0712724360000

71-27-24-36
(135.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Акимовой Ольги Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 12:47 – 12:50 Паин

Дата

«06» 04 2025 года

Подпись участника
Акимова

95 (Defencosto ~~~~)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№3

$\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\leq 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7)$

ОДЗ $\begin{cases}x>-2\\x>-7\end{cases}$ $x>-2$

$\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\leq 32\cdot\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7)\cdot\frac{1}{4}$

~~$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=t$, тогда~~

~~t^2+16~~ $\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\leq 8\log_2(x+2)\log_3(x+7)$

Пусть $\log_2(x+2)\log_3(x+7)=t$, тогда

$t^2+16\leq 8t$

$t^2-8t+16\leq 0$

$(t-4)^2\leq 0$

$t-4=0$, т.к. $(t-4)^2\geq 0$

$t=4$

Обратная замена:

$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=4$

Если $-2<x\leq -1$, то $\begin{cases}\log_2(x+2)\leq 0\text{, т.е.}\\\log_3(x+7)>0\end{cases}$

$\log_2(x+2)\log_3(x+7)\leq 0$,

При $x>-1$ $\log_2(x+2)$ возраст. по x и $\log_3(x+2)$ возраст. по x, $\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)>0$, ~~и~~ $4>1$ $4>3$ заметим, что $\log_2(x+2)\log_3(x+7)=4$, при (продолжение на след. лист) тогда его $\log_2(x+2)\log_3(x+7)$ возраст. по x

№1

~~10 команд., всего было игр: $10\cdot 2=20$, тогда всего набрали очков $10\cdot 2\cdot 2=40$ тогда пусть 1-ая команда набрала a очков, тогда 10-ая: $a+9n$, где n - шаг арифм. прогрессии, тогда Σ очков при подсчёте по арифметической прогрессии $\frac{a+9n+a}{2}\cdot 10=$ $=5(2a+9n)=40$~~

~~$2a+9n=8$~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$x=2$, т.к. ф-ция $\log_2(x+2)\log_3(x+7)$ возраст. по X при $x>-1$, то $x=2$ - единственное решение, при $x\le -1$ $\log_2(x+2)\log_3(x+7)\le 0$, $0<4$

Ответ: $x=2$.

№1

Всего было игр: $\frac{10\cdot 9}{2}=45$

Всего было заработано очков: $45\cdot 2=90$

Пусть команда, которая набрала меньше всего очков получила a очков, тогда команда, кот. получила больше всего очков набрала $a+9n$, где n - шаг арифметической прогрессии, тогда ~~все~~ всего очков было набрано $\frac{a+9n+a}{2}\cdot 10=5(2a+9n)$,

по смыслу задачи

$n\ge 2$, т.к. очки образуют уб. арифм. прогрессию, то нет команд с одинаковым кол-во очков, тогда

$5(2a+9n)=45\cdot 2$

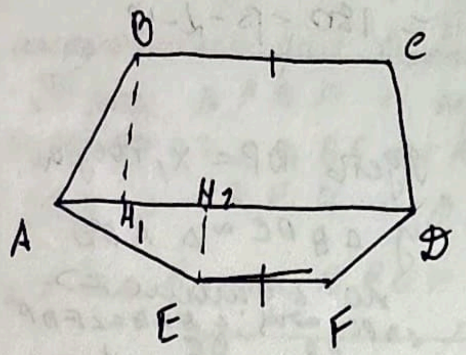
$2a+9n=18$

При $n=2$ $9\cdot 2=18$, при $n>2 \Rightarrow 9n>18$, тогда $2a<0$, что не может быть, т.е. $n=2$, т.е. команда, занявшая 2-ое место набрала $2\cdot 8+0=16$ очков.

Ответ: 16 очков.

71-27-24-36 (1353)

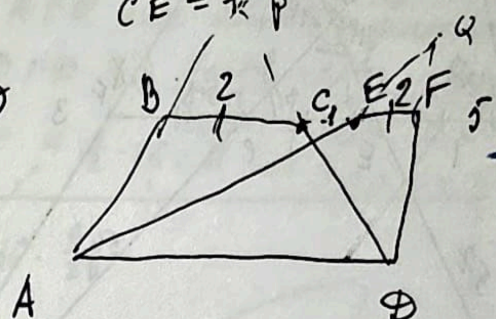
№2

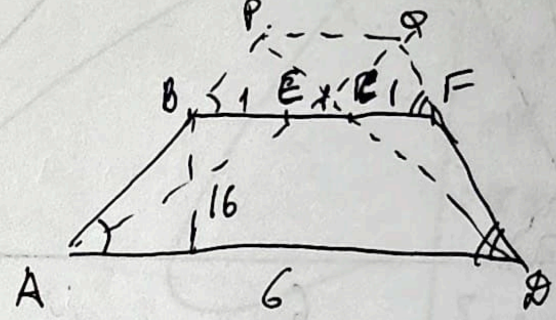


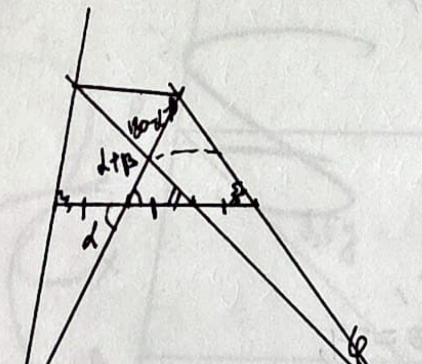
$BH_1 = EH_2 = 16$

$BC = EF = 2$

$CE = 1$



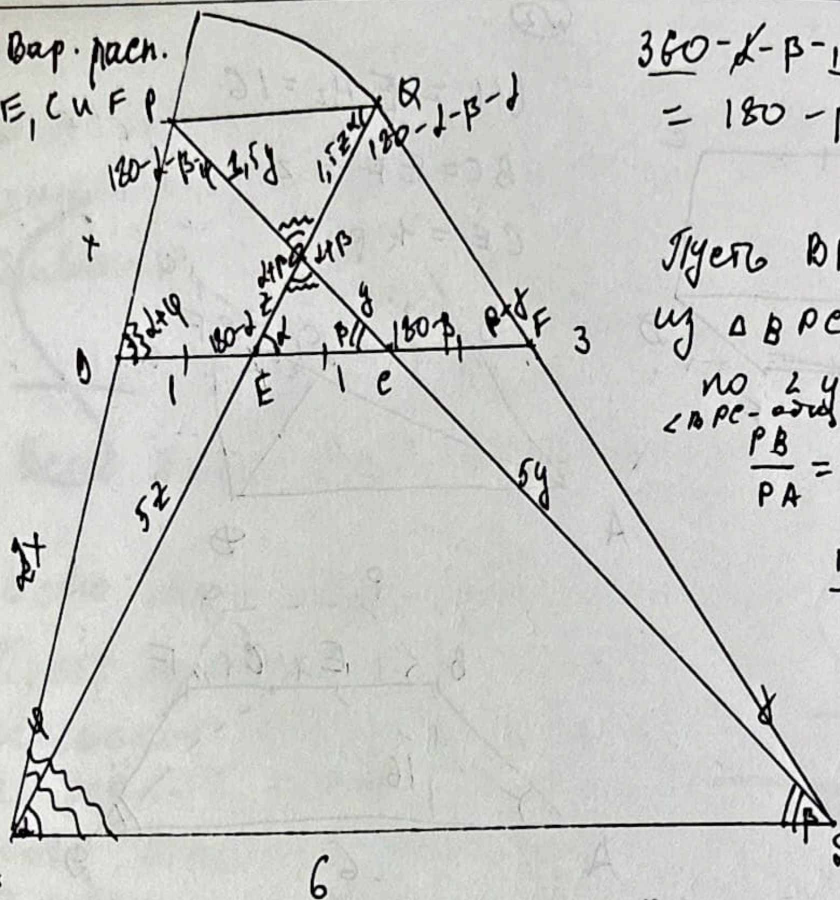




Заметим, что точки C и E не могут лежать в разных полуплоскостях относительно AD, т.к. тогда минимальное $EC = 16 \cdot 2 = 32$ (~~удвоенная высота ⊥ к AD~~ Σ перп. к AD от т. C и т. E).

1) Вар. расп.

B, E, C и F P



$\cancel{360} - \cancel{\alpha} - \beta - \cancel{180} + \cancel{\alpha} - \alpha - \varphi =$

$= 180 - \beta - \alpha - \varphi$

Пусть BP = x, тогда из △BPC ~ △APD по 2 углам => ∠BPC - общ; ∠BAD = ∠FBP

$\frac{PB}{PA} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$

$\frac{PB}{PA} = \frac{1}{3}$

$\frac{PB}{PB + AB} = \frac{1}{3}$

$3PB = PB + AB$

$AB = 2PB,$

$AB = 2x,$

△AOD ~ △EOC по 2 углам => } аналогично для △AQD и △EQF

$\frac{1}{6} = \frac{EC}{AD} = \frac{EO}{OA} = \frac{EO}{AE + EO}$

$6EO = AE + EO$

$AE = 5EO$

пусть AO = z, тогда AE = 5z,

аналогично для OC и CD, CD = 5y,

CO = y

из △BPC ~ △APD => $\frac{PC}{PD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$

$\frac{PO + y}{6y + PO} = \frac{1}{3}$

$3PO + 3y = 6y + PO$

$2PO = 3y$

$PO = 1,5y$

Аналогично для △AQD и △EQF => QO = 1,5z

△EOC ~ △QOP по отношению 2 сторон и

4 углу между ними: ∠EOC = ∠POQ и $\frac{EO}{OC} = \frac{z}{y} = \frac{QO}{OP}$ =>

$\angle CEO = \angle PQO \Rightarrow PQ \parallel BF$ т.к. $\angle CEO$ и $\angle PQO$ – накрест. леж. углы $\Rightarrow$, $\frac{PQ}{EC} = \frac{OQ}{OE} = \frac{1,5}{1} = 1,5$, $PQ = 1,5$,

~~аналогично для высот в △PQO и △EOC~~,

Трап. $BPQF \sim$ трап $ABFD$ по 4 углам, т.к. $AD \parallel BF \parallel PQ \Rightarrow \angle ABF = \angle APQ$ как односторон. ~~соотв.~~, аналогично для $\angle PQF$ и $\angle BFD \Rightarrow \frac{\text{выс. трап. } BPQF}{\text{выс. трап. } ABFD} = \frac{BP}{AB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ выс. в трап. $BPQF = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \Rightarrow S_{BPQF} = 8 \cdot \frac{1,5+3}{2} =$

$= 4 \cdot 4,5 =$

$= 18$

$16 \cdot \frac{9}{2}$

$S_{ABFD} =$

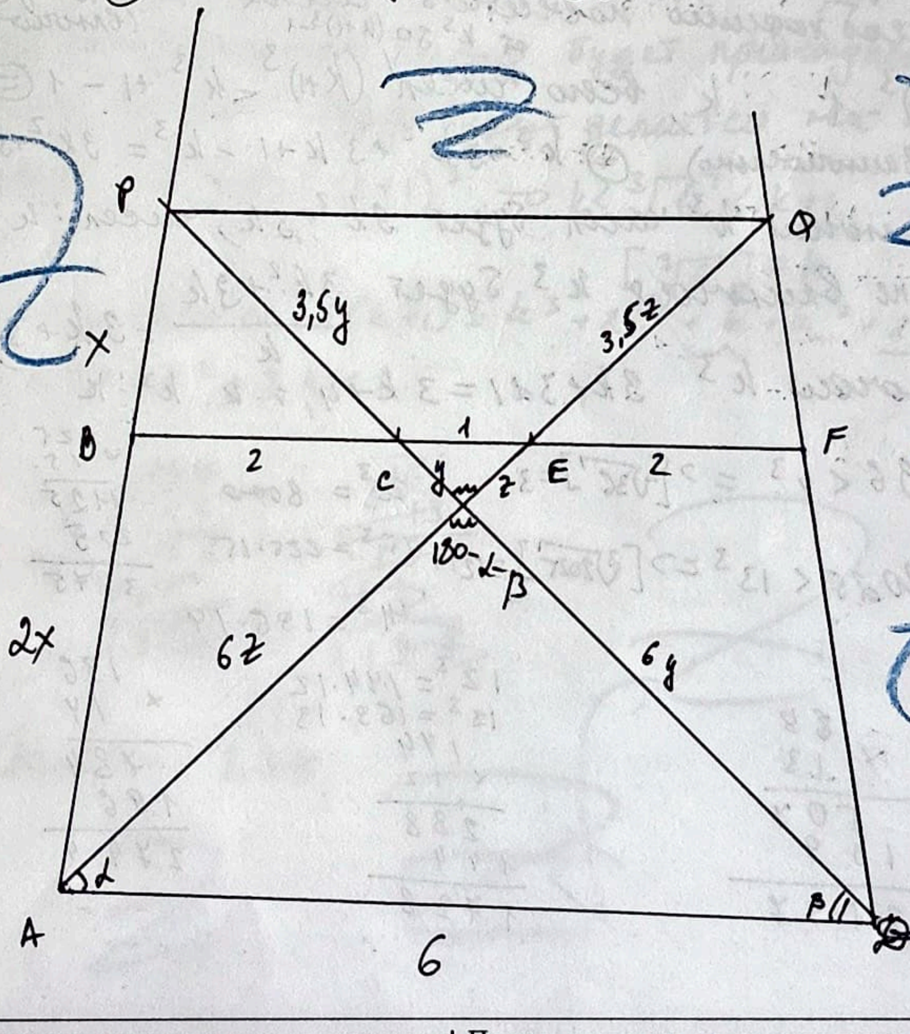
$= 16 \cdot \frac{3+6}{2} =$

$= 8 \cdot 9 =$

$= 72$

$S_{APQF} =$

$= 72 + 18 = 90$



5

№4 Чистовик

$n \vdots [\sqrt[3]{n}]$

$[\sqrt[3]{n}] = a$

$k^3; k^3+k; k^3+2k; \ldots; (k+1)^3$

k^3+3k^2+3k+1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

Черновик

$27-8-1=18$

$\cancel{k^3}+3k^2+3k+\cancel{1}-\cancel{k^3}-\cancel{1}=3k^2+3k$

$$\frac{3k^2+3k}{k}=3k+3$$

$3k+3+1=3k+4$

$k \in N$

$2025=45^2=5^2 \cdot 9^2=5^2 \cdot 3^6$

Пусть есть k^3 и $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$, ~~так~~ необходимо посчитать числа от k^3 до (включительно) $(k+1)^3-1 \vdots k$, всего чисел от k^3 до $(k+1)^3-1$ $(k+1)^3-k^3+1-1 =$ ~~не~~ (включительно) $= k^3+3k^2+3k+1-k^3 = 3k^2+3k+1$, не включая k^3 чисел будет $3k^2+3k$, чисел $\vdots k$ ~~эти~~ не включая k^3 будет $\frac{3k^2+3k}{k}=3k+3$, включая k^3 $3k+3+1=3k+4$, т.к. $k^3 \vdots k$

$3^3 < 36 < 4^3 \Rightarrow [\sqrt[3]{36}]=3$

$12^3 < 2025 < 13^3 \Rightarrow [\sqrt[3]{2025}]=12$

$20^3=8000$

$15^3=225 \cdot 15$

$14^3=196 \cdot 14$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times\ 15 \\ \hline 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$12^3=144 \cdot 12$

$13^3=169 \cdot 13$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 196 \\ \times\ 14 \\ \hline 784 \\ 196 \\ \hline 2744 \end{array}$$

т.е. k принимает значения от 3 до 12:

Для $k=3$:

$3\cdot3+4-\frac{36-27}{3}=13-3=10$

Для $3<k<12$:

$3\cdot4+3+3\cdot5+3+\ldots+3\cdot11+3=3\cdot(4+5+\ldots+11)+3\cdot8=$

$=3\cdot\frac{4+11}{\cancel{7}}\cdot\cancel{84}+24=3\cdot15\cdot4+24=60\cdot3+24=204$

Для $k=12$:

$\frac{2025-1728}{12}+1=24+1=25$

$$\begin{array}{r} 2025\\ -1728\\ \hline 297\end{array}\qquad \begin{array}{r}297\\ \hline 24\ |\ 12\\ 57\\ -48\\ \hline 9\end{array}\qquad \begin{array}{r}\cancel{144}\\ \times\ \cancel{2}\\ \hline \cancel{288}\end{array}$$

Тогда всего чисел: $[\sqrt[3]{n}]$ на отрезке $[36; 2025]$ $10+204+25=239$

* числа, которые $>k^3$ и $<(k+1)^3$, где k — ~~уст~~ натуральное число будут принадлежать м-ву А, если ~~будут~~ будут делиться на k, т.к. если $k^3<b<(k+1)^3$, то $k<\sqrt[3]{b}<k+1$

$[\sqrt[3]{b}]=k$.

$(k+1)^3=(k^2+2k+1)(k+1)=k^3+2k^2+k+k^2+2k+1=$

$=k^3+3k^2+3k+1$

$$\begin{array}{r}\cancel{144}\\ \times\ \cancel{12}\\ \hline \cancel{288}\\ \cancel{144}\\ \hline \cancel{1728}\end{array}\qquad \begin{array}{r}\cancel{169}\\ \times\ \cancel{13}\\ \hline \cancel{507}\\ \cancel{169}\\ \hline \cancel{2197}\end{array}$$

Ответ: ~~239~~ 247.

№8

1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2$

чтобы выполн. усл. задачи:

2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{t}}{1+t} < \frac{a}{2}+2$; $t=\frac{y}{x}$

3) $t+\frac{1}{t}+\frac{a\sqrt{t}}{1+t} < \frac{a}{2}+2$

4) $\frac{(t-1)^2}{t} < a\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2(t+1)}$

$\frac{(\sqrt{t}+1)^2(\sqrt{t}-1)^2}{t} < \frac{a(\sqrt{t}-1)^2}{2(t+1)}$

5) $f(t)=\frac{2(t+1)(\sqrt{t}+1)^2}{t} < a$

6) $f'(t)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}\,t}\right)=0$

7) $1+\frac{1}{\sqrt{t}}>0 \Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{t}\,t}>0$ при $t>1 \Rightarrow f'(t)>0$ при $t>1$

$1-\frac{1}{\sqrt{t}\,t}=0$ при $t=1 \Rightarrow f'(t)=0$ при $t=1$

$1-\frac{1}{\sqrt{t}\,t}<0$ при $t<1 \Rightarrow f'(t)<0$ при $t<1$

7) $\Rightarrow$ при $t=1$ достиг. в пределе мин. ф-ции $f(t)=16$, т. е. $a>16$

~~Заметим, что~~

~~по нер-ву Коши:~~

Ответ: $a>16$.

8

$f'(t) = 2(1+t^{-0{,}5}-t^{-1{,}5}-t^{-2}) = (1+\frac{1}{\sqrt{t}})(1-\frac{1}{\sqrt{t}\,t})$

Тогда чтобы было неверно $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geqslant \frac{a}{2}+2$

необходимо, чтобы $\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} < \frac{a}{2}$, т. е.

т.к. $a>0$

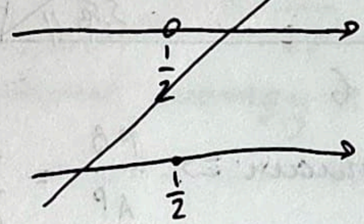
$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} < \frac{1}{2} \quad (!!)$$

По нер-ву Коши для $(x+y)$:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \quad (!!!)$$

т. е.



(1) ~~т.к.~~ равенство в неравенстве Коши достигается при $x=y$, то

т. е. чтобы выполнялось нер-во:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \leqslant \frac{a}{2}+2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 < a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)$$

т. е. $x \neq y$ (т.к. 1), когда $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{1}{2}$, $a\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=0$, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 \geqslant 0$

т.к. чем меньше разница x и y, тем $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})-2$ меньше, то пусть $x-y=1$

$y=x-1$

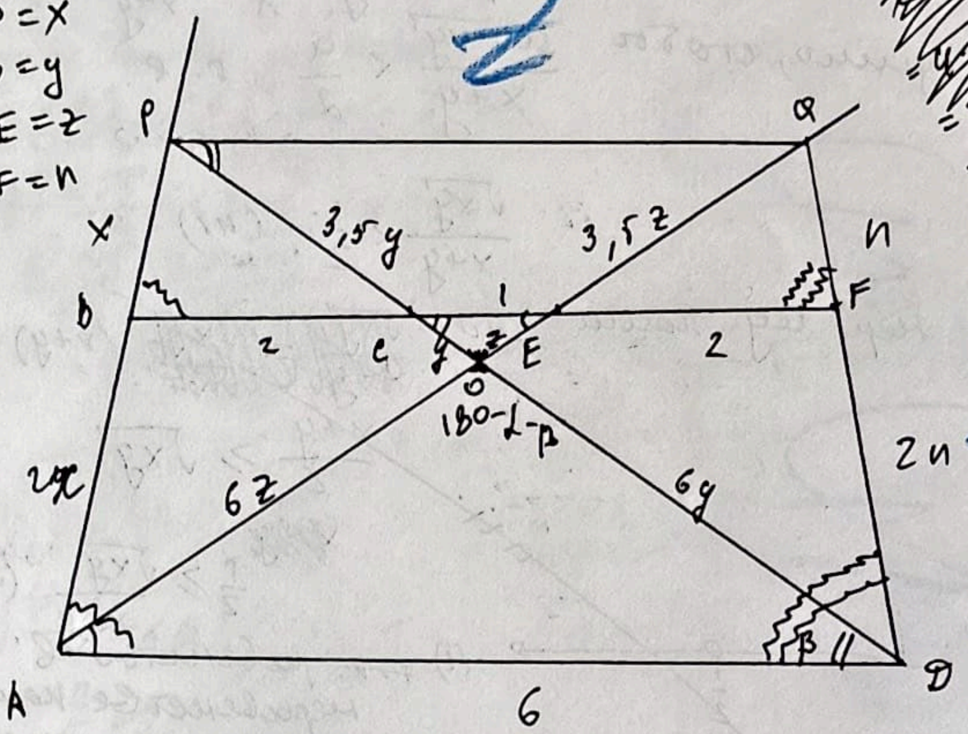
$$\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x} = \frac{x^2+x^2-2x+1}{x(x-1)} = \frac{2x^2-2x+1}{x(x-1)}$$

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^2-1}-2 = \frac{\cancel{2x^2}-\cancel{2x}+1-\cancel{2x^2}+\cancel{2x}}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x(x-1)}}{2x-1} = \frac{4x-2-\cancel{\ldots}\sqrt{x^2-x}}{2x-1}$$

г) Вар. 2 расп. B, C, E и F — №2 продолжение

BP = x
CO = y
OE = z
QF = n



$\triangle BPC \sim \triangle APD$ по 2 углам $\Rightarrow$ $\frac{PB}{AP} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{PB}{PB + AB} = \frac{1}{3}$

$3PB = PB + AB$

$2PB = AB$

$PB = \frac{AB}{2}$

аналогично для $\triangle EQF$ и $\triangle AQD$ $\Rightarrow$

$FD = 2QF$

$\triangle AOD \sim \triangle EOC$ по 2 углам $\Rightarrow$ $\frac{CE}{AD} = \frac{CO}{OD} = \frac{EO}{OA} = \frac{1}{6}$

т.к. $\triangle BPC \sim \triangle APD \Rightarrow$ $\frac{BC}{AD} = \frac{PC}{PD} = \frac{PC}{PC + CD}$

$\frac{1}{3} = \frac{PC}{PC + CD}$

$CD + PC = 3PC$

$PC = \frac{CD}{2}$ 1

аналогично для $\triangle EQF$ и $\triangle AQD \Rightarrow EQ = \frac{1}{2} AE$

$\triangle COE \sim \triangle POQ$ по углу и отношению 2 прилеж. сторон: $\angle POE = \angle AOD$ ~~верт~~.

$$\frac{CO}{OE} = \frac{y}{z} = \frac{PO}{OQ} = \frac{4,5y}{4,5z} = \frac{y}{z} \Rightarrow$$

$\angle QPO = \angle ECO \Rightarrow PQ \parallel BF$ т.к. $\angle QPO = \angle ECO$ и $\angle QPO$ и $\angle ECO$ - соотвественные.

~~PQ~~ из подобия $\triangle COE$ и $\triangle POQ$ $\Rightarrow \frac{CE}{PQ} = \frac{CO}{OP} = \frac{1}{4,5}$

~~CE~~ $PQ = 4,5CE$

$PQ = 4,5$

$\triangle BPC$ и $\triangle APD$ подобны $\Rightarrow$

их $\frac{\text{выс.} \triangle BPC}{\text{выс.} \triangle APD} = \frac{BP}{AP} = \frac{1}{3}$

расстояние между AD и $BF = 16$ - это $\frac{2}{3}$ выс. $\triangle APD \Rightarrow$ выс $\triangle APD = \frac{16}{\frac{2}{3}} = 24$,

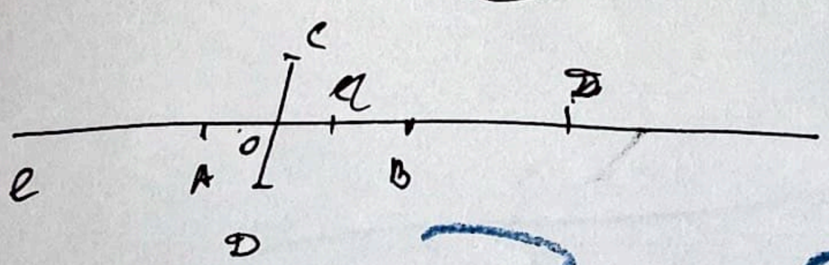
выс. $\triangle BPC = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \Rightarrow S_{BPQF} = 8 \cdot \frac{4,5+5}{2} = 4 \cdot 9,5 = 38$

$S_{ABFD} = 16 \cdot \frac{5+6}{2} = 16 \cdot \frac{11}{2} = 8 \cdot 11 = 88$

$S_{APQD} = S_{ABFD} + S_{BPQF} = 88 + 38 = 126$

Ответ: $S_{APQD} = 126$ или $S_{APQD} = 90$.

№6



11