0 618968 790002

61-89-68-79
(140.2)

шифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мацкевича Даниила Ильича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

ДЕШИФР

61-89-68-79
(140.2)

95 (девяносто пять)

~~Ма~~ – Белый

ЧЕРНОВИК

2026 | 46
184 | 44
186
184
2

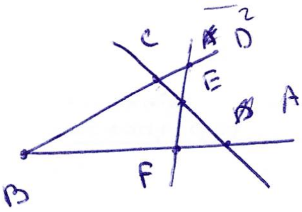
2027 | 47

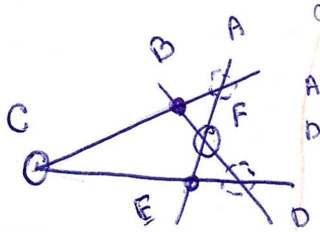
2030 : 50

$\boxed{2040 : 60}$

2040

2035 : 55





6·4

2028 48

AB
DE

2028 | 16 | 126
16
42
32
108
96
12

2035 | 55 | 37
165
385
385
0

2031 | 17 | 11
17
33
17
161

54 = 3³·2

2032 : 52

2032 | 13 | 156
13
73
65
82
77

2029 | 7 | 289
14
62
56
69
63

2034 : 54

2033 | 53 | 38...
159
444
424
20

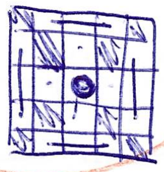
2034 | 54 | 37
162
414

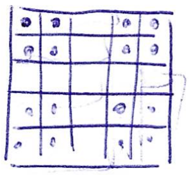
$\frac{3+2+2}{3} = 2\frac{1}{3}$

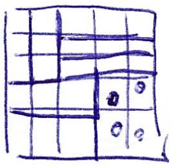
$\frac{2+1+1}{3} = 1\frac{1}{3}$

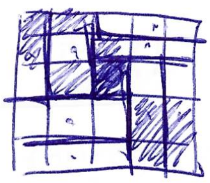
$\boxed{\le 9}$ $\boxed{\le 18}$

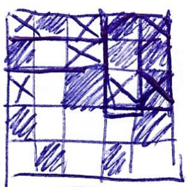
$\le 8 \cdot 2 + 1 = \boxed{\le 17}$

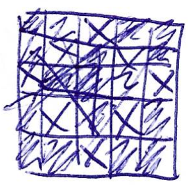












y_i – min

$y_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i}{i}$

$x_{i+1} > y_i$

$x_{i+1} \le y_{i+1}$

y_j – max.

$y_j = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_j}{j}$

$y_i = \frac{y_i + y_i + y_i + \ldots + x_{i+1} + \ldots + x_j}{j}$

$\frac{x_1 \cdot i - x_1 \cdot j}{ij} = \frac{x_1 (i - j)}{ij}$

$\frac{x_1}{j} - \frac{x_1}{i} + \frac{x_2}{j} - \frac{x_2}{i} + \ldots +$

$y_j - y_i \vee$

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_j}{j} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_i}{i}$

$\boxed{y_j \le \frac{y_i \cdot i + j - i}{j}} \quad y \le y_{i+1} - \frac{y}{j}$

ЧИСТОВИК

№6

Пусть $\min = y_i$ (среди y)

$\max = y_j$

Тогда: $y_i = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_i}{i}$; $y_j = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_j}{j}$

~~Заметим, что $x_1+x_2+x_3+\ldots+$~~ Рассмотрим случая $i>j$, $i<j$ (если $i=j$ то размах $=0$) min=max

I сл. $i \le j$.

$x_1+x_2+\ldots+x_i = y_i \cdot i$

$y_j = \frac{\overbrace{y_i+y_i+\ldots+y_i}^{i \text{ раз}} + x_{i+1}+\ldots+x_j}{j}$, (*) Заметим, что любой $y \ge \min(x_1;x_2;\ldots;x_{2025})$ т.к. y - ср. ар. подмножества и так же $y \le \max(x_1;x_2;\ldots x_{2025})$ по той же причине.

$x_{i+1} \le y_i+1$

$x_{i+2} \le y_i+1$

...

$x_j \le y_i+1$

$y_j \le \frac{\overbrace{y_i+y_i\ldots+y_i}^{i \text{ раз}} + \underbrace{y_i+1+y_i+1\ldots+y_i+1}_{j-i \text{ раз}}}{j}$

$y_j \le \frac{y_i \cdot j + j - i}{j}$

$\boxed{y_j \le y_i + 1 - \frac{i}{j}}$

Значит $y_j - y_i \le 1 - \frac{i}{j}$ => размах $\le 1 - \frac{i}{j}$; $\frac{i}{j} \ge \frac{1}{2025}$ => $\boxed{\text{размах} \le \frac{2024}{2025}}$

II сл. $i > j$

~~$y_j=$~~ $x_1+x_2+\ldots+x_j = y_j \cdot j$

$y_i = \frac{\overbrace{y_j+y_j+\ldots+y_j}^{j \text{ раз}} + x_{j+1}+x_{j+2}+\ldots+x_i}{i}$

По * $x_{j+1} \ge y_j-1$

$x_{j+2} \ge y_j-1$

...

$x_i \ge y_j-1$

$y_i \ge \frac{\overbrace{y_j+y_j+\ldots+y_j}^{j \text{ раз}} + \overbrace{y_j-1+y_j-1+\ldots+y_j-1}^{i-j \text{ раз}}}{i}$

$y_i \ge \frac{y_j \cdot i + j - i}{i}$

$y_i \ge y_j - 1 + \frac{j}{i}$

$y_i - y_j \ge -1 + \frac{j}{i}$ (умн. на -1 знак м. ном)

$\boxed{y_j - y_i \le 1 - \frac{j}{i}}$ размах $\le 1 - (\ge \frac{1}{2025})$

размах $\le \frac{2024}{2025}$

Во всех случаях доказали, что размах $\le \frac{2024}{2025}$, а вот пример на $\frac{2024}{2025}$:

$x_1 = 1$

$x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = x_{2025} = 2$.

$y_1 = 1$

$y_2 = \frac{2+1}{2} = 1{,}5$

$y_3 = \frac{2+2+1}{3} = 1\frac{2}{3}$

...

$y_{2025} = \frac{2 \cdot 2024 + 1}{2025} = \frac{2 \cdot (2025-1)+1}{2025} = \frac{2 \cdot 2025 - 1}{2025} = 2 - \frac{1}{2025} = 1\frac{2024}{2025}$.

Размах $= 1\frac{2024}{2025} - 1 = \frac{2024}{2025}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{2024}{2025}}$

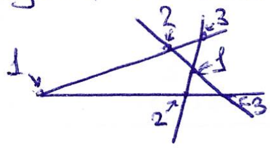
ЧИСТОВИК

№4

Заметим, что для каждой т.1 есть только 1 т.2 такая, что т.1 и т.2 ~~которой она~~ не лежат на 1 прямой. Тогда все т. делятся на пары:

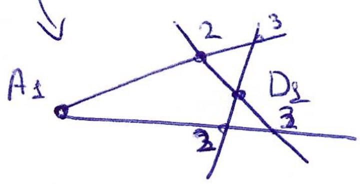
A – D
B – E
C – F

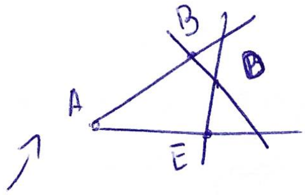
Тогда, если мы куда-то ставим точку, то ее пара определяется единственным образом, т.к. точки на рисунке тоже становятся в пары:



Тогда кол-во способов поставить 1 пару 6: 3 варианта выбрать пару т. на чертеже, и внутри пары поменять местами: т.е. $3 \cdot 2 = 6$.

Допустим, мы поставили A – D





Тогда у нас еще 4 (2·2) способа, куда поставить 2 пару. Пока условие соблюдается, потому что ~~если точки лежат~~ 2 точки, лежащие на ~~1ой~~ разных прямых не могут лежать на 1ой по построению.

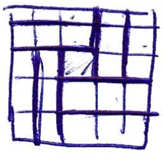
И оставшуюся пару у нас есть только 1 вариант как поставить, иначе получатся прямые X-Y-a и X-Y-b, но через X и Y можно провести только 1 прямую (на исх. чертеже).

Значит всего способов $6 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.

№3. (■ – „1“, □ – „0“)

Разобьём доску 5×5 на прям. 3×1 и 1×3:

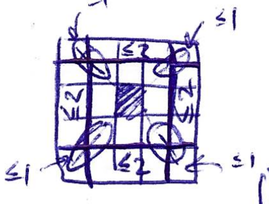


У нас остался 1 кв, который никуда не попал.

В каждом пр. 3×1 и 1×3 по усл. ≤2 „1“ => всего „1“ $\le 8 \cdot 2 + 1 = 17$.

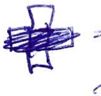
Докажем от противного, что 17 невозможно: если получилось 17, то в центре обязательно „1“.

Тогда нарисуем новую расстановку:



Но в

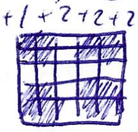
, иначе:



-> (!!) (противоречие)

Тогда всего $\le \overbrace{1+1+1+1}^{4}+\overbrace{2+2+2+2}^{8}+\overbrace{1+1+1}^{15}=15$, $15<17$ (!!).

Значит ≤16. И вот пример:



Ответ: 16

ЧЕРНОВИК

№2

2026 | 46
−184 | 44
186
−184
2
2026 $\not\vdots$ 46

2027 | 47
−188 | 43
147
−141
6
2027 $\not\vdots$ 47

2028 | 48
−192 | 42
108
−96
12
2028 $\not\vdots$ 48

2029 | 49
−196 | 41
69
−49
20
2029 $\not\vdots$ 49

2030 | 50
−200 | 40,6
−300
300
0
2030 $\not\vdots$ 50

2031 | 51
−153 | 39
501
−459
42
2031 $\not\vdots$ 51

2032 | 52
−156 | 39
472
−468
4
2032 $\not\vdots$ 52

2033 | 53
−159 | 38
443
−424
19
2033 $\not\vdots$ 53

2034 | 54
−162 | 37
414
−378
36
2034 $\not\vdots$ 54

2035 | 55
165 | 37
385
385
0
~~2035 $\vdots$ 55~~

$\boxed{2035 \vdots 55}$

Ответ: 2035.

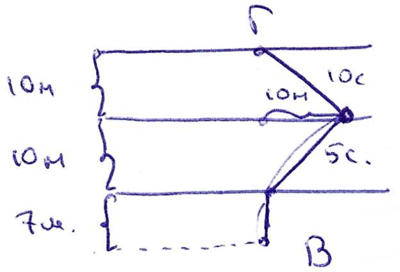
№1

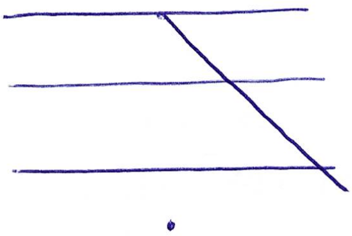
С картошкой – 4, яблочных больше чем с картошкой => яблочных ≥ 5.
Если брать без пир. с картошкой, то осталось 9 пир. и ≥ 5 ябл.
Значит есть 5 ябл., а остальные 4 могут быть любого типа
(в том числе и яблочными). Значит $min = 60 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + \underbrace{70 \cdot 4}_{\text{мин. цен. ост.}}$

$max = 60 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + \underbrace{100 \cdot 4}_{\text{макс. цен. ост. 4}}$

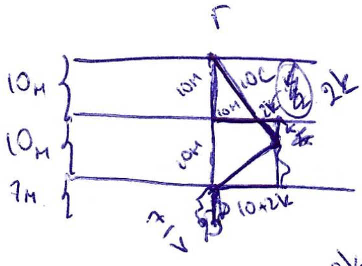
$min = 240 + 400 + 280 = 920$р.
$max = 240 + 400 + 400 = 1040$р.
Ответ: $min = 920$р.
$max = 1040$р.

ЧЕРНОВИК





$\frac{20}{11}$ м.

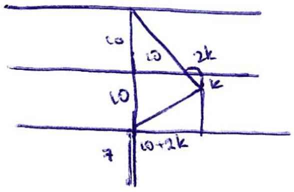


$10с + k$

$\frac{7}{v} + 5 + \cancel{k} = 10 + \cancel{k}$

$\frac{10-2k}{\cancel{4}}\ 2$

2,2.



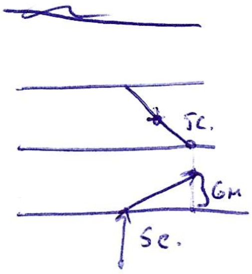
$\frac{7}{v} + 5 + \cancel{k} = 10 + \cancel{k}$

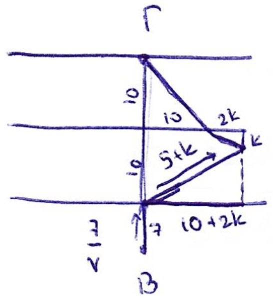
$v = 1,2$

$\frac{7}{v} = 5$

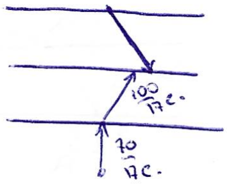
$v = 1,2$

$\frac{4}{2,2} = \frac{4}{\frac{22}{10}} = \frac{40}{22} = \frac{20}{11}$

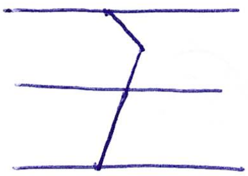




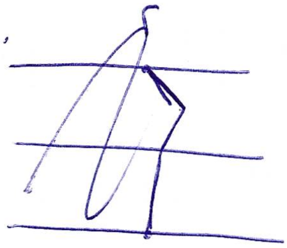
$\frac{7}{v} + 5 + \cancel{k} = 10 + \cancel{k}$



$\frac{7}{1,7} = \frac{7}{\frac{17}{10}} = \frac{70}{17с.}$



$\frac{20}{11} + \frac{20}{11} \cdot 1,2 = \frac{40}{11} \cdot \frac{22}{10} = 4м.$

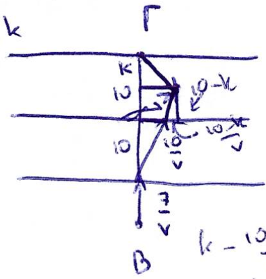


$\frac{10}{1,7} = \frac{100}{17с.}$

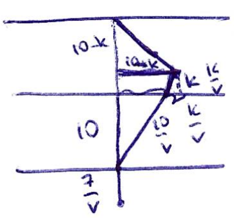
$24 - k = vk$

$\frac{vk - k + 24}{2v} = k$

$\frac{vk + k - 10}{2v} + \frac{14}{2v} + \frac{20-2k}{2v} = k$



$\frac{10-k}{v}$



$\frac{7}{v} + \frac{10}{v} + \frac{k}{v} = 10 - k$

$17 + k = 10k - vk$

$17 + k - 10k + vk = 0$

$k(1 - 10 + v) = -17$

$k = -\frac{17}{v-9}$

$k = 10$

$k - \frac{10-k}{v} = \frac{vk + k - 10}{v}$

$\frac{17}{v} + \frac{10-k}{v} = k$

$\frac{27-k}{v} = k$

$27 - k = vk$

$$\begin{cases} 24 - k = vk \\ \frac{7}{v} + \frac{10}{v} + \frac{10-k}{v} = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} vk + k - 24 = 0 \\ 27 - k = vk \end{cases}$$

$v = 1,7 \frac{м}{с}$

$v = 26$

$k = \frac{27}{v+1}$

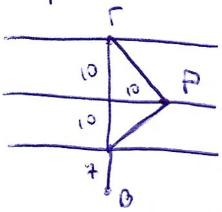
$k(v+1) = 27 \quad vk + k = 27$

ЧИСТОВИК

№5.

Рассмотрим 3 случая: встреча выше середины, на середине и ниже середины.

I сл. на середине:

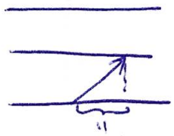


$t_г = 10c \cdot \cancel{t\frac{10м}{10}} \left(\frac{10м}{3\frac{м}{c}}\right)$

$t_в$

$\frac{7}{v} + \frac{10}{v} = 10 \quad \frac{17}{v} = 10 \quad v = 1{,}7$

НО:

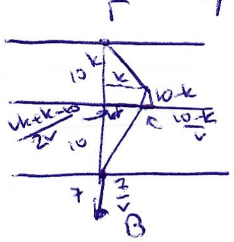


$2 \cdot \frac{10}{1{,}7}$, т.к. $\frac{10}{1{,}7}$ – $t_{прохода}$

2 – $V_{потока}$

НО $2 \cdot \frac{10}{1{,}7} \neq 10$. W

II сл. выше середины:



$t_в = \frac{7}{v} + \frac{vk+k-10}{\underbrace{7^v}_{1}} + \frac{10-k}{v} = t_г = k$

С др. стор. $\underline{vk+k=24}$

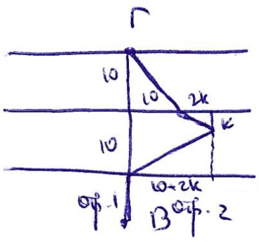
$t_в \; \frac{7}{v} + \frac{10}{v} + \frac{10-k}{v} = k$

Т.е.:

$\begin{cases} vk+k=24 \\ \frac{27-k}{v}=k \end{cases} \quad \begin{cases} vk+k=24 \\ 27-k=vk \end{cases} \quad \begin{cases} vk+k=24 \\ vk+k=27 \end{cases} \quad 24=27$ W.

Значит такое невозможно.

III сл. ниже середин.



$t_в = \underbrace{\frac{7}{v}}_{оф. 1} + \underbrace{5+k}_{оф. 2} = t_г = 10+k.$

$\frac{7}{v} = 5;\ v = \frac{7}{5} = 1{,}4.$

$\boxed{V=1{,}4}$

Тогда: $t_в$ $\frac{7}{v} + \frac{10-k}{v} = 10+k$

$5 + \frac{10-k}{1{,}4} = 10-k$

$7 + 10 - k = 14 + 1{,}4k$

$\frac{24}{10}k = 3$

$k = 3 \cdot \frac{10}{24_8}$

$k = \frac{5}{4} = 1{,}25.$ **Ответ: 1,25м.**