вых 13.18
вх 13.22

0 950826 000008

95-08-26-00
(151.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Санкт-Петербург
город

Сдано 14.04

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Пищева Михаила Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

ПищМ

Чистовик, стр. 1

80 (восемьдесят)

Задача №1

Т.к. по условию, Маша испекла 13 пирожков с пятью разными начинками, значит, ~~что~~ с любой начинкой есть хотя бы один пирожок. Пирожков с картошкой 4, с капустой минимум 1, с яблоком минимум 5 (т.к. если с, то пирожков с картошкой 7, противоречие), с малиной ~~хотя~~ минимум 1 и с клубникой минимум 1, итого, мы точно знаем с какой начинкой 12 (4+1+5+1+1) пирожков, а ~~13~~ тринадцатый может быть с любой ~~нач~~ начинкой, кроме картошки, т.к. иначе пирожков с картошкой 5, но по условию их 4 => противоречие.

Рассмотрим все возможные варианты:

13 пирожок с капустой: выручка = $60\cdot4+70\cdot2+80\cdot5+90\cdot1+100\cdot1=970$ руб.

13 пирожок с яблоком: выручка = $60\cdot4+\cancel{70\cdot2}\ 70\cdot1+80\cdot6+90\cdot1+100\cdot1=980$ руб.

13 пирожок с малиной: выручка = $60\cdot4+70\cdot1+80\cdot5+90\cdot2+100\cdot1=990$ руб.

13 пирожок с клубникой: выручка = $60\cdot4+70\cdot1+80\cdot5+90\cdot1+\cancel{100\cdot1}\ 100\cdot2=1000$ руб.

$1000>990>980>970$ => наиб. возможная сумма с продажи всех пирожков = 1000, наим. = 970

Ответ: наиб. 1000, наим. 970

Чистовик, стр. 2

Задача 2

Предположим, след. замечательный год имеет вид $\overline{20ab}$, т.е. начинается с 20, а заканчивается $\overline{ab}$ (очевидно, что a может быть $= b$; a, b - цифры и $\overline{ab} > 25$). Тогда $\overline{20ab} = 2000 + 10a + b$, а делится это на $20 + \overline{ab} = 20 + 10a + b$, $\Rightarrow 2000 + 10a + b \,\vdots\, (20 + 10a + b)$, $\Rightarrow$ $2000 + 10a + b - (20 + 10a + b) \,\vdots\, (20 + 10a + b)$ (т.к. и число из которого вычитают, и число которое вычитают $\vdots\, (20 + 10a + b)$, то и разность $\vdots\, (20 + 10a + b)$). $2000 + 10a + b - (20 + 10a + b) = 1980$, $\Rightarrow$ $1980 \,\vdots\, (20 + 10a + b)$, $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, значит при разложении на простые множители $20 + 10a + b$, ~~все простые множителями~~ каждый простой множитель должен совпадать с каким-то из простых множителей, полученных при разложении на простые множители числа 1980 и должны быть в степени $\leq$ совпадающему простому множителю. Тогда начнем рассматривать такие $(20 + 10a + b)$, что $20 + 10a + b \geq 45$ и будем раскладывать их на простые множители: $46 = 2 \cdot 23$; $47 = 47$ (простое); $48 = \cancel{2 \cdot 2 \cdot 2}\ 2^4 \cdot 3$; $49 = \cancel{7 \cdot 7}\ 7^2$; $50 = 2 \cdot 5^2$; $51 = 3 \cdot 17$; $52 = 2^2 \cdot \cancel{2} \cdot 13$; $53 = 53$ (простое); $54 = 2 \cdot 3^3$; $55 = 5 \cdot 11$. 55 - первое подходящее число ≥ 45, $\Rightarrow$ $20 + 10a + b$ минимально $= 55$, $\Rightarrow a = 3$; $b = 5$ ($20 + 10a + b = 55 \Rightarrow 10a + b = 35$, если $a >$ или < 3, то независимо от b, $10a + b >$ или < 35, $\Rightarrow a = 3$, $\Rightarrow 30 + b = 35 \Rightarrow b = 5$), $\Rightarrow$ след замечательный год это 2035

1980	2
990	2
495	5
99	3
33	3
11	11
1	

Ответ: 2035

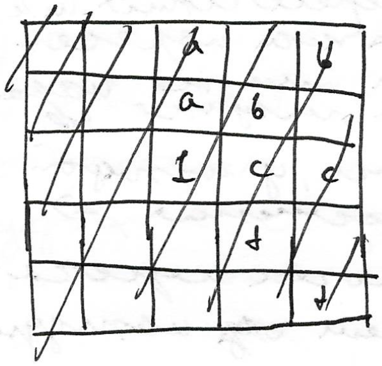
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

95-08-26-00
(151.2)

Чистовик, стр.3

Задача 5

Предположим, что в центре доски 5×5 стоит единица, тогда:



a	e	e	e	b
h	a	j	b	f
h	i	1	i	f
h	d	j	c	f
d	g	g	g	c

Тогда заметим, что если во всех клеточках с одинаковой буквой стоят единицы, то можно выбрать 3 единицы, идущие подряд по горизонтали, вертикали или диагонали, т.к. для a, b, c, d, можно будет выбрать диагональ, где 2 одинаковые буквы и 1, ~~для~~ e, g, прямо идут подряд по горизонтали; h, f, прямо идут подряд по вертикали; для i, можно будет выбрать горизонталь, где идет i, 1, i; для j, можно будет выбрать вертикаль, где идет j, 1, j. => среди клеточек с буквами a, ..., клеток с буквами b, ..., клеток с буквами j, есть хотя бы один 0, а т.к. ~~какие~~ клетки с разн. буквами не пересекаются, а всего разн. букв 10, в таблице не ~~макс~~ макс. 15 единиц. Предположим, что в центре доски 5×5 стоит ноль, тогда:

h	h	h	e	f
g	g	g	e	f
a	b	0	e	f
a	b	c	c	c
a	b	d	d	d

~~Заметим, Т.к. заде~~ стоят ~~подряд по горизонтали или вертикали,~~ ~~среди~~ Т.к. одинаковые буквы стоят подряд по горизонтали или вертикали, среди любых 3 одинаковых букв хотя бы один ноль, т.к. троек одинаковых букв 8, единиц максимум 16 (25-8-1 ноль в центре), пример на 16:

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

Т.к. если в центре 1, единиц ~~больше~~ не может быть >15, если 0, то единиц не может быть >16, а это ~~за единицами~~ все возможные случаи, то всего единиц в таблице не >16, т.к. есть пример на 16, на доске максимум может быть 16 единиц.

Ответ: 16

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик, стр. 4

Задача 4

Заметим, что любая точка стоит на пересечение ровно двух прямых на рисунке отмечены все возможные пересечения т.к. у любых 2 прямых только 1 точка пересечения если они не совпадают или не паралельны, а никакие 2 прямые на рисунке не совпадают и не паралельны, у каждой прямой из 4 по 3 точки пересечения, => всего у 4 прямых $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ точек пересечения, ~~т.к.~~ :2, т.к. мы считаем ~~од~~ каждую точку по 2 раза, как раз 6 точек у нас и отмечено. И так, будем брать одну из 4 прямых и в произвольном порядке на ней отмечать буквы A, B и C, они все лежат на одной прямой и через каждую из них проходит вторая прямая, причем у каждой из точек A, B и C она разная, это очевидно, обозначим прямую на которой лежит A, B и C за 1; вторую прямую, проходящую через A за 2; 2 через B за 3; 2 через C за 4. Если сделать такое обозначение на изначальной расстановке, то на прямых 2 и 3 общая точка - F, т.е. точка F лежит на пересечение 2 и 3 прямых и находится на каждой из них, => ~~на~~ в нашем случае, точка F также обязательно лежит на пересечение 2 и 3 прямых, иначе она лежит только на одной из 2 и 3 прямых. Аналогично для точки D, которая должна лежать ~~между 3 и 4~~ на пересечение 3 и 4 прямых и точки E, которая должна лежать на ~~точке~~ пересечении 2 и 4 прямых. Получившиеся расстановка подходит под условие задачи, т.к. на 1 прямой лежит точки ABC, на 2, точки AEF, на 3, точки BDF, на 4, точки CDE, не обязательно ~~в~~ в том же порядке и на той же самой прямой прямой.

Чистовик, стр. 5

Задача 4 (продолжение)

Помещая, расставляя буквы A, B и C на какой-то из прямых в произвольном порядке, мы автоматически можем расставить буквы D, E, F единственным возможным образом так, чтобы итоговый случай удовлетворял условиям, получается всего случаев, это кол-во возможных расстановок букв A, B и C на какую-то прямую в произвольном порядке, т.к. каждый из этих случаев уникален, как минимум, из-за разности расстановок букв A, B и C, а в любом другом случае, буквы A, B и C не лежат на одной прямой, что противоречит условиям => это единственные возможные случаи расстановок букв, удовлетворяющие условиям. ~~таких случаев~~ Количество разных расстановок букв A, B и C = 6, т.к. расставляя буквы на одной прямой, поставить первую букву ~~3~~ ~~на~~ можно на 3 свободных места, вторую букву можно на 2 свободных места и 3 букву на 1 свободное место, итого 3·2·1 = 6 вариантов, а прямых на которых можно расставить буквы 4 => всего расстановок 6·4 = 24, => других способов расставить те же буквы по условиям задачи от исходного 24−1=23

Ответ: 23

~~Задача 6~~ Чистовик, стр. 6

Задача 6

рассмотрим ~~размах~~ РАЗНОСТЬ между наими из двух чисел из набора чисел $(y_1, \dots, y_{2025})$; где $n > k$:

$y_n = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$; $y_k = \frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k}$, $y_n - y_k = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} -$

$- \frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k} = k(x_1+x_2+\dots+x_n) - n(x_1+x_2+\dots+x_k) =$

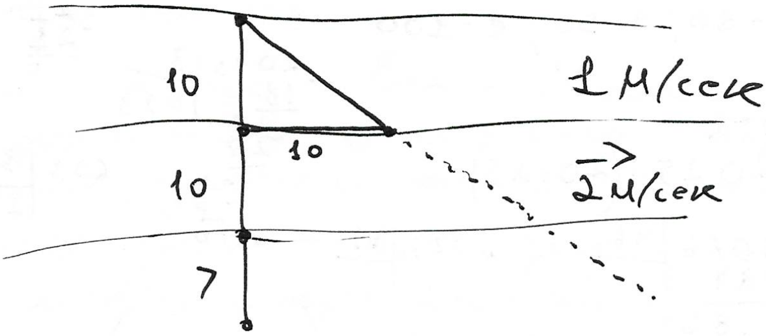
$= (k-n)(x_1+x_2+\dots+x_k) + k(x_{k+1}+\dots+x_n)$, наиб и n и k:

$n = 1013$ и $k = 1012$, это очевидно, $\Rightarrow$ размах наиб $=$

$-1(x_1+\dots+x_k) + k(x_{k+1}+\dots+x_n)$, наиб размах будет, если $x_1+\dots+x_k = a$; $x_{k+1}+\dots+x_n = a+1$),

~~тогда $-1(\cancel{1} \cdot 1012a) + 1013($~~

ЧЕРНОВИК



1,7 м/с

$\cancel{\frac{7}{17} = \frac{70}{17} = 70 - 68 \mid 17 \quad 20 \quad 17}$

$\overline{20ab}$

$2000 + 10a + b \ \vdots\ (20 + 10a + b)$

$1980 \ \vdots\ (20 + 10a + b)$

1980

$$\begin{array}{r|l} 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 5 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

~~40+b~~

45 46 или >

$46 = 23 \cdot 2$

$47 =$

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$49 = 7 \cdot 7$

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

$51 =$

$52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$

$53 =$

$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$55 = 11 \cdot 5$

h	h	h	e	f
g	g	g	e	f
a	b	c	e	f
a	b	c	c	c
a	b	d	d	d

$$\begin{array}{r|l} 2035 & 55 \\ -165 & 37 \\ \hline 385 & \\ -385 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Черновик

№1

a - 60 ; b - 70 ; c - 80 ; d - 90 ; e - 100

4a
5c
b
d
2e
13

4a
6c
b
d
e
13

№2

2025 : (20+25)

$2026 \mid 46$
-184
186
-184
2

$2027 \mid 47$

$231 \mid 3$
$-21 \quad 77$
21
-21
0

$2079 \mid 3$
$-18 \quad 693$
27
-27
09
-9
0

$693 \mid 3$
231

1000a + 100b + c : (100 + 10b + c)

2000 + 10a + b : (20 + 10a + b)

1980 : (20 + 10a + b)

2100 + 10a + b : (21 + 10a + b)

2079 : (21 + 10a + b)

$2079 \mid 3$
$693 \mid 3$
$231 \mid 3$
$77 \mid 7$
$11 \mid 11$
0

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 : (21 + 10a + b)$

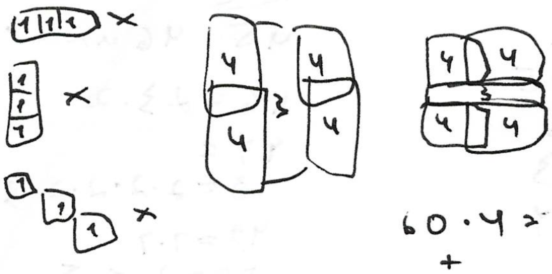
11011
11011
00000
11011
11011

11011
1 1 1
01 10
1 1 1
11011

№3

$2100 \mid 21$

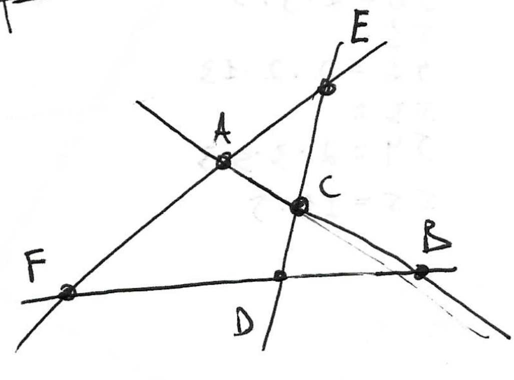
2	6	6	6	3
5	2	3	3	7
5	10	$\boxed{1}$	10	7
5	1	5	4	7
1	8	8	8	4



60 · 4 = 240
+ +
70 · 2 = 140
+ +
80 · 5 = 400
+ +
90 · 1 = 90
+ +
100 · 1 = 100
" "
970

№4

ABC
EDC
FDB
AEF



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!