84-62-85-57
(136.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ивановой Любови Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход $11^{57}-12^{02}$

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

90 (Девяносто)

84-62-85-57 (136.1)

Черновик.

№1 Дано: ~~$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}$~~

12 команд

$12^2 = 144$. $144 \cdot 3 = 300 + 120 + 12 =$
$= 432$. очков. всего.

1) $12 \cdot 10 = 120$ - было игр.

2) $120 \cdot 3 = 300 + 60 = 360$ (очков.) - всего.

$a_1, a_2, \dots a_n$

$3, a_2 \dots 360$.

$12 + 3 = 15$.

$3 + d = 360$. $d = \frac{360}{3} =$
$= 12$

№3 Черновик

$2\log_4^2(3-x) \cdot \log_9^2(8-x) \le \log_3(3-x) \cdot \log_2(8-x) - 2$.

ОГР:
$3-x \ne 0$
$3 \ne x$
$8-x \ne 0$
$8 \ne x$

$2\log_9^2(3-x) \le \log_3(3-x)\log_2(8-x) - 2$.

$2\log_9^2(3-x) - \log_3(3-x)\log_2(8-x) + 2 \le 0$.

$2\log_{3^2}^2(3-x) - \log_3(3-x)\log_2(8-x) + 2 \le 0$.

степ. уходит 2

$2\log_3^2(3-x)^2 - \log_3(3-x)\log_2(8-x) + 2 \le 0$.

$\log_3(3-x)^2 = t$.

$2t^2 - t\log_2(8-x) + 2 \le 0$.

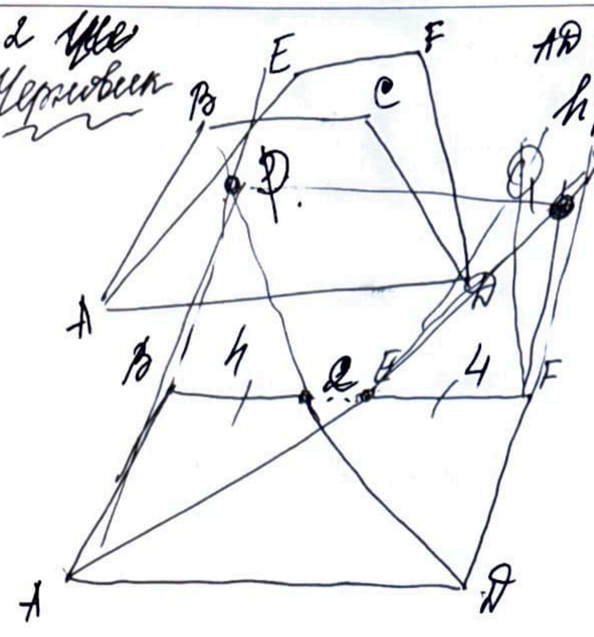
N5 Черновик $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2 \cdot 0\sqrt{xy}}{x+y} \ge 0 + 2$ если $a = 0$.

$\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} - 2 \ge 0$.

$\frac{(x^2+y^2)(x+y) + xy\sqrt{xy}}{xy(x+y)} - 2 \ge 0$

$\frac{(x^2+y^2)(x+y) + xy\sqrt{xy} - 2xy\sqrt{xy}}{xy(x+y)} \ge 0$.

2 ~~Чер~~
Черновик



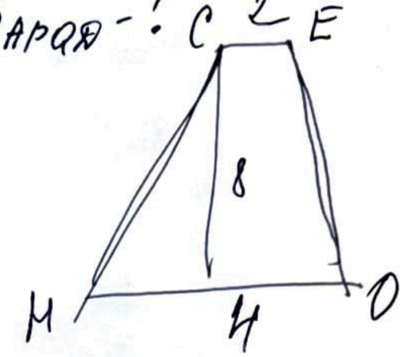
$AD = 12$ - одно основание

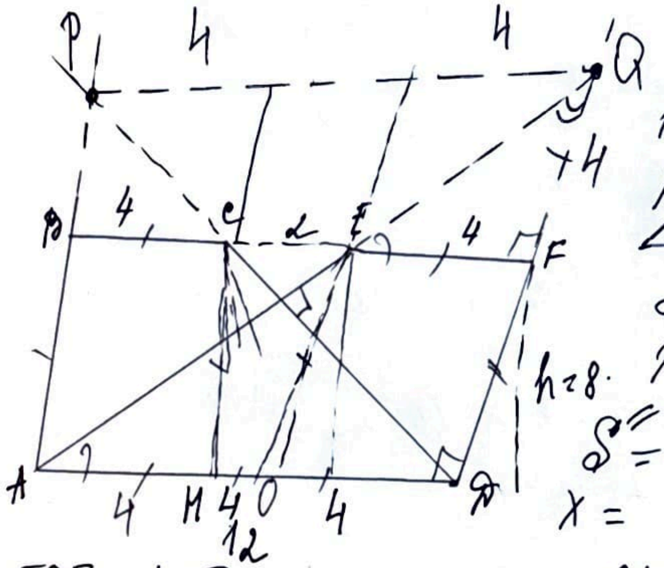
$h_1 = h_2 = 8.$

$BC = EF = 4.$

$CE = 2.$

S_{APQD} - ?





$12-(4+4) = 12-8 = 4.$

+4

Рассмотрим

▱OEFD

$S = 4 \cdot 8 = 32$

$h = 8.$ В ABFD. 2

$S = 32+32+X = 64+X.$

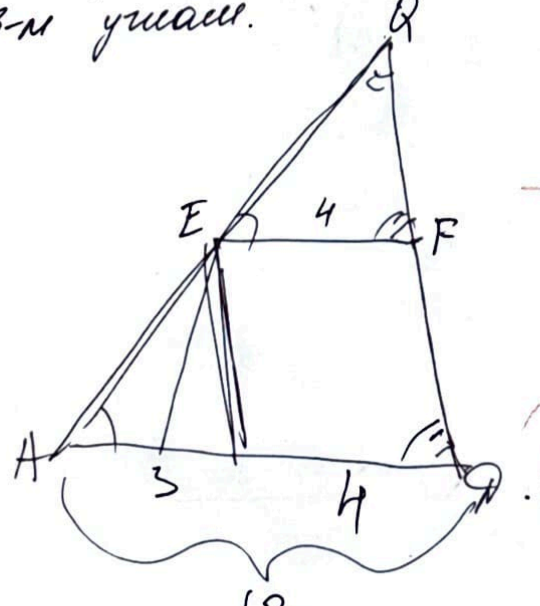
$X = \frac{2+4}{2} \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$

$64+24 = 88.$

EQF ~ AQD

по 3-м углам.

8



2

84-62-85-57 (36.1)

Листовик очков

№1 1) ~~[illegible]~~ всего: $3\cdot\frac{12\cdot 11}{2}=12a_1+d\cdot\frac{11\cdot 12}{2}$

2) 1 ~~[illegible]~~ ~~очков~~ ~~всего~~ ~~получили~~ ~~команды~~.

$/\ \exists d$

последнее $\rightarrow a_1, a_2, \dots a_{12} \Rightarrow 1$ (первое)

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $= 3\cdot m$

$3\cdot\frac{12\cdot 11}{2}=12a_1+\frac{33m\cdot 12}{2}$

$3\cdot 12\cdot 11=24a_1+33m\cdot 12$

$3\cdot 11=2a_1+33m$

$33(1-m)=2a_1$

$m, d\in\mathbb{Z}$ $(m\in\mathbb{N})$

Пусть $m=0$ ~~X~~

$m=1$ $a_1=0 \Rightarrow d=3$

$a_{12}=0+3\cdot 11=33$

Ответ: $a_1=30$

~~№3 $2\log_4^2(3-x)\log_9^2(8-x)\le\log_3(3-x)\log_2(8-x)-2$~~

~~$2\log_9^2(3-x)\log_4^2(8-x)\le\log_3(3-x)\log_2(8-x)-2$.~~

~~ОДЗ: $3-x\ne 0$~~

~~$8-x\ne 0$~~

~~$x\ne 3$~~

~~$x\ne 8$~~

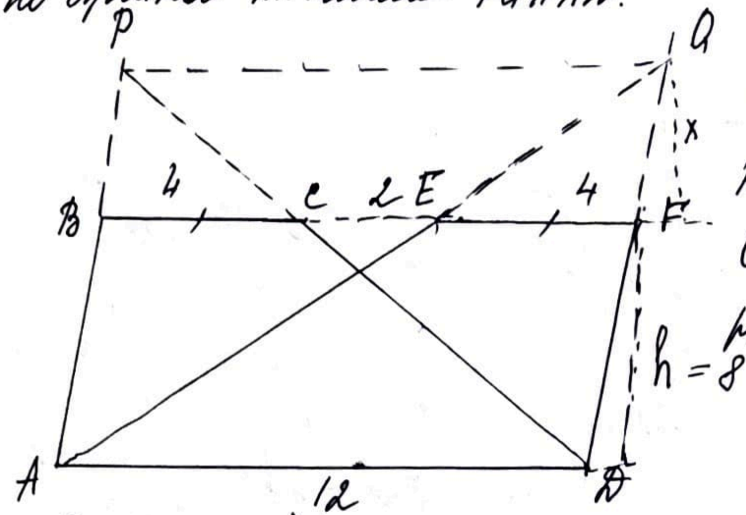
~~$2\log_9^2(8-x)\log_4(3-x)\le\log_2(8-x)\log_3(3-x)$~~

~~$2\log_9^2(8-x)\log_4(3-x)-\log_2(8-x)\log_3(3-x)\le 0$.~~

~~$\frac{2}{2}\log_3^2(3-x)\log_4(8-x)-\log_2(8-x)\log_3(3-x)-2\le 0$.~~

~~$\log_3(3-x)\left(\log_3(3-x)\log_4(8-x)^2-\log_2(8-x)\right)-2\le 0$.~~

№2 Листовик. Т.к. $BF \parallel AD$, то по обратной т. Фалеса $PQ \parallel AD$.



Дано:
$AD = 12$
$h_1 = h_2 = 8.$
$BC = EF = 4.$
$CE = 2$
Найти: S_{APQD} – ?

Решение: 1) Рассмотрим ABCD и AEFD.

$S_{\triangle} = \frac{a+b}{2} \cdot h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{4+12}{2} \cdot 8 = 8 \cdot 8 = 64.$

$S_{AEFD} = \frac{4+12}{2} \cdot 8 = 64 \Rightarrow S_{ABCD} = S_{AEFD}.$

2) Рассмотрим $\triangle AQD$: $\triangle AQD \sim \triangle EQF$ по 3м углам. ($\angle QEF = QAD$ при паралел. прямых; $\angle AQD = \angle EQF$ – общий $\angle$; $\angle QFE = \angle QDA$ – при параллельных прямых)

Их площади будут соотноситься как:

$\frac{S_1}{S_1 + 64} = \frac{S_1}{S_1 + S_{AEFD}}$.

~~Узнаем, как они относятся к другу другу: $\frac{EF}{AD} = \frac{4}{12}$~~

~~Получается: [illegible]~~

$\frac{x}{x+8} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

$\triangle DFC \sim \triangle DQP \Rightarrow \frac{6}{PQ} = \frac{8}{x+8} = \frac{8}{12}$

$\frac{6}{PQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{PQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow PQ = 9.$

$S_{APQD} = \frac{12+9}{2} \cdot 12 \Rightarrow 21 \cdot 6 = 126$

Ответ$_1$ = 126.

Площади треугольников будут относиться, как (найдем это соотношение):

$S_{треуг} = \frac{1}{2} \sin\alpha \, a \cdot b.$

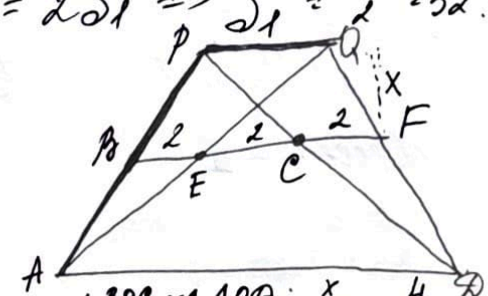
$\frac{S_1}{S_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 4 \cdot b}{\frac{1}{2} \sin\alpha \cdot 12 \cdot b} = \frac{4b}{12b} = \frac{1}{3}.$

$\frac{S_1}{S_1+64} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_1 + 64 = 3S_1$

$64 = 3S_1 - S_1$

$64 = 2S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{64}{2} = 32.$

$S_0 = 32 + 64 = 96.$



~~1) Рассмотрим △APQ~~
~~△ABE ~ △APQ.~~

$\triangle BPC \sim \triangle APD$; $\frac{x}{x+8} = \frac{4}{12}$

$\boxed{x = 4}$ $\triangle ABE \sim \triangle APQ$

$\frac{2}{PQ} = \frac{8}{8+x} \Rightarrow \frac{2}{PQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = 3$

$S_{APQD} = \frac{3+12}{2} \cdot 12 = 15 \cdot 6 = 90$

Ответ: 90

Чистовик

N 3 $2\log_4^2(3-x)\log_9^2(8-x) \le \log_3(3-x)\log_2(8-x) - 2$

$\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x) = \log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)$ ОДЗ: $\boxed{x<3}$

Замена: $\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x) = t \Rightarrow \frac{1}{8}t^2 - t + 2 \le 0 \Rightarrow (t-4)^2 \le 0$

$t^2 - 8t + 16 \le 0$

$\log_2(3-x)\log_3(8-x) = 4$ 1) $2<x<3 \Rightarrow \log_2(3-x)<0$ $\varnothing$

2) $x<2 \Rightarrow \log_2(3-x)>0$ в силу монотонности логарифма

$\Downarrow$

единственное решение: $x=-1$.

Ответ: -1.

$x<3$ 3

Листовик

№5. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$. $a>0$

$x, y>0$.

$x+y \neq 0$

$x \neq 0$

$y \neq 0$.

$xy \geq 0$.

$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$

$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$; $\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+4$

Пусть $x+y=t_1>0$ $\frac{t_1^2}{t_2^2}+\frac{2at_2}{t_1} \geq a+4$

$\sqrt{xy}=t_2>0$

$\frac{p^3+2a-(a+4)p}{p} \geq 0$; $p>0$ =>

$\frac{t_1}{t_2}=p$ => $p^2+\frac{2a}{p}-a-4 \geq 0$ =>

Проверим делители свободного члена:

=> $p^3-(a+4)p+2a \geq 0$

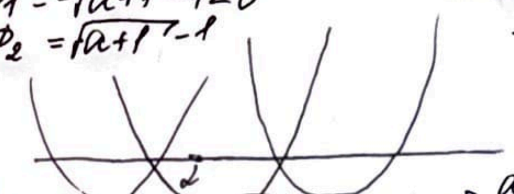
$p=2$ => $8-2a-8+2a=0$ => по т. Безу:

$(p-2)(p^2+2p-a) \geq 0$

$p_1=-\sqrt{a+1}-1<0$

$p_2=\sqrt{a+1}-1$

$$\begin{array}{r|l} p^3+0p^2-(a+4)p+2a & p-2 \\ \cline{2-2} -\;p^3-2p^2 & p^2+2p-a \\ \cline{1-1} 2p^2-(a+4)p & \\ -\;2p^2-4p & \\ \cline{1-1} (-a-4+4)p+2a & \\ -\;-ap+2a & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$



Следовательно, $\sqrt{a+1}-1 \leq 2$ => $a+1 \leq 9$

$a \leq 8$

Ответ: $a \in (0;8]$.

№4

$n: \sqrt[3]{n}$ $[\sqrt[3]{8}]=2$, $[\sqrt[3]{27}]=3$; $[\sqrt[3]{1}]=1$,

Оценим, какие числа входят в A:

$n \in [1;7]$ – все 7 чисел $\Sigma_1=\frac{26-8}{2}+1=10$

$n \in [8;26]$ – четные $\Sigma_2=\frac{63-27}{3}+1=13$

$n \in [27;63]$ => $n=3k_1$

$n \in [64;124]$ => $n=4k_2$

$\Sigma_3=\frac{124-64}{4}+1=16$

$n \in [125;215]$

$\Sigma_4=19$

$n \in [216;342]$ $\Sigma_5=22$

$n \in [343;511]$

$\Sigma_6=25$

$n \in [512;728]$ $n \in [1000;1330]$ $n \in [1728;2025]$

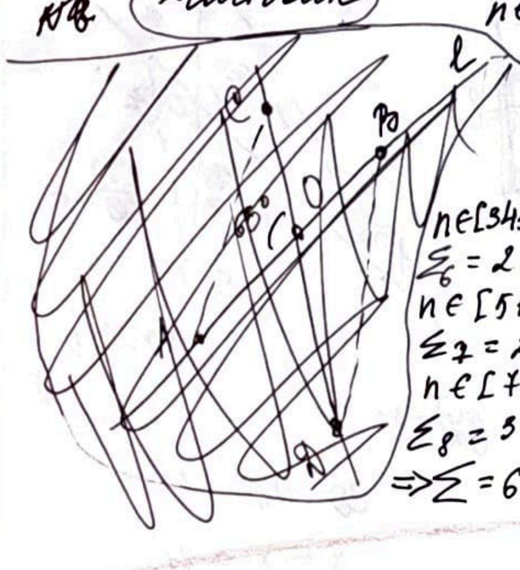
$\Sigma_7=28$ $\Sigma_9=34$

$n \in [729;999]$ $n \in [1331;1727]$ $\Sigma_{11}=25$

$\Sigma_8=31$ $\Sigma_{10}=37$

=> $\Sigma=6+\Sigma_2+\ldots\Sigma_{11}=256$ Ответ: 256

~~№2~~ Листовик



~~$\angle AOC=60°$~~

~~$AC \neq BD$~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№5 Черновик. $a>0.$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2.$$

при $a=1$

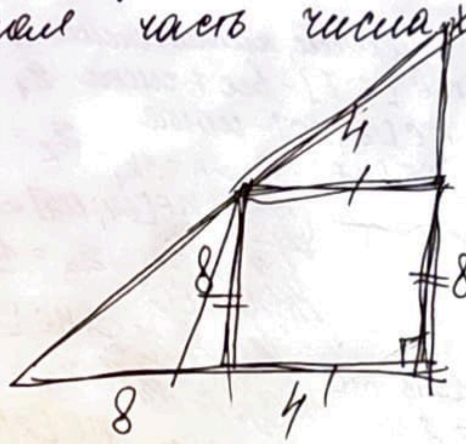
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\geq 3.$$

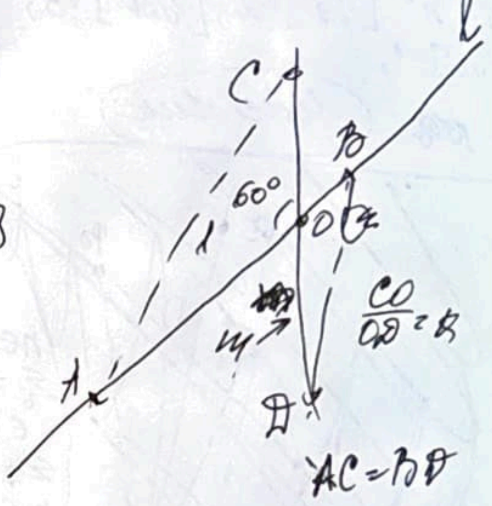
$$\frac{x^2+y^2+\cancel{2xy\sqrt{xy}}}{xy}+\frac{2xy\sqrt{xy}}{xy(x+y)}\geq 3.$$

№4 Черновик

A сост. из n, делящихся на $\sqrt[3]{n}$.

$[x]$ - целая часть числа x.





$64+64=$

$4=\frac{2}{2}$

$\frac{CO}{OD}=\frac{2}{2}$

$CD=m$

$CO+OD=4$

$x+x=4.$

$2x=4$

$x=2.$