0 929518 560007

92-95-18-56
(136.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьёвы Горы" ~~по~~
наменование олимпиады

~~математике~~

по математике
профиль олимпиады

Серебряковой Ольги Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 12:07 – 12:11 Мель

Дата

«06» 04 2025 года

Подпись участника

90 (Девяносто)

1

Чистовик

По формуле

$\boxed{\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)=\log_3(8-x)\cdot\log_2(3-x)}$!

№3

$2\log_4^2(3-x)\cdot\log_9^2(8-x)\leq\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

$2\log_4^2(3-x)\cdot\log_9^2(8-x)\leq\log_3(8-x)\cdot\log_2(3-x)-2$

Пусть $\log_3(8-x)\cdot\log_2(3-x)=t$, тогда =>

$\frac{1}{8}t^2\leq t-2 \quad |\cdot 8$

$t^2\leq 8t-16$

$t^2-8t+16\leq 0$

$(t-4)^2\leq 0$

$t=4$

Обратная условия =>

$\log_3(8-x)\cdot\log_2(3-x)=4$

1) При $x\in(3;1)$ $\varnothing$, т.к. $\log_2(\overset{-}{3-x})\cdot\log_3(\overset{+}{8-x})\neq 4^+$

2) При $x=1$ $\varnothing$, т.к. $\log_3(7)\cdot\log_2(2)\neq 4$

$\log_3 7\neq 4$

3) При $x\in(1;+\infty)$, обе функции монотонно возрастают, а значит пересекаются в одной точке.

$\log_3(8-x)\uparrow$ и $\log_2(3-x)\uparrow$

4) По пункту 3, можно сделать вывод, что единственный корень, $x=-1$, т.к. $\log_3(9)\cdot\log_2(4)=4$

Ответ: -1

~~№1~~

~~Всего команд - 12~~

~~очков за победу - 3~~

~~Ничьи:~~

~~очки команды на втором месте.~~

~~Т.к очки образуют прогрессию =>~~

~~$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$~~

~~$a_1=x$~~

~~$a_2=x+d$~~

~~всего команд~~

~~всего игр сыграно $\frac{12\cdot 11}{2}=66$~~

2.

№1

(замена убывающей прогрессии на возрастающую), т.к. если после замены 2 место = 11 место!

Дано:

12 команд

3 очка за победу

Найти: a_{11} – ?

1) $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ (всего сыграно игр)

2) $66\cdot 3=198$ (всего получено очков)

3) т.к они образуют прогрессию

$S_n=198$

4) $a_1=x$

$a_2=x+d$

$a_n=x+d(n-1)$

$a_{12}=x+11d$

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ $\quad S_{12}=\frac{x+x+11d}{2}\cdot 12=198$

$S_{12}=\frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12$

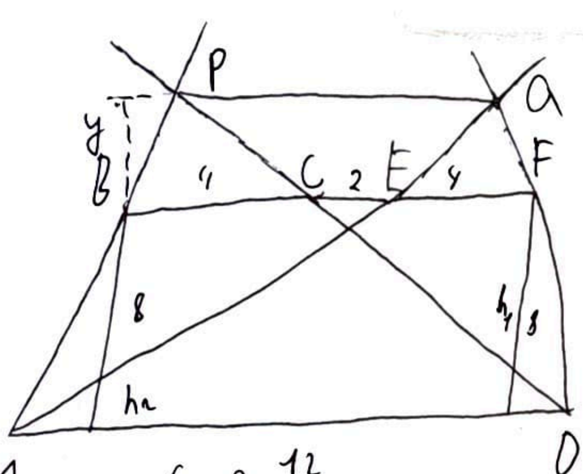
$S_{12}=\frac{2x+11d}{2}\cdot 12=12x+66d=198 \Rightarrow x=0;\ d=3$

5) $a_{11}=x+10d=0+10\cdot 3=30$

Ответ: Команда, занявшая 2 место, набрала 30 очков

Т.к. $BF \parallel AD$, то по обратной теореме Фалеса $PQ \parallel AD$

№2



Дано

$BC=EF=4$

$AD=12$

$CE=2$

$h_1=h_2=h=8$

1. $\frac{y}{y+8}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \Rightarrow y=4$

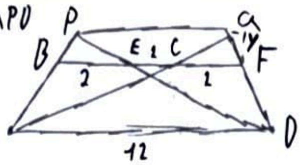
$\triangle DFC \sim \triangle DQP \Rightarrow \frac{6}{PQ}=\frac{8}{4+8}=\frac{8}{12}$

$\frac{6}{PQ}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{PQ}=\frac{1}{3} \Rightarrow PQ=9$

$S_{APQD}=\frac{12+9}{2}\cdot 12=21\cdot 6=126$

Ответ: 126

1. $\Delta BPC \sim \Delta APD$



3. $\frac{y}{y+8} = \frac{4}{12}$

$y = 4$

2. $\Delta ABE \sim \Delta APQ \Rightarrow \frac{2}{PQ} = \frac{8}{8+y} \Rightarrow \frac{2}{PQ} = \frac{2}{3}$

$PQ = 3$; $S_{APQD} = \frac{3+12}{2} \cdot 12 = 15 \cdot 6 = 90$

Ответ: 90

№5

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

~~1) При $x = y$; $x > 0$ $1 + 1 + \frac{2ax}{2x} \geq a+2 \Rightarrow 2 + a \geq a+2$, $a \in \mathbb{R}$~~

2) При $a = 0$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2 \Rightarrow$

$\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$ верно, то есть

при $a = 0$ выполняется условие задачи

3)

4. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$

$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$ $\quad\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+4$

Пусть $\sqrt{xy}=t_2$; $x+y=t_1>0$

$t_1>0$; $t_2>0$. Тогда $\Rightarrow$

$\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2-\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$\frac{t_1^2}{t_2^2}+\frac{2at_2}{t_1}\geq a+4$

Пусть $p=\frac{t_1}{t_2}\Rightarrow$

$p^2+\frac{2a}{p}-a-4\geq 0\Rightarrow p^3-p(a+4)+2a\geq 0$

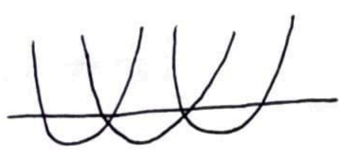
Проверим делителем св. члена по т. Безу:

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;p^3+0p^2-(a+4)p+2a & p-2 \\
-\;p^3-2p^2 & p^2+2p-a \\
\;\;\;2p^2-(a+4)p & \\
\;-\;2p^2-4p & \\
\;\;\;(-a-4+4)p+2a & \\
\;-\;-ap+2a & \\
\;\;\;0 &
\end{array}
$$

$(p-2)(p^2+2p-a)\geq 0$

$p_1=-\sqrt{a+1}-1<0$

$p_2=\sqrt{a+1}-1$

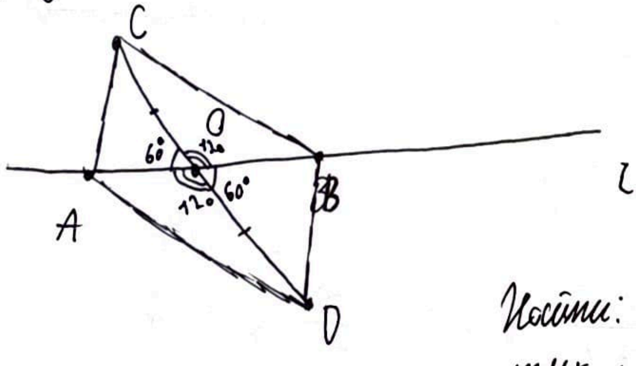


Следовательно,

$\sqrt{a+1}-1\leq 2\Rightarrow$ $a+1\leq 9$, $a\leq 8$

Ответ: $a\in(0;8]$

№ 6



$AB=1$

$CD=m$

$\frac{CO}{OD}=K$

$AC\neq B$

Найти:

m и K, при которых $AC=BD$

1) если $K=1$, то $CO=OD$
если $m=1$, то $AB=CD$

5.

2) рассмотрим четырехугольник $ABCD$, при $k = 1$ и $m = 1$

AB и CD диагонали четырехугольника, т. к.

$AB = CD$ и CD точкой O делится пополам, можно

сделать вывод, что $ABCD$ параллелограмм

3) Поскольку $ABCD$ параллелограмм по свойству параллелограмма противолежащие стороны параллельны и равны,

то есть $AC = BD$

№4

$n: \sqrt[3]{n}$ $[\sqrt[3]{8}] = 2$, $[\sqrt[3]{27}] = 3$, $[\sqrt[3]{7}] = 1$.

оцените, какие числа входят в A: $n \in [1; 7]$ - все 7 чисел

$n \in [8; 26]$ - четные

$n \in [27; 63] \Rightarrow n = 3k$,

$n \in [64; 124] \Rightarrow n = 4k$

$n \in [125; 215]$; $n \in [216; 342]$

$n \in [343; 511]$; $n \in [512; 728]$

$n \in [729; 999]$

$n \in [1000; 1330]$

$n \in [1331; 1727]$

$n \in [1728; 2025]$

$\Sigma_1 = \frac{26-8}{2} + 1 = 10$; $\Sigma_2 = \frac{63-27}{3} + 1 = 13$

$\Sigma_3 = \frac{124-64}{4} + 1 = 16$; $\Sigma_4 = 19$

$\Sigma_5 = 22$; $\Sigma_6 = 25$; $\Sigma_7 = 28$;

$\Sigma_8 = 31$; $\Sigma_9 = 34$; $\Sigma_{10} = 37$; $\Sigma_{11} = 25$

$\Sigma = 6 + \Sigma_2 + \ldots \Sigma_{11} =$

$= \underline{256}$

~~Ответ: 256~~

Ответ: 256