array}\qquad \begin{array}{r}53\\\times 4\\\hline 212\end{array}$

$\underbrace{a-\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}}_{0/\wedge}$

72-51-69-83 (137.1)

Черновик

$\cancel{\frac{x^2+y^2}{xy}} + \cancel{\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}}$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} - 2 \geqslant a - \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\frac{x^2+y^2-2xy}{xy} \geqslant \frac{a(x-2\sqrt{xy}+y)}{x+y}$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant a\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}$$

$\cancel{(x-y)^2(x+y) \geqslant xy}$

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} \geqslant a\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} - \frac{a}{x+y}\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} < \frac{a}{x+y} < 0}$$

$$(x+y+2\sqrt{xy})(x+y) < axy$$

$$x^2+y^2+2xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy} < axy$$

$$x^2+y^2+2xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy} < 0 \quad |:xy$$

$$x^2+y^2+xy(2-a)+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy} < 0$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\geqslant 2} + 2-a + \underbrace{2\sqrt{\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{x}}}_{\geqslant 4}}_{\geqslant 8-a} < 0$$

есть корни

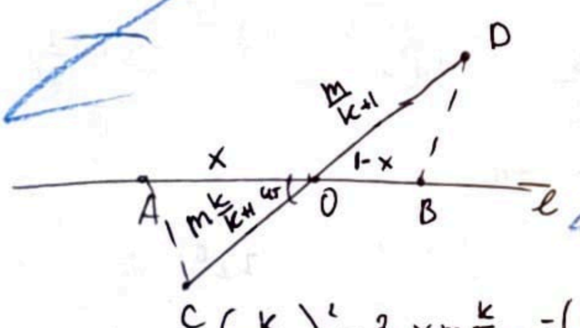
$\boxed{a-8 \text{ меньше}}$

$a > 8$

$x+kx=m$

$x(k+1)=m$

$x=\frac{m}{k+1}$



$$AC^2 = x^2+\left(m\frac{k}{k+1}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}xm\frac{k}{k+1} = (1-x)^2+\left(m\frac{1}{k+1}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{m}{k+1}\cdot(1-x)$$

$$x^2+m^2\frac{k^2}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{2}xmk}{k+1} = 1+x^2-2x+\frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{2}m}{k+1} + \frac{\sqrt{2}mx}{k+1}$$

$$m^2\left(\frac{k^2-1}{(k+1)^2}\right)+\frac{\sqrt{2}m}{k+1}(1-kx-x)+2x-1=0$$

$$m^2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)+\frac{\sqrt{2}m}{k+1}(1-x(k+1))+2x-1$$

$$m^2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)+m\left(\frac{\sqrt{2}}{k+1}-\sqrt{2}x\right)+2x-1=0$$

$$m^2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)+\frac{\sqrt{2}m}{k+1}-\sqrt{2}mx+2x-1=0$$

$D = \left(\frac{\sqrt{2}}{k+1} - \sqrt{2}x\right)^2 - 4(2x-1)\frac{k-1}{k+1}$

$= \frac{2}{(k+1)^2} + 2x^2 - \frac{4x}{k+1} - \frac{8x(k-1)}{k+1} + 4\frac{k-1}{k+1}$

2016 : 12 = 168

7

$\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x) = \log_2 4\cdot\log_3 9$

$\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4} = \frac{\log_3 9}{\log_2(7-x)}$

$\log_4(2-x) = \log_{(7-x)} 9$

2016 : 3

288

$21 \times 12 = 252$

42·210

288 : 12 = 24

1728 + 288 = 2016

$[\sqrt[3]{n}]$

$\boxed{n = b^3}$

$\sqrt[3]{49}$

$\boxed{\text{Кубы подходят}}$

7

$12 \times 12 = 144$

$144 \times 12 = 1728$

1727 − 1331 = 396

396 : 11 = 36

$169 \times 13 = 2197$

12 — максим

$4^3 = 64$

$36 \times 6 = 216$

$169 \times 13 = 2197$

2020

2016

$144 \times 12 = 1728$

$\underbrace{49 \ldots 63\ 64}_{[\sqrt[3]{n}]}$ = 4

$64 \times 8 = 512$

720 − 512 = 208

208 : 2 = 26

90 : 5 = 50мо = 18

$49 \times 7 = 343$

342 − 216 = 126

511 − 343 = 168

168 : 7 = 24

$81 \times 9 = 729$

728 − 512 = 216

216 : 8 = 27

21

21+19

270

$121 \times 11 = 1331$

2024 : 12

17.2.7

18+19+…

2022 : 12 = 168

72-51-69-83
(137.1)

Чистовик

Задача №1

Если каждая команда играла с каждой, значит было всего:

$\frac{15\cdot 14}{2} = 15\cdot 7 = 105$ игр

Найдем сколько игр ~~выиграла~~ выиграла каждая команда, если количество побед образуют арифметическую прогрессию.

Пусть наименьший член прогрессии будет a_1, а разность прогрессии d, тогда Сумма прогрессии будет.

$$S = 105 = \frac{2\cdot a_1 + d(15-1)}{2}\cdot 15 = (a_1+7d)15 = 15a_1 + 105d,$$

так как a_1 и d не могут быть отрицательными, а количе... ~~их~~ игры и ~~прогрессии~~ члены прогрессии не равны между собой, d может быть равен только 1, т.к. d-целое число, но $d \le 1$, т.к. $105d \le 105$. Значит $d = 1$, а $a_1 = 0$ тогда у ~~их~~ у игроков будут количество побед: $0; 1 \ldots ; 13; 14$.

Но если расположить их от 1 места к 15 будет:

$14; 13; 12 \ldots ; 1; 0$

Тогда на втором месте будет 13 побед, что приравнивается к 26 очкам

Ответ: 26

Задача №3

$$\log_2^2(2-x)\cdot\log_3^2(7-x) + 16 \le 32\cdot\log_9(2-x)\cdot\log_4(7-x)$$

$$\log_2^2(2-x)\cdot\log_3^2(7-x) + 16 \le 32\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)$$

$$(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x))^2 + 16$$

Пусть ~~log~~ $\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x) = t$, тогда

$$t^2 + 16 \le 8t \Rightarrow t^2 - 8t + 16 \le 0 \Rightarrow (t-4)^2 \le 0,$$

т.к. квадрат не отрицателен у нас только 1 корень

$$t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$$

Вернемся к исходной переменной

$$\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x) = 4 \Rightarrow \log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x) = \log_2 4\cdot\log_3 9$$

~~Рассмотрим функцию:~~

~~$y = \log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)$~~

$\left[\begin{array}{l} x \ne 1 \\ x \ne 6 \end{array}\right.$, иначе будет $0 = 4$, не может быть

~~$y' = \frac{1}{(2-x)\ln 2}\cdot(-1)\cdot\log_3(7-x) + \frac{1}{(7-x)\ln 3}\cdot(-1)\cdot\log_2(2-x)$~~

~~$= \frac{\log_3(7-x)}{(x-2)\ln 2} + \frac{\log_2(2-x)}{(x-7)\ln 3}$~~

~~Из ОДЗ логарифма~~

~~$\begin{cases} 2-x>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x<2}$ значит~~

$\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4} = \frac{\log_3 9}{\log_3(7-x)} \Rightarrow \log_4(2-x) = \log_{(7-x)} 9$

(так как убывает $2-x$ (показатель))

$f(x) = \log_4(2-x)$ - монотонно убывающая функция на промежутке $(-\infty; 2)$

(так как убывает $7-x$ (основание))

$g(x) = \log_{(7-x)} 9$ - монотонно возрастающая функция на промежутке $(-\infty; 6)\cup(6;7)$

$\Rightarrow$ У монотонно убывающей и монотонно возрастающей функции не более 1 пересечения $\Rightarrow$ Подберем 1 корень:

$x=-2 \Rightarrow \begin{cases} \log_4(2-(-2)) = 1 \\ \log_{(7-(-2))} 9 = 1 \end{cases}$

$x=-2$ единственный корень

Ответ: -2

Задача №5

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geqslant a+2$

$\frac{x^2+y^2}{xy} - 2 \geqslant a - \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$

$\frac{x^2-2xy+y^2}{xy} \geqslant \frac{a(x-2\sqrt{xy}+y)}{x+y}$

$\frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant \frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}$

$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} \geqslant \frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy}-\frac{a}{x+y}\right)\geq 0$$

Так как нам нужно найти все a, при которых есть пары положительных $(x;y)$ не удовлетворяющих условию, тогда у нас всегда $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$, значит у нас могут быть неудовлетворяющи x и y, если $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy}-\frac{a}{x+y}<0$ будут корни

~~Реши~~ Найдем все a:

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy}-\frac{a}{x+y}<0 \Rightarrow \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy}-\frac{a}{x+y}<0$$

$$\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy}<\frac{a}{x+y} \quad |\cdot xy(x+y)$$, $x;y$; положительные $\Rightarrow x+y$ - положительное число

$$(x+y+2\sqrt{xy})(x+y)<axy$$

$$x^2+y^2+2xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy}-axy<0 \quad |:xy\neq 0$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2+2\sqrt{\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{x}}-a<0$$

т.к. $\frac{x}{y};\frac{y}{x}$ - обратн числа, $x;y>0$, значит

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

Аналогично $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\geq 2$, что

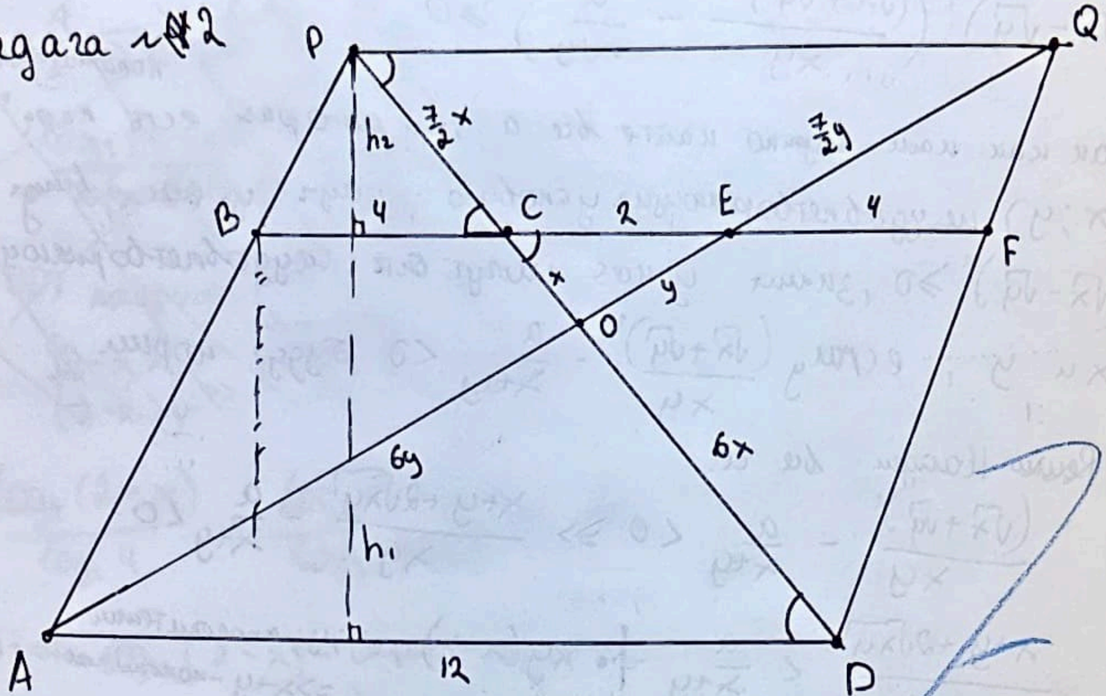
$$\underbrace{\underbrace{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}_{\geq 2}+2+\underbrace{2\underbrace{\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}_{\geq 2}}_{\geq 4}}_{\geq 8}<a$$

Значит если $a\leq 8$ корней не будет ~~...~~ тогда чтобы были корни $a>8$, то есть

$a\in(8;+\infty)$

Ответ: $a\in(8;+\infty)$

Задача №2



$S_{APQD} = ?$

Решение

1) $BC \parallel AD$ $\rho(BC;AD)=16$
$EF \parallel AD$ $\rho(EF;AD)=16$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $B;C;E;F$ лежат на одной прямой и эта прямая $\parallel AD$,
~~прямая~~ (BC и EF не могут лежать по разные стороны от AD, т.к. ~~т.к.~~ $CE=2$. А если бы они лежали по разные стороны, тогда $\rho(C;E) \geq 2\cdot 16 \Rightarrow \rho(C;E) \geq 32$, но этого не может быть по условию)

2) $BF \parallel AD$; CD - секущая, значит $\angle ECO = \angle ODA$
$\angle COE = \angle AOD$ (вертикальные) $\Rightarrow$ по 2 углам $\Delta OCE \sim \Delta ODA$

~~Которые~~ Если $OC = x$, тогда из подобия следует:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{CE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow OD = 6OC = 6x$$

Если $OE = y$, тогда из подобия след.

$$\frac{OE}{OA} = \frac{CE}{AD} = \frac{1}{6} \Rightarrow OA = 6OE = 6y$$

3) Рассмотрим ΔBPC и ΔAPD: $\angle APD$-общий; $\angle ADP = \angle BCP$ ($BC \parallel AD$)
$\Rightarrow$ по 2 углам $\Delta BPC \sim \Delta APD$
Из подобия следует

$$\frac{BC}{AD} = \frac{PC}{PD} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{PC}{PC+7x} \Rightarrow PC + 7x = 3PC \Rightarrow \boxed{PC = \frac{7}{2}x}$$

4) Рассмотрим $\triangle EQF$ и $\triangle AQD$:

$\angle AQD$ - общий $\angle QAD = \angle QEF$ ($EF \parallel AD$) $\Rightarrow$ $\triangle EQF \sim \triangle AQD$ по 2 углам

Из подобия следует:

$\frac{EF}{AD} = \frac{EQ}{AQ} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{EQ}{EQ+7y} \Rightarrow EQ + 7y = 3EQ \Rightarrow \boxed{EQ = \frac{7}{2}y}$

5) Рассмотрим $\triangle OCE$ и $\triangle OPQ$:

$OC = x$
$OP = x + \frac{7}{2}x = \frac{9}{2}x$
$OE = y$
$OQ = y + \frac{7}{2}y = \frac{9}{2}y$

$\Rightarrow \frac{OC}{OP} = \frac{x}{\frac{9}{2}x} = \frac{2}{9}$, $\frac{OE}{OQ} = \frac{y}{\frac{9}{2}y} = \frac{2}{9}$ $\Rightarrow \frac{OC}{OP} = \frac{OE}{OQ}$ -

признак подобных треугольников, значит $\triangle OCE \sim \triangle OPE$,

значит $\frac{CE}{PQ} = \frac{OC}{OP} = \frac{x}{\frac{9}{2}x} \Rightarrow PQ = CE \cdot \frac{9}{2} = 9$

Кроме того из подобия следует, что $\angle QPO = \angle ECO$, также $\angle ECO = \angle COA$ (см. пункт 2), значит $\angle QPO = \angle ODA \Rightarrow PQ \parallel AD$

$\Rightarrow$ APQD-трапеция с основаниями PQ и AD

6) Найдем высоту трапеции, для этого рассмотрим $\triangle BPC$ и $\triangle APD$, они подобны (см. пункт 3) $\Rightarrow$ пусть $h_{BPC} = h_2$, тогда $h_{APD} = h_1$

$h_1 - h_2 = \rho(AD; BC) = 16$, также $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AD}{BC} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow h_1 = 3h_2$

$\Rightarrow \begin{cases} h_1 - h_2 = 16 \\ h_1 = 3h_2 \end{cases} \Rightarrow 2h_2 = 16 \Rightarrow h_2 = 8$
$\Rightarrow \boxed{h_1 = 24}$ - высота трапеции ($\rho(P; AD)$)

7) $S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot h_1 = \frac{9+12}{2} \cdot 24 = 21 \cdot 12 = 252$

Ответ: 252

~~Задача №4~~

~~Рассмотрим число a, оно расположено между b^3 и c^3, тогда~~ ~~Тогда b и c близлежащие кубы~~

~~$b^3 < a < c^3$, тогда~~ ~~$b^3 < a < c^3$~~

~~b^3 и c^3, т.е. есть $b = c - 1$, тогда~~

Задача №4

Рассмотрим число a, оно расположено между числа b^3 и c^3, причем b^3 и c^3 - ближайшие к a кубы. $b=c-1$.

$b^3 < a < c^3$, тогда $b < \sqrt[3]{a} < c$, знач

$[b]=b$

$[c]=c$

Тогда $[\sqrt[3]{a}] < c$, но также $b=c-1$, знач $\boxed{[\sqrt[3]{a}]=b}$

Значит $[\sqrt[3]{n}]$ для любого числа n из нужного промежутка это $\sqrt[3]{b}$, где b^3 - наибольший куб, меньший n

Нам нужно найти все числа n из отрезка $[49; 2025]$

Найдем все кубы лежащие на этом промежутке:

$3^3=27<49 \Rightarrow$ не подходит

$4^3=64$ - принадлежит.

⋮

$12^3=1728$ - принадлежит

$13^3=2197>2025 \Rightarrow$ не принадлежит

Значит на нашем отрезке расположены кубы от 4 до 12

То есть для всех чисел ~~х~~ $[49; 64)$ $[\sqrt[3]{n}]=3$

~~Рассмотрим~~ ~~все числа~~ Найдем все числа, принадлежащие множеству A из каждого промежутка.

1) $[49; 64)$ $[\sqrt[3]{n}]=3$

Чисел $\vdots 3$ у нас 51; 54; 57; 60; 63 - 5 чисел

2) $[64; 125)$ $[\sqrt[3]{n}]=4$

Чисел $\vdots 4$ у нас 64; 68 ... 124

Всего их: $\frac{124-64}{4}+1=16$ ← $\boxed{\text{считаем, как кол-во членов арифметической прогрессии}}$

3) $[\sqrt[3]{n}]=5 \Rightarrow$ ~~6^3~~ $=[125; 6^3)=[125; 216)$

Чисел $\vdots 5$ у нас 125; 130 .. 215

Всего их: $\frac{215-125}{5}+1=19$

4) $[\sqrt[3]{n}] = 6 \Rightarrow [216; 7^3) = [216; 343)$

Чисел :6 у нас: 216; 222 .. 342

Всего их: $\frac{342-216}{6} + 1 = 22$

5) $[\sqrt[3]{n}] = 7 \Rightarrow [343; 8^3) = [343; 512)$

Чисел :7 у нас: 343; 350 .. 511

Всего их: $\frac{511-343}{7} + 1 = 25$

6) $[\sqrt[3]{n}] = 8 \Rightarrow [512; 9^3) = [512; 729)$

Чисел :8 у нас: 512; 520 .. ; 720; 728

Всего их: $\frac{728-512}{8} + 1 = 28$

7) $[\sqrt[3]{n}] = 9 \Rightarrow [729; 1000)$

Чисел :9 у нас 729; 738 .. 999

Всего их: $\frac{999-729}{9} + 1 = 31$

8) $[\sqrt[3]{n}] = 10 \Rightarrow [1000; 11^3) = [1000; 1331)$

Чисел :10 у нас 1000; 1010 .. 1330

Всего их: $\frac{1330-1000}{10} + 1 = 34$

9) $[\sqrt[3]{n}] = 11 \Rightarrow [1331; 1728)$

Чисел :11 у нас 1331; 1342 .. 1727

Всего их: $\frac{1727-1331}{11} + 1 = 37$

10) $[\sqrt[3]{n}] = 12 \Rightarrow$ Но рассматриваем на оставшемся про межутке: $[1728; 2025]$

Чисел :12 у нас 1728; 1740 .. 2016

Всего их: $\frac{2016-1728}{12} + 1 = 25$

Тогда всего у нас чисел: $5+16+19+22+25$

$+28+31+34+37+25 = 30 + (16+19+22+25+28+31+34+37)$

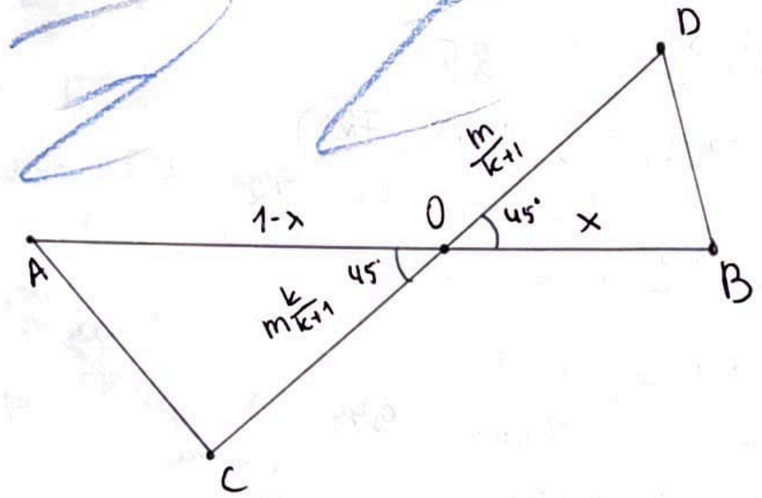
арифметическая прогрессия

$S = \frac{(16+37)}{2} \cdot 8 = 212$

Значит всего чисел, принадлежащих множеству A на промежутке [49; 2025] $30+212=242$

Ответ: 242

Задача №6



Пусть $OB = x$, тогда $AO = AB - OB = 1 - x$

Также: $\begin{cases} CO + OD = m \\ \frac{CO}{OD} = k \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} CO &= m\frac{k}{k+1} \\ OD &= \frac{m}{k+1} \end{aligned}}$

Если $AC = BD$, значит выразим их через теорему косинусов для треугольников ΔAOC и ΔODB:

$$AC = \sqrt{(1-x)^2 + \left(m\frac{k}{k+1}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1-x)\cdot m\frac{k}{k+1}} = BD =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{m}{k+1}\right)^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}x\left(\frac{m}{k+1}\right)}$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 + \left(m\frac{k}{k+1}\right)^2 - \sqrt{2}(1-x)\cdot m\frac{k}{k+1} = x^2 + \left(\frac{m}{k+1}\right)^2 - \sqrt{2}x\frac{m}{k+1}$$

$$1 - 2x + x^2 + \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} - \cancel{\sqrt{2}\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}mk}{k+1} + \frac{\sqrt{2}mkx}{k+1} = x^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{\sqrt{2}mx}{k+1}$$

$$\frac{m^2k^2}{(k+1)^2} + 1 - 2x - \frac{\sqrt{2}mk}{k+1} + \frac{\sqrt{2}mkx}{k+1} - \frac{m^2}{(k+1)^2} + \frac{\sqrt{2}mx}{k+1} = 0$$

72-51-69-83
(137.1)

Пара m и k должны быть такими, что

⁎ существует ~~несколько~~ $x \in [0;1]$

Для этого выразим x:

⁎ $$x\left(\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}+\frac{\sqrt{2}m}{k+1}-2\right)=\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}+\frac{m^2}{(k+1)^2}-\frac{m^2k^2}{(k+1)^2}-1$$

$$\Leftrightarrow\quad x\,\frac{\sqrt{2}m(k+1)-2(k+1)}{k+1}=\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}-1+\frac{m^2(1-k^2)}{(k+1)^2}$$

$$x(\sqrt{2}m-2)=\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}-1+\frac{m^2(1-k)(k+1)}{(k+1)^2}$$

$$x(\sqrt{2}m-2)=\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}-1+\frac{m^2(1-k)}{k+1}$$

$$x(\sqrt{2}m-2)=\frac{\sqrt{2}mk+m^2-m^2k-(k+1)}{k+1}$$

$$\cancel{x=\frac{mk(\sqrt{2}-m)+m^2-(k+1)}{(k+1)(\sqrt{2}m-2)}=\frac{mk}{k+k}+\frac{m^2}{(k+1)(\sqrt{2}m-2)}-\frac{1}{\sqrt{2}m-2}}$$

~~Пусть $k>1$, т.к. ... не выше $\frac{CO}{OD}$ ... x поменяется на $1-x$.~~

~~$\frac{OD}{CO}$ ... т.к. ...~~

$$x=\frac{(m-\sqrt{2})(m(1-k)+\sqrt{2})-(k-1)}{\sqrt{2}(k+1)(m-\sqrt{2})}=\frac{m(1-k)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(k+1)}-\frac{k-1}{\sqrt{2}(k+1)(m-\sqrt{2})}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{m(1-k)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(k+1)}-\dfrac{k-1}{\sqrt{2}(k+1)(m-\sqrt{2})}\leq 1\\[2mm]\dfrac{m(1-k)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(k+1)}-\dfrac{k-1}{\sqrt{2}(k+1)(m-\sqrt{2})}\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}mk+m^2-m^2k-(k+1)\leq(k+1)(\sqrt{2}m-2)\\(m(1-k)+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})\geq k-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{2}mk+m^2-m^2k-k-1\leq\sqrt{2}mk-2k+\sqrt{2}m-2\\(m-mk+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})\geq k-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m^2k-k-1+2k-\sqrt{2}m+2\leq 0\\m^2-m\sqrt{2}-m^2k+\sqrt{2}mk+m\sqrt{2}-2\geq\\-k+1\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - m^2k + k + 1 - \sqrt{2}m \le 0 \\ m^2 - m^2k + \sqrt{2}mk - k - 1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 - m^2k + \sqrt{2}mk - k - 1 \ge m^2 - m^2k + k + 1 - \sqrt{2}m$$

$$0 \ge 2k + 2 - \sqrt{2}m - \sqrt{2}mk$$

$$0 \ge 2(k+1) - \sqrt{2}m(1+k)$$

$$0 \ge (k+1)(\sqrt{2} - m)$$

$$\cancel{k \ge -1}\ k > 0 \Rightarrow \boxed{m \le \sqrt{2}}$$

Значит если $\boxed{m \le \sqrt{2}}$, пусть подстава $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 2 - 2k + k + 1 - 2 \le 0 \\ 2 - 2k + 2k - k - 1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k + 1 \le 0 \\ k \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge 1 \\ k \le 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

Значит ~~что~~, чтобы мы могли передвинуть

Надо чтобы или $k=1$, а m – любое число, или

$\cancel{m \le \sqrt{2}}$ $m \in [0; \sqrt{2}]$

Черновик

$-\sqrt{2}\cancel{\sqrt{2}}x \cdot$

$+\sqrt{2}x\left(\sqrt{2}-\frac{mk}{k+1}\right)$

$$x\left(\frac{\sqrt{2}m}{k+1}+\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}-2\right)=\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}+\frac{m^2}{(k+1)^2}-1-\frac{m^2k^2}{(k+1)^2}$$

$\cancel{\frac{mk}{k+1}\left(\sqrt{2}-\frac{mk}{k+1}\right)}$

$$x\frac{\sqrt{2}m(k+1)}{k+1}-2$$

$$\frac{m^2(1-k^2)}{(k+1)^2}=\frac{m^2(1-k)(k+1)}{(k+1)^2}=\frac{m^2(1-k)}{k+1}$$

$$x(\sqrt{2}m-2)=$$

$$+\frac{\sqrt{2}mk}{k+1}-1=\frac{m^2-km^2+\sqrt{2}mk}{k+1}-1$$

$$=$$

$$x=\frac{\frac{m^2-km^2+\sqrt{2}mk}{k+1}-1}{\sqrt{2}m-2}$$

$$=\frac{m^2+mk(\sqrt{2}-m)-k-1}{(k+1)\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{m^2+mk(\sqrt{2}-m)-(k+1)}{(k+1)\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{m^2}{(k+1)\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}-\frac{mk}{\sqrt{2}(k+1)}-\frac{1}{\sqrt{2}(m-\sqrt{2})}$$

$$\sqrt{2}mk+m^2-m^2k-(k+1)$$

$$\cancel{m^2(1-k)+m\sqrt{2}k-(k+1)}$$

$$-mk(m-\sqrt{2})+m^2k-1$$

$$\sqrt{2}mk+m^2-2m^2-m^2k-k-1$$

$\sqrt{2}mk + m^2 - m^2k - k - 1$

$\sqrt{2}mk - m^2k - k + m^2 - 2 + 1$

$mk(\sqrt{2} - m) - (k-1) + (m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})$

$(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2} - mk) - (k-1)$

$(m-\sqrt{2})(m(1-k) + \sqrt{2})) - k - 1)$

$t + \frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t} =$ $\frac{1}{2}+$