0 421227 560007

42-12-27-56
(140.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Савирных Михаила Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

выход 12:46 – 12:47 Кравц

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

42-12-27-56
(140.1)

Черновик.

к – 60
кап – 70
я – 80
м – 90
кл – 100

13.

ч = к
я ≥ 5
кап ≥ 1
м ≥ 1
кл ≥ 1

4·~~60~~80 + 80·5 + 70 + 90 + 100
= 240 + 400 + 200
900.
+70 или
+100

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \;\vdots\; 10a + b + 10c + d$

2025 | 45 — 184 — 44 — 185 — 184 — 1
2027 | 47 — 188 — 43 — 147 — 141 — 6
2028 | 48 — 192 — 42 — 108 — 96 — 12
2050 | 70 — 14 — 2 — 65

95 (девяносто пять)
Шаг – Звягин

$2025 + a \;\vdots\; 45 + a$

$\frac{2025 + a}{45 + a} = 1 + \frac{1980}{45 + a}$

1980 | 2
990 | 2
495 | 5
99 | 11
9 | 3
3 | 3
1

$1980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3^2$

2 2 5 11 3 3

$52 = 26 \cdot 2$
$13 \cdot 4$

53
$54 = 27 \cdot 2$
55

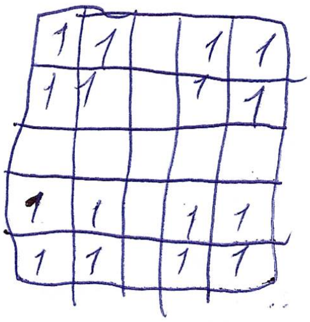
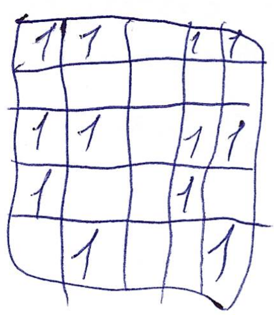
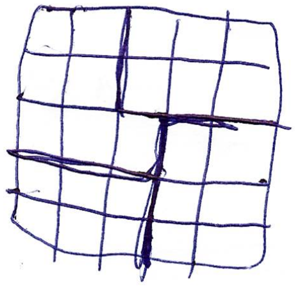
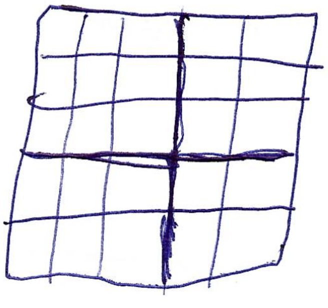
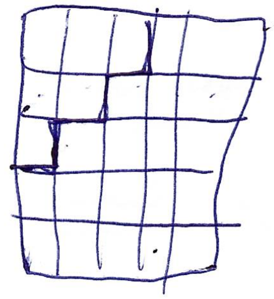
$99 \cdot 5 = 450 + 45 = 495$

495 × 4 = 1980

2017

~~2035 | 75 — 150 — 26 — 455~~

2035 | 55 — 165 — 37 — 385 — 385 — 0

Черновик

Задача 1.

Т.к. мама испекла 13 пирожков с пятью разными начинками, каждого вида пирожков хотя бы 1. Пирожков с картошкой 4, а значит, раз пирожков с яблоком больше всех, пирожков с яблоками хотя бы 5. Тогда, осталось "определить" один пирожок. Если ~~ее~~ ~~худшая~~ прибыль максимальная, то это должен быть самый дорогой пирожок — с клубникой. Тогда сумма равна $4 \cdot 60 + 5 \cdot 80 + 70 + 90 + 100 + 100 = 240 + 400 + 360 = 1000$ руб. Если прибыль минимальная, то этот пирожок должен быть самым дешёвым из возможных. Т.к. количество пирожков с картошкой определено, самый дешёвый из возможных — пирожок с капустой. Тогда сумма равна $4 \cdot 60 + 5 \cdot 80 + 70 + 90 + 100 + 70 = 970$ руб.

Ответ: наибольшая возможная прибыль 1000 руб.
наименьшая возможная прибыль 970 руб.

42-12-27-56
(140.1)

Чистовик

Задача 2.

Пусть этот год меньше 2100. Тогда, пусть он наступит через a лет. Тогда $2025+a \vdots 45+a$. Найдём наим. такое натуральное a.

$\frac{2025+a}{45+a} \in N$. $\frac{2025+a}{45+a} = 1 + \frac{1980}{45+a}$.

$\boxed{1980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3^2.}$ ~~Куркуговгный~~

~~Если 1980 делится на 45+а, 45+а состоит из~~

$1980 \vdots 45+a$. Самое маленькое число, на которое делится 1980 и большее 45 — это число $55 = 5 \cdot 11$. ~~(ТКО~~ (числа от 46 до 54 не могут быть составлены из вышеуказанных простых делителей: $46 \vdots 23$, $1980 \not\vdots 23$

47 - простое, $1980 \not\vdots 47$

$48 \vdots 8$, $1980 \not\vdots 8$

$49 \vdots 7$, $1980 \not\vdots 7$

$50 \vdots 25$, $1980 \not\vdots 25$

$51 \vdots 17$, $1980 \not\vdots 17$

$52 \vdots 13$, $1980 \not\vdots 13$

53 - простое, $1980 \not\vdots 53$

$54 \vdots 9$, $1980 \not\vdots 9$).

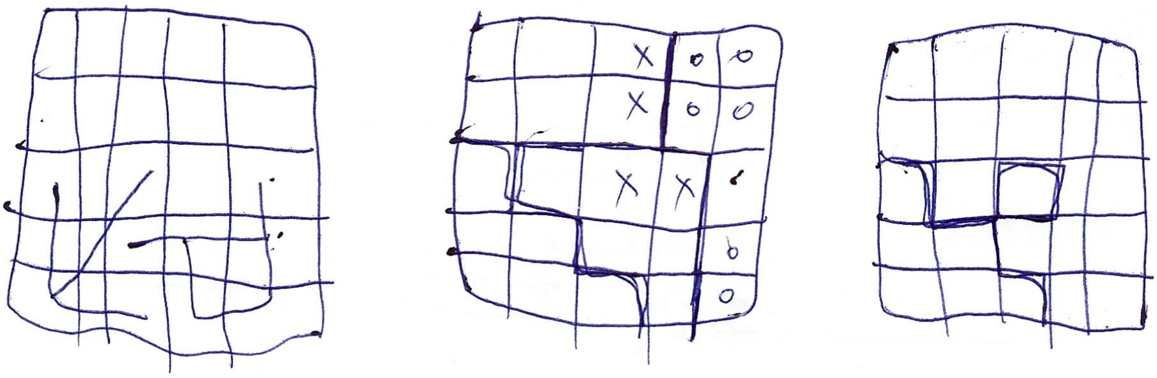
Тогда наименьшее $a = 10$.

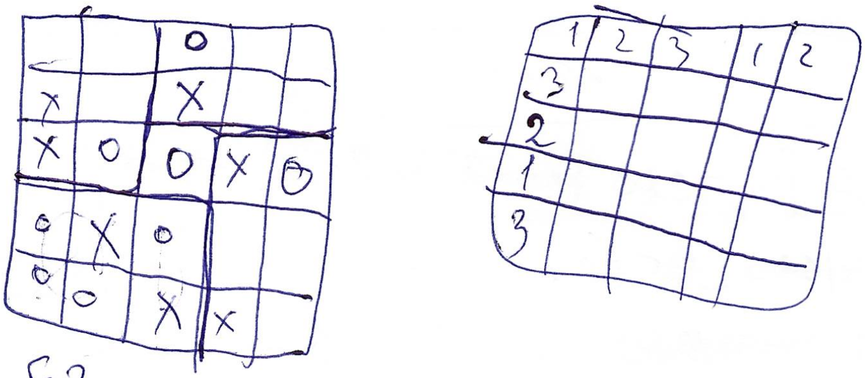
$2035 : 55 = 37$.

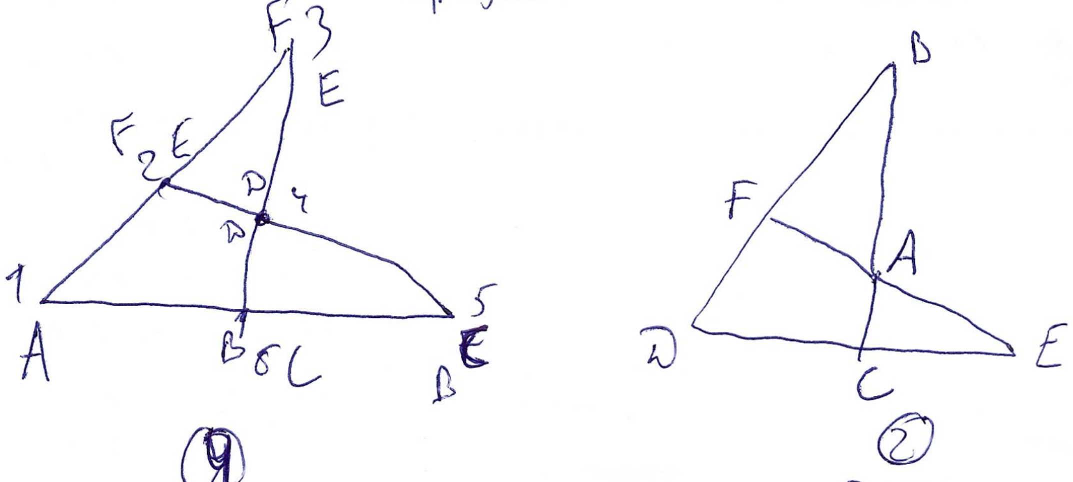
Если год больше или равен 2100, он наступит позднее 2035-го года. Получается, следующий замечательный год наступит через 10 лет, это будет 2035-ый год.

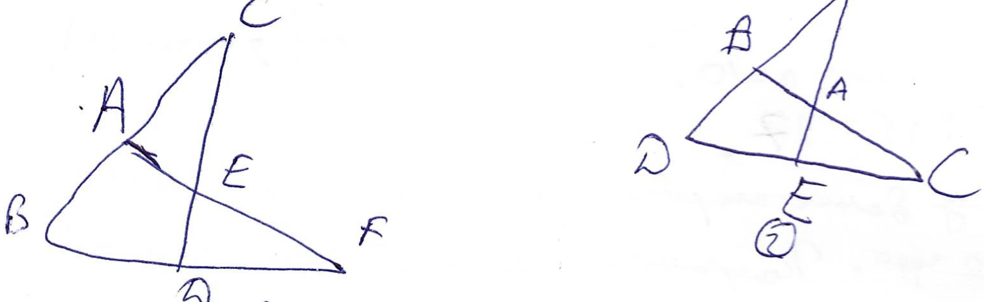
Ответ: 2035.

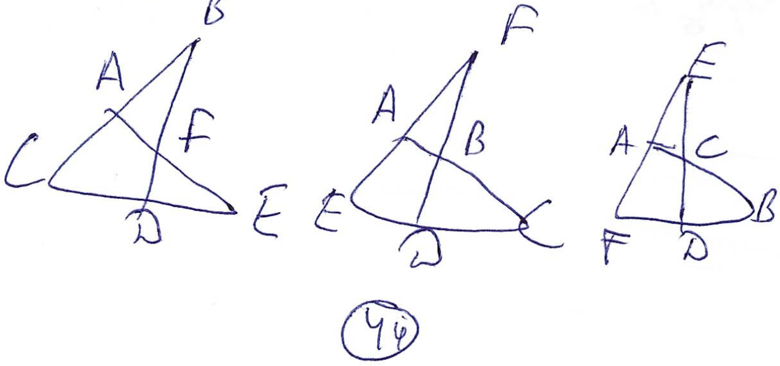
Черновик







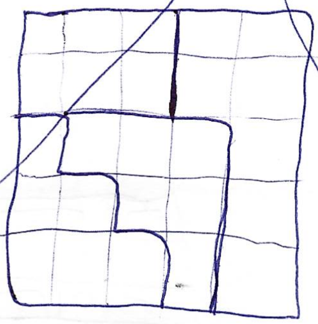




Чистовик

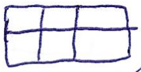
Задача 3.

Разобьём поле на 4 куска:

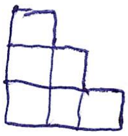


Если единиц ≥17, то найдётся фигура, в которой хотябы 5 ~~стоящих~~ единиц.

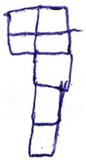
Заметим, что если 5 единиц в фигуре



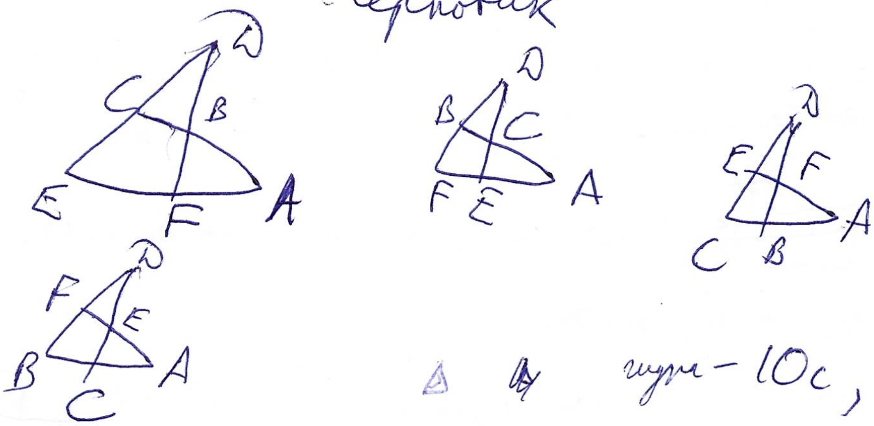
, то куда бы они не встали, найдутся 3 стоящие в ряд единицы. Также, если 5 единиц вставут в фигуру



, то найдутся либо 3 стоящие в ряд, либо 3 стоящие по диагонали единицы. Получается, 5 единиц стоят в фигуре



Черновик



△ ∆ груп – 10с, 10м

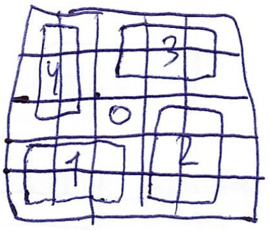
$\frac{7}{8}$

6.

Чистовик.

Задача 3.

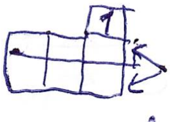
Разобьём фигуру на 4 плитки и одну клеточку и пронумеруем плитки:



Если ~~все~~ единиц ≥ 17, то либо клетка (центральная) имеет единицу ~~закрашена~~ и в каждой плитке по 4 единицы, либо в какой-то плитке ≥ 5 единиц.

Если в какой-то плитке ≥ 5 единиц, найдутся 3 единицы, стоящие в ряд. Тогда центральная ~~единица~~ клетка имеет единицу, а остальные плитки имеют по 4 единицы.

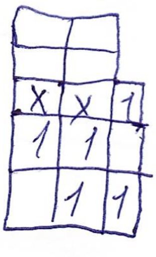
Рассмотрим плитку 1: среди двух клеток „под" центральной клеткой стоит единица не более чем в двух (иначе образуются 3 подряд стоящие единицы). Также, если среди этих двух клеток ни одна не имеет единицу ~~закрашена~~, то ~~останется~~ останется квадрат 2×2 полностью в единицах и имеются три стоящие по диагонали единицы. Тогда среди этих двух клеток имеет единицу ~~закрашена~~ одна:



в какой-то из этих клеток единица.

Если единица в „нижней" клетке, то есть только 1 способ расставить единицы, как требуется в условии:

Тогда посмотрим на плитку 4:



В ней стоит ровно 4 единицы, но если поставить ~~хотя бы~~ одну единицу в указанную X клетку, то получится ряд или диагональ из трёх единиц. Тогда у плитки 4 ~~[illegible]~~ квадрат 2×2 полностью в единицах, и тогда образуется диагональ из трёх единиц.

Чистовик

Продолжение 3.

Тогда в плитке 1 ~~уголок~~ единица стоит в "верхней" из ~~уголковых клеток~~ рассматриваемых ранее клеток. Тогда снова есть только один способ расставить единицы:

		1
1		1
1	1	

Аналогично для всех плиток. Но тогда в центре получится ряд из трёх единиц:

1	1		1	1
1		1		1
	1	1	1	
1		1		1
1	1		1	1

. Противоречие. Получается, единиц ≤ 16.

Пример на 16 единиц:

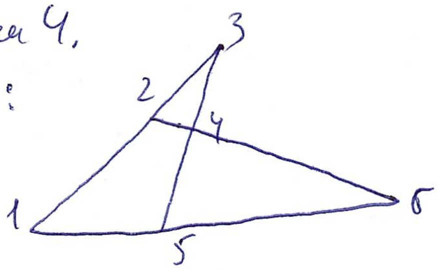
1	1		1	1
1	1		1	1
1	1		1	1
1	1		1	1

Ответ: 16 единиц.

Чистовик.

Задача 4.

Пронумеруем ~~все~~ точки:



Теперь посчитаем варианты расстановок:

~~Если точка A стоит на позиции 1,~~
~~Точка B может стоять на четырёх позициях (2, 3, 5, 6)~~

Каждой позиции точек A и B соответствует единственное положение точки C. Также, точка E лежит на одной прямой и с A, и с C. Так, как при любом расположении A и B на одной прямой есть только две точки, такие, что лежат на одной прямой и с A, и с C, каждому положению точек A и C соответствует единственное расположение точки E. (одно из этих мест занимает B) Аналогично каждому положению точек A и B соответствует единственное расположение точки F. Если точно задано положение точек A, B, C, E, F, точно задано и положение точки D. Тогда, нужно посчитать варианты расстановки точек A и B, расположение остальных точек в таком случае будет единственное. ~~Тогда~~ Точка A может стоять на любой позиции от 1 до 6, и каждой такой позиции соответствует ровно 4 позиции B таких, чтобы потом можно было поставить C в точку, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой. Тогда вариантов $6 \cdot 4 = 24$.

Один вариант нарисован, тогда других вариантов $24 - 1 = 23$.

Ответ: 23 варианта.

Черновик.

Задача 6.

Пример на $\frac{2024}{2025}$: $X_1 = 1$, $X_{2-2025} = 0$. Тогда $\max(y_1, \dots y_{2025}) = 1$, $\min(y_1, \dots y_{2025}) = \frac{1}{2025}$

Пусть размах $< \frac{2024}{2025}$. Тогда разность между наиб. и наим. числом $> \frac{2024}{2025}$. Самое большое возможное число в наборе $(y_1, \dots, y_{2025})$ – это наибольшее число набора $(x_1, \dots, x_{2025})$. Наим. возможное число – самое маленькое число набора $(x_1, \dots, x_{2025})$. Но если самое большое число – наибольшее число набора $(x_1, \dots x_{2025})$, то самое маленькое число набора $(y_1, \dots, y_{2025})$ будет ~~...~~ больше ~~минимальное~~ $\min(x_1, \dots, x_{2025})$ хотябы на $\frac{1}{2025}$. (~~...~~ самая маленькая разница ~~...~~ между $\min(x_1, \dots, x_{2025})$ и $\min(y_1, \dots, y_{2025})$ будет при том условии, что $y_1 = x_1 = \max(X)$,

X – набор $(x_1, \dots X_{2025})$

Y – набор $(y_1, \dots y_{2025})$

~~...~~ $X_n = X_i$, где $n \geq i \geq 2$,

а если $X_n \neq X_i$, то разница между $\min(X)$ и $\min(Y)$ будет больше.)

y_{2025} = среднее арифметическое всех чисел ~~...~~ набора X, а т.к. они различаются не более чем на 1, среднее арифметическое 2025 этих чисел отличается от минимального числа хотябы на $\frac{1}{2025}$. ~~Тогда~~ Аналогичные рассуждения для случая, когда ~~...~~ $\min(X) = X_1$. ~~...~~

Если $\min(X) \neq X_1$ и $\max(X) \neq X_1$, то $\max(Y)$ и $\min(Y)$ будут средними арифметическими каких-то чисел набора X, что уменьшит ~~...~~ размах на $\geq \frac{1}{2025}$. Получается, при переходе от набора X к набору Y размах уменьшается на $\geq \frac{1}{2025}$.

Ответ: $\frac{2024}{2025}$